

Feichtinger Hans G.

**Gewichtsfunktionen
auf lokalkompakten Gruppen**

Von

Hans G. Feichtinger

Sonderdruck aus den
Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 188. Bd., 8. bis 10. Heft, 1979

Wien 1979

In Kommission bei Springer-Verlag, Wien-New York
Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien

Gewichtsfunktionen auf lokalkompakten Gruppen

Von

Hans G. Feichtinger

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 13. Dezember 1979 durch das
w. M. Edmund Hlawka)

§ 0. Einleitung

Die Untersuchung der verschiedensten Eigenschaften von Verschiebungsvarianten Räumen (von Klassen) meßbarer Funktionen bzw. von Maßen spielt eine wichtige Rolle im Rahmen der harmonischen Analyse. Naturgemäß haben dabei diejenigen Banachräume meßbarer Funktionen, für welche jede Verschiebung eine Isometrie darstellt, zunächst besondere Beachtung gefunden. Es seien die homogenen Banachräume im Sinne Katznelsons und insbesondere Reiters Segalalgebren erwähnt, denen eine große Zahl von Publikationen gewidmet ist. Daneben sind auch die sogenannten Beurlingalgebren $L_w^1(G)$ genauer untersucht worden. Neben diesen gewichteten L^1 -Räumen sind aber auch andere gewichtete Banach-Funktionenräume von Bedeutung, welche allerdings bisher nur vereinzelt, praktisch unabhängig voneinander in verschiedenen Arbeiten behandelt werden (siehe z. B. [2], [3], [5], [6], [16] oder [18]).

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, den Grundstein für ein einigermaßen systematische Behandlung von gewichteten Banach-Funktionenräumen auf lokalkompakten Gruppen zu legen. Wir werden

also Räume der Form $B_w := \{f | fw \in B\}$, $\|f\|_{B_w} := \|fw\|_B$, betrachten wobei B ein Banach-Funktionsraum im Sinne von A. C. Zaanen ist [d. h. ein Raum von meßbaren Funktionen auf G , welcher bezüglich punktweiser Multiplikation ein $L^\infty(G)$ -Banachmodul ist]; w ist eine strikt positive, lokal integrierbare Funktion auf G . Wir wollen hier vor allem auf den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Gewichtsfunktion und entsprechenden Eigenschaften des Raumes B_w eingehen. Dabei interessieren uns natürlich vor allem hinreichende bzw. notwendige Bedingungen an w , welche für die Verschiebungsinvarianz bzw. für die Abgeschlossenheit von B_w bezüglich Faltung eine Rolle spielen. Insbesondere werden verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt werden, Banach-Faltungsalgebren der Form $L_w^p(G)$ bzw. $L^1 \cap L_w^p(G)$ zu konstruieren. Diese Banachalgebren sind zum Teil mit anderen Typen von Faltungsalgebren nahe verwandt, welche in [7] bzw. [8] behandelt werden.

§ 1. Bezeichnungen

Alle im Laufe dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen sollen, sofern sie nicht eigens erklärt werden, dieselbe Bedeutung wie in Reiters Buch [14] haben. Um Trivialitäten zu vermeiden, sei G stets eine lokalkompakte, *nicht kompakte* Gruppe. $\mathcal{K}(G)$ bezeichne den Raum aller auf G stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, und $C^c(G)$ den Banachraum aller auf G stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$. Die Räume $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, sind die üblichen Lebesgue-Räume auf G . Wie üblich wollen wir der (nicht ganz exakten) Ausdrucksweise folgen, und von „meßbaren Funktionen“ sprechen, wobei allerdings zwei Funktionen identifiziert werden sollen, wenn sie lokal fast überall (l. f. ü.) übereinstimmen. Weiters sei $L_{loc}^1(G)$ der topologische Vektorraum aller auf G lokal integrierbaren Funktionen, welcher mit den Seminormen $f \rightarrow \int_K |f(x)| dx$, $K \subseteq G$ kompakt, versehen ist. Für eine meßbare Funktion f auf G und ein $y \in G$ setzen wir

$$L_y f(x) := f(y^{-1}x) \text{ bzw. } R_y f(x) := f(xy^{-1})\Delta^{-1}(y),$$

wobei Δ den Haar-Modul der Gruppe bezeichnet. Die solcherart

definierten Verschiebungsoperatoren definieren Isometrien auf $L^1(G)$. Für eine meßbare Menge $A \subseteq G$ bezeichne $|A|$ das Haarmaß der Menge A ; das neutrale Element der Gruppe sei mit e bezeichnet. Positive Konstanten werden mit C, C_1, \dots bezeichnet, wobei dasselbe Symbol bei verschiedenen Gelegenheiten für verschiedene Konstanten stehen kann.

Neben den Grundlagen der harmonischen Analyse benützen wir auch einige Begriffe aus der Theorie der Banach-Funktionsräume im Sinne Zaanens (vgl. [19], Chap. 15). Um die Konsistenz mit anderen Arbeiten des Autors zu bewahren, wollen wir diese Räume hier als solide BF -Räume bezeichnen.

Definition: Ein Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ meßbarer Funktionen heißt *solider BF -Raum*, wenn gilt:

- i) B ist stetig in $L^1_{\text{loc}}(G)$ eingebettet;
- ii) B ist Banach- $L^\infty(G)$ -Modul bezüglich punktweiser Multiplikation (d. h. $f \in B, h \in L^\infty(G) \Rightarrow hf \in B$ und $\|hf\|_B \leq \|h\|_\infty \|f\|_B$).

Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist die Norm eines soliden BF -Raumes bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. Außerdem würde es genügen, anstelle von i) vorauszusetzen, daß zu jeder in B konvergenten Folge $f_n \rightarrow f_0$ und jeder kompakten Menge K eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j \geq 1}$ existiert, derart, daß

$$f_{n_j}(x) \rightarrow f_0(x) \quad x \in K \text{ f. ü. gilt.}$$

Um Pathologien zu vermeiden, wollen wir nur solche soliden BF -Räume betrachten, welche „frei“ sind, d. h. welche die Eigenschaft haben, daß für jede offene Menge M ein $f \in B$ existiert, derart, daß $f c_M \neq 0$ gilt (c_M ist hier die charakteristische Funktion von M). Schließlich bezeichnen wir einen soliden BF -Raum als *Banach-Faltungsalgebra*, wenn für alle $f, g \in A$ die Faltung $f * g$ wohldefiniert ist und wenn gilt $\|f * g\|_A \leq C \|f\|_A \|g\|_A$. (Durch Umnormieren $\|f\|_{A'} := C \|f\|_A$ läßt sich dann jeweils eine äquivalente Norm finden, für welche man $C = 1$ voraussetzen kann.) Ein solider BF -Raum soll zweiseitiger

Banach-Faltungsmodul über A genannt werden, wenn für alle $f \in A$ und $g \in B$ $f * g$ und $g * f$ existieren und wenn gilt

$$\max(\|f * g\|_B, \|g * f\|_B) \leq C_1 \|f\|_A \|g\|_B.$$

§ 2. Verschiebungsinvariante, gewichtete Räume

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Resultate über Räume der Gestalt B_w hergeleitet werden. Insbesondere sollen diejenigen Gewichtsfunktionen w charakterisiert werden, welche verschiebungsinvariante Räume erzeugen. Unter anderem wird auch gezeigt werden, daß man bei der Behandlung von gewichteten Räumen die auftretenden Gewichtsfunktionen durch stetige ersetzen kann.

Lemma 2.1. Sei B ein freier, solider BF -Raum, und sei g meßbar, gegeben. Dann definiert $M_g: f \rightarrow fg$ genau dann eine (lineare) Abbildung von B in B , wenn gilt $g \in L^\infty(G)$.

Beweis: Nach Voraussetzung definiert jedes $g \in L^\infty(G)$ einen beschränkten Multiplikationsoperator auf B . Sei nun umgekehrt $M_g B \subseteq B$, dann ist M_g nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ein beschränkter Operator auf B . Für $g \notin L^\infty(G)$ gilt aber: für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Menge $K_n, |K_n| > 0$, so daß $|g(x)| \geq n$ für $x \in K_n$ f. ü. Da B nach Voraussetzung frei ist, gibt es für jedes n ein $f \in B, f \neq 0$, mit $Trf \subseteq K_n$. Daher gilt $\|fg\|_B \geq n \|f\|_B$, in Widerspruch zur Beschränktheit von M_g .

Definition 2.1. Seien w_1 und w_2 strikt positive Funktionen aus $L^1_{loc}(G)$. Wir nennen w_1 schwächer als w_2 ($w_1 \prec w_2$ bzw. $w_2 \succ w_1$), wenn für ein $C > 0$

$$w_1(x) \leq C w_2(x) \text{ l. f. ü. gilt.}$$

Gilt gleichzeitig $w_1 \prec w_2$ und $w_2 \prec w_1$, bezeichnen wir w_1 und w_2 als äquivalent: $w_1 \sim w_2$.

Klarerweise definiert \prec eine partielle Ordnung auf der Menge aller Gewichtsfunktionen, welche auch mit der Klasseneinteilung für meßbare Funktionen verträglich ist. Insbesondere ist \sim tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

Satz 2.2. Sei B ein freier, solider BF -Raum. Dann gilt

- i) $B_{w_1} \subseteq B_{w_2} \Leftrightarrow w_1 \succ w_2$; also insbesondere
- ii) $B_{w_1} = B_{w_2} \Leftrightarrow w_1 \sim w_2$;
- iii) $B_{w_1} \subseteq B \Leftrightarrow w_1(x) \geq \delta > 0$ l. f. ü.

Beweis: i) $B_{w_1} \subseteq B_{w_2}$ gilt genau dann, wenn $f w_1/w_2 \in B$ für jedes $f \in B$. Die Behauptung folgt somit direkt aus Lemma 2.1. Teil ii) und iii) folgen unmittelbar ($B = B_{w_2}$, $w_2(x) = 1$ für $x \in G$).

Korollar 2.3.

- i) $B_{w_1} \cap B_{w_2} = B_{\max(w_1, w_2)} = B_{w_1 + w_2}$
- ii) $B_{w_1} + B_{w_2} = \{f_1 + f_2 \mid f_i \in B_{w_i}\} = B_{\min(w_1, w_2)}$.

Dabei sind die Räume $B_{w_1} \cap B_{w_2}$ bzw. $B_{w_1} + B_{w_2}$ solide BF -Räume, versehen mit den kanonischen Normen

$$\|f\|_{\cap} = \|f\|_{B, w_1} + \|f\|_{B, w_2}, \text{ bzw.}$$

$$\|f\|_{+} = \inf \{ \|f_1\|_{B, w_1} + \|f_2\|_{B, w_2}, f = f_1 + f_2, f_i \in B_{w_i} \}.$$

In Hinblick auf das folgende Resultat benötigen wir eine weitere Definition.

Definition 2.2. Eine strikt positive Funktion $w \in L^1_{\text{loc}}(G)$ heißt *links-(rechts-)moderiert* ($w \in [LM]$ bzw. $w \in [RM]$) wenn gilt:

$$(LM) \quad L_y w \prec w \quad \text{für alle } y \in G; \quad \text{bzw.}$$

$$(RM) \quad R_y w \prec w \quad \text{für alle } y \in G.$$

Wenn w sowohl (LM) als auch (RM) erfüllt, nennen wir w *moderiert* ($w \in [M]$).

Bemerkung 2.1.

i) In der Folge werden wir uns ausschließlich mit linksmoderierten Funktionen w befassen, doch erhält man jeweils die entsprechenden

Aussagen für RM -Funktion, indem man „links“ durch „rechts“, d. h. L_y durch R_y ersetzt.

ii) Die hier gegebene Definition fällt mit der von Edwards ([4], Def. 1.12) bzw. Gaudry ([11], §3) gegebenen zusammen.

Lemma 2.4.

i) $w \in [LM] \Leftrightarrow L_y w \sim w$ für alle $y \in G$;

ii) Die Menge der linksmoderierten Funktionen ist in bezug auf punktweise Addition und Multiplikation, sowie die Bildung des punktweisen Minimums und Maximums abgeschlossen;

iii) $w \in [LM] \Rightarrow w^\alpha \in [LM]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: i) folgt aus der Ungleichung $w = L_{y^{-1}}(L_y w) \prec L_{y^{-1}} w \prec w$ für $w \in [LM]$. Der Beweis von ii) bzw. iii) sei dem Leser überlassen.

Satz 2.5. Sei B ein linksinvarianter, solider BF -Raum. Dann gilt: B_w ist linksinvariant genau dann, wenn w linksmoderiert ist.

Beweis: Zunächst beweisen wir, daß jeder linksmoderierte BF -Raum $B \neq \{0\}$ frei ist. Wäre B nicht frei, gäbe es eine offene Menge $M \subseteq G$, so daß $(L_y f)|_M = 0$ für alle $f \in B$ gilt. Seien nun $x_0 \in M$ und eine Basis $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Nullumgebungen in G so gewählt, daß $U_\alpha x_0 \subseteq M$ für alle $\alpha \in I$ gilt. Dann gilt aber für $u_\alpha := |U_\alpha|^{-1} \chi_{U_\alpha} : R_{x_0} [f * u_\alpha] = f * R_{x_0} u_\alpha = \int (L_y f) \Delta(x_0)^{-1} u_\alpha(y x_0^{-1}) dy = 0$. Da $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine beschränkte approximierende Einheit von $L^1(G)$ bildet, strebt andererseits $f * u_\alpha$ in $L^1_{loc}(G)$ gegen f (für alle $f \in B$). Dies ergibt einen Widerspruch zur Annahme $B \neq \{0\}$. Da B_w genau dann linksinvariant ist, wenn $L_y(fw)(w/L_y w) \in B$ für alle $y \in G$, ergibt sich die Aussage aus Lemma 2.1 und 2.4 i).

Es ist unser nächstes Ziel zu zeigen, daß jede linksmoderierte Funktion durch eine stetige ersetzt werden kann. Wir benötigen dazu das folgende Ergebnis (siehe [11], Proposition 2, vgl. auch [4], Proposition 1.16).

Lemma 2.6. Für $w \in [LM]$, $y \in G$ setzen wir

$$M(y) := \|w/L_y w\|_\infty.$$

Dann gilt

- i) $M(e) = 1$, $M(x) > 0$ für alle $x \in G$, und
 $M(xy) \leq M(x)M(y)$ für alle $x, y \in G$;
- ii) M ist nach unten halbstetig, und M^{-1} daher lokal beschränkt;
- iii) M ist lokal beschränkt.

Satz 2.7. Sei w eine linksmoderierte Funktion. Dann gilt $k*w \sim w$ für jedes $k \in \mathcal{K}^+(G)$, $k \neq 0$. Insbesondere ist jede linksmoderierte Gewichtsfunktion zu einer stetigen äquivalent. Es gibt daher für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ eine Konstante $C_K > 0$, so daß gilt:

$$0 < C_K^{-1} \leq w(x) \leq C_K < \infty \quad x \in K \text{ f. ü.}$$

Beweis:

a) Nach Voraussetzung ist w linksmoderiert, d. h. für jedes $y \in G$ gibt es (abhängig von y) eine Nullmenge N_y , so daß

$$w(y^{-1}x) \leq M(y^{-1})w(x) \quad \text{für alle } x \in G \setminus N_y.$$

Nach Theorem 2 von [4] gibt es jedoch für jede σ -kompakte Menge $H \subset G$ eine Nullmenge $N \subseteq H$, so daß (nach geeigneter Substitution) gilt:

$$(*) \quad M(y)^{-1}w(x) \leq w(y^{-1}x) \leq M(y^{-1})w(x) \quad \text{für alle} \\ x \in H \setminus N, \quad y \in x(H^{-1} \setminus N^{-1}).$$

b) Sei nun $k \in \mathcal{K}^+(G)$, $Tr k := K_1$, gegeben. Wir haben zu zeigen, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ eine Nullmenge $N_K \subseteq K$ existiert, für welche gilt:

$$C^{-1}(k*f)(x) \leq w(x) \leq C(k*f)(x) \quad \text{für } x \in K \setminus N_K.$$

Wir wollen hier nur den ersten Teil der Abschätzung voll ausführen. Zunächst gilt wegen Lemma 2.6 ii)

$$\inf_{y \in K_1} M(y)^{-1} =: \eta > 0.$$

Nun benützen wir die Ungleichung (*) für $H = K \cup K_1^{-1}K$. Sei N die zugehörige Nullmenge. Wir setzen $N_K := N \cap K$, und $N_x := xN^{-1} \cap K_1$. Diese Mengen sind ebenfalls Nullmengen. Für $x \in K$ gilt dann

$$K_1 \setminus N_x \subseteq xK^{-1}K_1 \setminus xN^{-1} \subseteq xH^{-1} \setminus xN^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} k * w(x) &= \int_{K_1 \setminus N_x} k(y) w(y^{-1}x) dy \\ &\geq w(x) \inf_{y \in K_1} M^{-1}(y) \int_{K_1 \setminus N_x} k(y) dy \\ &= w(x) \cdot \tau \cdot \|k\|_1 \text{ für alle } x \in N \setminus N_K. \end{aligned}$$

Da $\tau \|k\|_1 > 0$ eine von K unabhängige Konstante ist, ergibt dies die gewünschte Abschätzung. Der zweite Teil wird in analoger Weise bewiesen. Schließlich ist klar, daß $k * w$ stetig ist, da ja w nach Voraussetzung lokal integrierbar ist. Die letzte Aussage ergibt sich daraus unmittelbar.

Bemerkung 2.2. Aufgrund des eben bewiesenen Satzes gilt auf jeder kompakten Gruppe $w \sim 1$ für jedes $w \in [LM]$. Dies ist der Grund, warum wir kompakte Gruppen bei unseren Betrachtungen ausgeschlossen haben.

Korollar 2.8. Sei w eine linksmoderierte Funktion. Dann impliziert für jeden soliden BF -Raum B die Bedingung

$$\mathcal{K}(G) \subseteq B \subseteq L_{\text{loc}}^1(G)$$

die entsprechende Inklusionskette für B_w :

$$\mathcal{K}(G) \subseteq B_w \subseteq L_{\text{loc}}^1(G).$$

(Man beachte, daß die Inklusionen automatisch stetige Einbettungen sind ([9])).

Korollar 2.9. Eine strikt positive Funktion $w \in L^1_{\text{loc}}(G)$ ist genau dann linksmoderiert, wenn w zu einer (stetigen) Funktion vom Verschiebungstyp im Sinne Reiters äquivalent ist. (Eine stetige, strikt positive Funktion w_1 heißt vom Verschiebungstyp (siehe [15], VI. 19), wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ eine Konstante $C_K > 0$ existiert, so daß $w(y^{-1}x) \leq C_K w(x)$ für alle $y \in K$ gilt.)

Korollar 2.10. (Vgl. [17], Lemma III, 1.5.) Sei B ein verschiebungsinvarianter, solider BF -Raum, welcher $\mathcal{K}(G)$ als dichten Teilraum enthält. Wenn $\|L_y f\|_B = \|f\|_B$ für alle $f \in B$ und $y \in G$ gilt, dann gilt für jedes $k \in \mathcal{K}^+(G)$:

$$w \sim w_k, \quad w_k(y) := \|L_y k\|_{B,w}.$$

§ 3. Gewichtete Faltungsalgebren

In diesem Abschnitt werden Bedingungen behandelt, welche hinreichend bzw. notwendig dafür sind, daß gewisse Räume der Form B_w oder $L^1 \cap B_w$, insbesondere gewichtete L^p -Räume, Algebren bezüglich Faltung sind. Abgesehen von den „Extremfällen“ $B = L^1(G)$ bzw. $B = L^\infty(G)$ dürfte es jedoch nicht möglich sein, einfache Bedingungen an w zu formulieren, welche gleichzeitig notwendig und hinreichend dafür sind, daß B_w Faltungsalgebra ist. Es sollen hier verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt werden, die zur Konstruktion von Banach-Faltungsalgebren meßbarer Funktionen führen. Am Ende dieses Abschnittes werden wir kurz auf Spezialfälle dieses Typs eingehen, welche in der Literatur behandelt wurden.

Wir benötigen zunächst einige Definitionen:

Definition 3.1. Sei w eine strikt positive Funktion in $L^1_{\text{loc}}(G)$.

i) Die Funktion w heißt *schwach submultiplikativ* ($w \in [SSM]$), wenn gilt: $w \sim w_1$, $0 < w_1(x) < \infty$ für alle $x \in G$, und

$$w_1(xy) \leq C_1 w_1(x) w_1(y) \text{ für alle } x, y \in G.$$

ii) Die Funktion w heißt *schwach subadditiv* ($w \in [SSA]$), wenn gilt: $w_2 \sim w$, $0 < w_2(x) < \infty$ für alle $x \in G$, und

$$w_2(xy) \leq C_2 (w_2(x) + w_2(y)) \text{ für alle } x, y \in G.$$

iii) Eine strikt positive Funktion $g \in L^1_{\text{loc}}(G)$ heißt *schwach subconvolutiv* ($g \in [SSC]$), wenn gilt:

$$g * g \text{ existiert und } g * g(x) \leq C g(x) \text{ l. f. ü.}$$

Bemerkung 3.1. Eine schwach submultiplikative Funktion w ist also (bis auf Äquivalenz) genau dann eine Gewichtsfunktion im Sinne Reiters ([14], S. 83), wenn $w > 1$ gilt. Die Bedeutung von SSA -Funktionen in dem hier zu besprechenden Rahmen wurde zum ersten Mal in [2] deutlich. Einige grundlegende Eigenschaften sowie Beispiele für SSA -Funktionen werden im Anhang zu [2] hergeleitet (vgl. auch [12], Chap. VI).

Einige elementare, aber für die Anwendungen nützliche Zusammenhänge zwischen den soeben definierten Typen von Funktionen, sowie verschiedene grundlegende Eigenschaften sind in den folgenden Hilfssätzen zusammengefaßt.

Lemma 3.1.

i) $w \in [SSA], w > 1 \Rightarrow w \in [SSM]$;

ii) $w \in [SSM] \Rightarrow w \in [M]$;

iii) Sei $w \in L^1_{\text{loc}}(G), w > 1$ gegeben. Dann ist w genau dann schwach submultiplikativ, wenn die Abbildung $w_1: x \rightarrow \log(1 + w(x))$ zu einer subadditiven Funktion äquivalent ist, d. h.

$$w_1 \sim w_2, w_2(xy) \leq w_2(x) + w_2(y) \text{ für } x, y \in G.$$

Beweis: i) Nach Voraussetzung gilt $w \sim w_2, w_2(x) \geq \delta > 0$ für alle $x \in G$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} w_2(xy) &\leq C_2(w_2(x) + w_2(y)) \leq 2C_2 \max(w_2(x), w_2(y)) \leq \\ &\leq 2C_2 \delta^{-1} w_2(x) w_2(y) \text{ für alle } x, y \in G. \end{aligned}$$

Der Beweis von ii) bzw. iii) sei dem Leser überlassen.

Bemerkung 3.2. Aufgrund von Lemma 3.1 und Satz 2.7 ist jede SSM -Funktion, insbesondere also jede SSA -Funktion $w, w > 1$, zu

einer stetigen Funktion äquivalent (vgl. hierzu [17], Proposition III 1.3, aber auch [14], S. 84).

Lemma 3.2.

i) Die Menge der *SSM*-Funktionen ist bezüglich der punktweisen Operationen Addition und Multiplikation, sowie Bildung des punktweisen Minimums und Maximums abgeschlossen.

ii) Die Menge der *SSA*-Funktionen ist gegenüber punktweiser Addition und Bildung von Minimum und Maximum abgeschlossen.

iii) Sei $\alpha > 0$, $w \in [SSA]$ bzw. $[SSM]$ gegeben. Dann gilt auch $w^\alpha \in [SSA]$ bzw. $[SSM]$ für $\alpha > 0$.

Beweis: Aussage i) bzw. ii) ergeben sich durch einfaches Nachrechnen. Aussage iii) für $w \in [SSA]$ folgt aus [2], Theorem A 6.

Lemma 3.3. Seien G_1, G_2 zwei lokalkompakte Gruppen.

i) Sind w_i *SSM*-Funktionen auf G_i , $i = 1, 2$, dann ist $w_1 \otimes w_2$ ($w_1 \otimes w_2(x_1, x_2) := w_1(x_1)w_2(x_2)$) eine *SSM*-Funktion auf $G_1 \times G_2$.

ii) Sind g_i *SSC*-Funktionen auf G_i , $i = 1, 2$, dann ist $g_1 \otimes g_2$ eine *SSC*-Funktion auf $G_1 \times G_2$.

Beweis: Teil i) ist ein Spezialfall von 3.2 i), während sich ii) aus dem Satz von Fubini ergibt.

Weitere Möglichkeiten zur Konstruktion neuer *SSA*-Funktionen sind im Anhang zu [2] zu finden. Für Gruppen der Gestalt $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}^m$ ergibt sich das folgende spezielle Resultat.

Lemma 3.4. Sei $w \succ 1$ eine zunehmende Radialfunktion, d. h. $w(x) = h(|x|)$, wobei $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine zunehmende Funktion sei. Dann ist w schwach subadditiv genau dann, wenn

$$(**) \quad h(2t) \leq C h(t) \text{ für } t > 0 \text{ gilt.}$$

Beweis: Sei w wie oben, wobei h die Bedingung (**) erfüllt.

Dann gilt

$$\begin{aligned} w(x+y) &= h(|x+y|) \leq C h(2 \max(|x|, |y|)) \leq C \max(h|x|, h|y|) \leq \\ &\leq C(w(x) + w(y)). \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt $w \in [SSA]$, dann gilt für $t = |x| > 0$

$$h(2t) = w(2|x|) \leq C(2w(|x|)) = 2Ch(t), \quad \text{q. e. d.}$$

Bemerkung 3.3. i) Es genügt vorauszusetzen, daß die Bedingung (**) für $t \geq t_0$ erfüllt ist.

ii) Man beachte, daß die Menge der im obigen Lemma betrachteten SSA -Funktion auch bezüglich punktwieser Multiplikation abgeschlossen ist, während im allgemeinen das Produkt zweier SSA -Funktionen nicht schwach subadditiv ist (z. B. erfüllt $(x_1, x_2) \rightarrow (1 + |x_1|)^a (1 + |x_2|)^a$ nicht $[SSA]$).

3.5. Beispiele

Typische Beispiele von SSA -Funktionen auf $G = \mathbb{R}^m$ bzw. \mathbb{Z}^n sind die Funktionen $x \mapsto (1 + |x|)^a \log^b(2 + |x|)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ (vgl. Bemerkung 3.2 i) bzw. [2], S. 508). Man kann leicht zeigen, daß Funktionen dieser Art für $a < -m$ SSC -Funktionen sind (siehe Korollar 3.8, unten).

Die typischen Beispiele für SSC -Funktionen w , für welche $w^{-1} \notin [SSA]$ gilt, sind die Funktionen $x \rightarrow \exp(-|x|^d)$, $0 < d < 1$, für $G = \mathbb{R}$ (siehe [18], ein Beweis dieser Tatsache findet sich in [3], S. 274). Die nun folgende Tabelle gibt genau Auskunft, für welche Werte der Parameter a bzw. d die Funktionen $cw_{a,d}$, welche gegeben sind durch

$$cw_{a,d}(x) = (1 + |x|)^a \exp(c|x|^d), \quad c > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

die Eigenschaften $[M]$, $[SSM]$, $[SSA]$ bzw. $[SSC]$ haben (der Parameter $c > 0$ spielt für die Zugehörigkeit zu den jeweiligen Klassen keine Rolle).

M	SSM	SSA	SSC
$-1 \leq d \leq 1$ $a \in \mathbb{R}$	$d = 0, a \geq 0$ oder $0 < d < 1, a \in \mathbb{R}$	$d = 0$ $a \geq 0$	$d = 0, 1, a < -m$ oder $0 < d < 1, a \in \mathbb{R}$

Der Beweis der in dieser Tabelle enthaltenen Aussagen erfolgt im Anhang.

Die Bedeutung der drei, am Anfang dieses Abschnitts definierten Typen von Funktionen ergibt sich im wesentlichen aus den folgenden drei Sätzen (3.6, 3.7 und 3.10):

Satz 3.6.

i) Sei w lokal wesentlich beschränkt. Dann gilt: L_w^1 ist genau dann Banach-Faltungsalgebra, wenn w schwach submultiplikativ ist.

ii) L_w^∞ ist genau dann Banach-Faltungsalgebra, wenn $g := w^{-1}$ die Bedingung (SSC) erfüllt.

Beweis. Die Behauptung i) fällt mit dem Theorem 3 von [11] zusammen. Um ii) zu zeigen, beachte man, daß $f \in L_w^\infty(G)$ genau dann, wenn $|f(x)| \leq Cg(x)$ l. f. ü. gilt. Wegen $|f_1 * f_2| \leq |f_1| * |f_2|$ impliziert (SSC), daß $L_w^\infty(G)$ Banach-Faltungsalgebra ist. Umgekehrt gehört g zu L_w^∞ , und muß also (SSC) erfüllen, wenn L_w^∞ eine Faltungsalgebra ist.

Satz 3.7. Sei A eine solide Banach-Faltungsalgebra, und sei B ein solider BF -Raum, welcher ein zweiseitiger Banachmodul über A bezüglich Faltung ist. Dann gilt:

i) $w_1 \in [SSM] \Rightarrow A_{w_1}$ ist Banach-Faltungsalgebra;

ii) $w_2 \in [SSA] \Rightarrow A \cap B_{w_2}$ ist Banach-Faltungsalgebra.

Bemerkung 3.4. i) Die Behauptungen i) und ii) zusammen sind äquivalent zur Aussage iii): Für $w_1 \in [SSM]$, $w_2 \in [SSA]$ gilt: iii) $A_{w_1} \cap B_{w_1 w_2}$ ist Banach-Faltungsalgebra.

Beweis von 3.7. Es sind lediglich die folgenden beiden grundlegenden Ungleichungen zu verifizieren:

$$|f * g| w_1 \leq C_1 (|f| w * |g| w) \text{ für } w_1 \in [SSM];$$

$$|f * g| w_2 \leq C_2 (|f| * |g| w_2 + |f| w_2 * g) \text{ für } w_2 \in [SSA].$$

Korollar 3.8. Sei g eine SSA -Funktion auf einer unimodularen

Gruppe G . Dann ist $L_w^p(G)$ eine Banach-Faltungsalgebra, falls $g := w^{-1}$ in $L^{p'}(G)$ liegt. Insbesondere erfüllt g die Bedingung (SSC') , falls $g \in L^1(G)$ gilt.

Beweis: Nach der Hölderschen Ungleichung folgt aus $g \in L^{p'}(G)$ die Inklusion $L_w^p(G) \subseteq L^1(G)$. Somit folgt die erste Behauptung aus Satz 3.7 ii) ($A = L^1(G)$, $B = L^p(G)$). Der zweite Teil der Aussage folgt daraus mittels 3.6 ii).

Korollar 3.9. Seien $g \in [SSC]$ und $w_1 \in [SSM]$ gegeben. Dann gilt auch $g g_1 \in [SSC]$ ($g_1 := w_1^{-1}$).

Beweis: Vgl. den Beweis von 3.7 i).

Unter Benützung der Methode der komplexen Interpolation (siehe [1], Chap. 4) kann man folgenden Satz beweisen, der als Verallgemeinerung von 3.8 aufgefaßt werden kann.

Satz 3.10. Sei $1 < p \leq \infty$, $g \in L^{p'}(G)$, G unimodular gegeben. Falls $g_1 := g^{p'}$ die Bedingung (SSC) erfüllt, dann ist $L_w^p(G)$ Banach-Faltungsalgebra.

Beweis: Nach Satz 3.6 ii) ist für $w_1 = w^p$ der Raum $L_{w_1}^{\infty}(G)$ Faltungsalgebra, ebenso natürlich $L^1(G)$. Unter Benützung des Interpolationstheorems für multilineare Abbildungen ([1], Theorem 4.4.1) folgt die Behauptung aus der Formel (siehe [1], Theorem 5.5.3)

$$L_w^p = (L^1, L_{w_1}^{\infty})_{[1/p]}, \quad w = w_1^{1/p'}, \quad 1 < p < \infty.$$

Bemerkung 3.5. Es ist nicht schwierig, auf nicht kompakten, kompakt erzeugten Gruppen nichttriviale (d. h. $w \not\equiv 1$) SSA - bzw. SSM -Funktionen zu konstruieren (siehe [6], §3). Schwieriger ist die Frage nach der Existenz von SSC -Funktionen auf allgemeinen Gruppen zu beantworten. Es wurde in [6], §14 gezeigt, daß auf jeder Gruppe von polynomialem Wachstum (siehe [13] für die Definition) also insbesondere auf jeder abelschen Gruppe, SSA -Funktionen w , mit w^{-1} in $L^1(G)$ existieren (siehe Korollar 3.8). Andererseits gibt es auf der freien Gruppe über zwei Erzeugenden keine derartige Funktion.

Wir untersuchen nun, welche notwendigen Bedingungen w erfüllen muß, wenn ein bestimmter Raum der Form B_w Faltungsalgebra ist. Es folgt aus 3.3 i), 3.1 i), sowie 2.5, daß der Raum $L_w^1(G)$ automatisch verschiebungsinvariant ist, sofern er Banach-Faltungsalgebra ist. Ebenso ist klar, daß auf einer *diskreten* Gruppe jeder freie, solide BF -Raum B (z. B. jeder gewichteter L^p -Raum), welcher abgeschlossen gegenüber Faltung ist, auch verschiebungsinvariant ist (nach Voraussetzung gehört δ_x zu B , also gilt $L_x f = \delta_x * f \in B$ für alle $f \in B$). Falls G nicht diskret ist, ist die analoge Aussage für gewichtete L^p -Räume, $p > 1$, nicht mehr richtig. Betrachten wir zunächst den Fall $p = \infty$.

Lemma 3.11. Sei G eine nicht diskrete Gruppe von polynomialem Wachstum. Dann gibt es eine SSC -Funktion g in $L^1(G)$, welche nicht linksmoderiert ist.

Beweis: Nach [6], § 4 gibt es eine SSC -Funktion g in $L^1(G)$, so daß $w = g^{-1}$ schwach submultiplikativ ist. Für beliebiges $f \in L_w^1 \cap L_w^2(G)$ gehört dann auch $g + f$ zu $[SSC]$, denn wegen (SSM) [(vgl. Beweis von 3.7 i)] bzw. 3.3 ii) gilt:

$$(g + f) * (g + f) = g * g + g * f + f * g + f * f \in \\ \in L_w^\infty * L_w^\infty + L_w^\infty * L_w^1 + L_w^1 * L_w^\infty + L_w^2 * L_w^2 \subset L_w^\infty.$$

Falls G nicht diskret ist, kann f so gewählt werden, daß $g + f$ nicht moderiert ist (man wähle etwa $f \notin L_w^\infty$ als unendliche Summe von Funktionen mit „sehr kleinem“ Träger).

Unter Benützung von Satz 3.10 sowie Satz 2.5 erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 3.12. Sei G eine nicht diskrete Gruppe von polynomialem Wachstum, $p > 1$ gegeben. Dann gibt es eine Funktion $w \succ 1$ auf G derart, daß $L_w^p(G)$ Banach-Faltungsalgebra, aber nicht invariant unter Linksverschiebungen ist.

Bemerkung 3.6. Für beliebige, nicht diskrete, kompakt erzeugte, Gruppen kann man eine entsprechende Aussage für Räume der Gestalt $L^1 \cap L_w^p(G)$, $p > 1$ beweisen.

Das obige Resultat steht in einem gewissen Gegensatz zu einer Beobachtung, welche sich anhand der in 3.5 gegebenen Tabelle machen läßt (es gelte stets $g = w^{-1}$):

Für $g \in L^1(G)$ ist die Bedingung $w \in [SSA]$ hinreichend dafür, daß g die Bedingung (SSC) erfüllt (vgl. Korollar 3.9). Umgekehrt gilt aber für alle angeführten $g \in [SSC]$ immerhin die schwächere Bedingung $w \in [SSM]$ (im Gegensatz zu obigem Ergebnis). Tatsächlich läßt sich eine derartige Implikation unter gewissen Zusatzbedingungen herleiten.

Satz 3.13. Sei G eine abelsche Gruppe. Wenn für eine Funktion $w \succ 1$ der Raum $L^1 \cap L_w^p(G)$ eine verschiebungsinvariante Faltungsalgebra auf G ist, dann ist w schwach submultiplikativ.

Beweis: Wegen $w \prec 1$ gilt nach 2.10 für $1 < p < \infty$

$\|L_z h\|_1 + \|L_z h\|_{p,w} \sim w(z)$ für jedes $h \in \mathcal{K}^+(G)$. Demnach gilt

$$\begin{aligned} w(xy) &\leq C_1 (\|L_{xy}(k^*k)\|_1 + \|L_{xy}(k^*k)\|_{p,w}) \leq \\ &\leq C_2 (\|L_x k\|_1 + \|L_x k\|_{p,w}) (\|L_y k\|_1 + \|L_y k\|_{p,w}) \leq \\ &\leq C_3 w(x) w(y). \end{aligned}$$

Für $p = \infty$ benützt man die Tatsache, daß die Voraussetzungen implizieren, daß auch $L^1 \cap C_w^\infty(G)$, (als Abschluß von $\mathcal{K}(G)$ in $L^1 \cap L_w^\infty(G)$) eine verschiebungsinvariante Faltungsalgebra ist. Es sind dann dieselben Argumente wie oben anwendbar.

Ohne Beweis geben wir einen ähnlichen Satz für Radialfunktionen auf $G = \mathbb{R}^m$ an (siehe Anhang [6], wo der Fall $G = \mathbb{R}$ behandelt wurde).

Satz 3.14. Sei w eine zunehmende Radialfunktion, für welche $L^1 \cap L_w^\infty(\mathbb{R}^m)$ eine Faltungsalgebra. Dann ist w eine Gewichtsfunktion auf \mathbb{R}^m .

Bemerkung 3.7. (Spezialfälle in der Literatur.)

Mit Hilfe der Ergebnisse in 3.4 bis 3.10 könnte man leicht eine lange Liste von gewichteten Faltungsalgebren auf kompakt erzeugten Gruppen, insbesondere auf $G = \mathbb{Z}^m$ und $G = \mathbb{R}^m$ angeben. Wir wollen

dies dem Leser überlassen, und stattdessen kurz auf Spezialfälle hinweisen, welche in der Literatur behandelt wurden. Es zeigt sich dabei, daß bisher Räume der Form L_w^∞ , C_w^0 , $L^1 \cap L_w^\infty$, $L^1 \cap C_w^0$ die meiste Beachtung gefunden haben. So z. B. wurden Räume dieser Art in [2] (S. 496), [3] (S. 259), [5] (S. 306), sowie in [6] behandelt. Mit einer zusätzlichen Gewichtung versehen sind die in [16] betrachteten Räume $\tilde{S}_\varphi(\tau)$ (Theorem 1 von [16] folgt leicht aus Lemma 3.4 und Satz 3.7 iii)). Gewichtete L^p -Räume auf \mathbb{R} , welche Banach-Faltungsalgebren sind, wurden in [18] behandelt.

Bemerkung 3.8. Es ist hier die Stelle, festzustellen, daß wir in der vorliegenden Arbeit bewußt darauf verzichtet haben, verschiedene grundlegende Eigenschaften von gewichteten Faltungsalgebren, insbesondere von gewichteten L^p -Räumen herzuleiten (etwa die Existenz von approximierenden Einheiten, die Charakterisierung der abgeschlossenen Ideale etc.). Derartige Resultate lassen sich in einem viel allgemeineren Rahmen beweisen, welcher u. a. auch die in [7] bzw. [8] definierten Räume einschließt. Wir verweisen den Leser daher auf [9]. Außerdem sei noch erwähnt, daß gewichtete L^p -Räume ein interessantes Verhalten in bezug auf die kanonische Abbildung $T_H: L^1(G) \rightarrow L^1(G/H)$ (H sei abgeschlossene, normale Untergruppe von G) aufweisen (siehe [10]).

Literatur

- [1] Bergh, J., und J. Löfström: Interpolation Spaces (Grundlehren der math. Wissenschaften 223) Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [2] Brandenburg, L. H.: On Identifying the Maximal Ideals in Banach algebras, J. Math. Anal. Appl. **50** (1975), 489—510.
- [3] Chover, J., P. Ney, and S. Waigner: Functions of probability measures, Journal d'Analyse Math. **26** (1973), 255—302.
- [4] Edwards, R. E.: The stability of weighted Lebesgue spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 369—394.
- [5] Essén, M.: Banach algebra methods in renewal theory, Journal d'Analyse Math. **26** (1973), 369—394.
- [6] Feichtinger, H. G.: Teilalgebren von $L^1(G)$, Dissertation, Universität Wien, 1974.
- [7] Feichtinger, H. G.: On a class of convolution algebras of functions, Ann. Inst. Fourier **27** (1977), 135—162.
- [8] Feichtinger, H. G.: On a class of convolution algebras of functions II, Monatshefte für Mathematik **87** (1979), 181—207.

- [9] Feichtinger, H.G.: Translation invariant Banach spaces of functions I, II; (i Vorbereitung).
- [10] Feichtinger, H.G.: Weighted L^p -spaces and the canonical mapping $T_{\mathbb{F}}: L^1(G) \rightarrow L^1(G/\mathbb{H})$, Boll. Un. Mat. Ital. **15 B/3** (1979), 989—999.
- [11] Gaudry, G. I.: Multipliers of weighted Lebesgue and measure spaces, Proc. Lond. Math. Soc. **19** (1964), 327—340.
- [12] Hille, E.: Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1948
- [13] Hulanicki, A.: On the spectrum of convolution operators on groups of polynomial growth, Inventiones math. **17** (1972), 135—142.
- [14] Reiter, H.: Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups, Oxford Univ. Press, 1968.
- [15] Reiter, H.: Über den Satz von Weil-Cartier, Monatshefte für Mathematik **8** (1978), 13—62.
- [16] Ragozin, B. A., und M. S. Sgibnev: Banach algebras of absolutely continuous measures on the straight line, Funct. Anal. and its Appl. **11** (1977), 239—241.
- [17] Spector, R.: Sur la structure locale des groupes Abéliens localement compact. Bull. Soc. math. France, Memoire **24** (1970).
- [18] Wermer, J.: On a class class of normed rings, Arkiv f. Math. **2** (1953), 537—550
- [19] Zaanan, A. C.: Integration, North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1967.

ANHANG

Beweise zu der unter 3.5. angeführten Tabelle

Der Beweis der in der Tabelle enthaltenen Aussagen wird in mehreren Schritten gegeben werden. G bezeichnet im Folgenden die Gruppe \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{Z}^m , $m \geq 1$.

A. Hinreichende Bedingungen ($c = 1$)

Zunächst werden wir beweisen, daß die Funktionen $w_{a,d} := {}_1w_a$, für die in der Tabelle angegebenen Werte der Parameter a bzw. d der jeweiligen Typen von Funktionen angehören.

Da die Funktionen $w_{a,d}$, $a, d \in \mathbb{R}$ Radialfunktionen sind, gelten für $d > 0$ oder $d = 0$, $a \geq 0$ die folgenden Äquivalenzen (vgl. Lemma 3.4)

$$\text{i) } w \in [SSA] \Leftrightarrow w(2x) \leq C_1 w(x) \quad \text{für } x \in G;$$

$$\text{ii) } w \in [SSM] \Leftrightarrow w(2x) \leq C_2 w^2(x) \quad \text{für } x \in G.$$

Es genügt daher eine elementare Rechnung, um nachzuweisen, daß $w_{a,0}$ für $a \geq 0$ eine SSA -Funktion, und insbesondere eine SSM

Funktion ist, und daß $w_{a,d}$ die Bedingung (*SSM*) auch für $0 < d < 1$, $a \in \mathbb{R}$ und $d = 1$, $a \geq 0$ erfüllt. Da jede *SSM*-Funktion auch moderiert ist, und außerdem die Klasse der moderierten Funktionen gegenüber der Bildung von Produkten bzw. des multiplikativen Inversen abgeschlossen ist [siehe Lemma 2.4 ii)], ergibt sich, daß die Funktionen $w_{a,d}$ für $d \in [-1, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ moderiert sind.

Der Nachweis der Eigenschaft (*SSC*) kann auf die folgende Weise erfolgen. Zunächst folgt aus Korollar 3.8, daß $w_{a,0}$ für $a < -m$ die Eigenschaft (*SSC*) hat. Unter Benützung der bereits abgeleiteten Voraussetzungen für die Bedingung (*SSM*) kann man das allgemeine Ergebnis daraus ableiten, indem man $w_{a,d}$ als Produkt darstellt (siehe Korollar 3.9):

$$\text{i) } w_{a,1} = w_{a,0} w_{0,1};$$

$$\text{ii) } w_{a,d} = w_{-m-1,0} w_{a+m+1,d} \text{ für } -1 < d < 0, a \in \mathbb{R}.$$

(Man vergleiche dieses Ergebnis mit einem ähnlichen Resultat für $G = \mathbb{R}$ in [3], S. 274.)

B. Notwendigkeit dieser Bedingungen ($c = 1$)

Zunächst stellen wir fest, daß eine Radialfunktion, welche (*SSM*) bzw. (*SSA*) erfüllt, nicht im Unendlichen verschwinden kann, und zwar wegen der Ungleichungen

$$0 < w(0) \leq C_1 w(x) w(-x) = C_1 w^2(x), \quad \text{bzw.}$$

$$0 < w(0) \leq C_2 (w(x) + w(-x)) = 2C_2 w(x).$$

Insbesondere erfüllt $w_{a,d}$ für $d < 0$ bzw. $d = 0$, $a < 0$ weder (*SSM*) noch (*SSA*). Andererseits ist klar, daß $w_{a,d}$ für $d > 0$ bzw. $d = 0$, $a > 0$ nicht (*SSC*) erfüllt. Ebenso läßt sich durch elementare Rechnungen leicht nachweisen, daß $w_{a,d}$ für $d > 0$ nicht *SSA*-Funktion ist, und für $|d| > 1$ nicht einmal moderiert ist.

Der Beweis, daß die unter (*SSC*) angeführten Bedingungen notwendig sind, ist etwas schwieriger. Zunächst soll bewiesen werden, daß $w_{a,0}$ nur dann (*SSC*) erfüllt, wenn $w_{a,0}$ über G integrierbar ist (d. h. nur wenn $a < -m$ gilt): Wenn g nicht in $L^1(G)$ liegt, dann gibt es für jedes

$n \in \mathbb{N}$ ein $r_n > 0$ existiert, so daß gilt

$$\int_{|y| \leq r_n} w_{a,0}(y) dy \geq n.$$

Für beliebiges $x \in G$, $|x| \geq 2r_n$, gilt dann

$$\begin{aligned} w_{a,0} * w_{a,0}(x) &\geq \int_{|y| < r_n} w_{a,0}(x-y) w_{a,0}(y) dy \geq \\ &\geq \inf_{|z| \leq |x|/2} w_{a,0}(z) \int_{|y| < r_n} w_{a,0}(y) dy \geq C w_{a,0}(x) \cdot n. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß $w_{a,1}$ die Bedingung (SSC) für $a \geq -m$ nicht erfüllen kann (o. B. d. A. gelte $a < 0$). Um die Schreibweise nicht unnötig zu komplizieren, begnügen wir uns mit der Darstellung des Beweises für $G = \mathbb{R}^2$. Zu gegebenem $x = (x_1, 0)$, $x_1 > 0$ definieren wir Z_x als den „Zylinder“, welcher gegeben ist durch

$$Z_x := \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y_1 \leq x_1/2, |y_2| \leq (2 \log 2 x_1)^{1/2}\}$$

Für $y \in Z_x$ gilt dann $e^{-|y| - |x-y|} \geq (1/2) e^{-|x|}$, und

$$(1 + |x-y|)^a \geq (1 + |x|/2)^a \geq 2^{-a} (1 + |x|)^a.$$

Daraus ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} w_{a,1} * w_{a,1}(x) &\geq \int_{Z_x} e^{-|y|} (1 + |y|)^a e^{-|x-y|} (1 + |x-y|)^a dy \\ &\geq 2^{-a-1} w_{a,1}(x) \int_{Z_x} w_{a,0}(y) dy. \end{aligned}$$

Da die Radialfunktion $y \rightarrow (1 + |y|)^a$ nicht integrierbar ist, und weiters die „Zylinder“ Z_x die rechte Halbebene ausschöpfen, divergiert das Integral über Z_x für $x \rightarrow \infty$.

Schließlich bleibt zu zeigen, daß $w_{a,d}$ für $d < -1$ die Bedingung

(SSC) nicht erfüllt. Diese Tatsache kann aber mittels Satz 3.14 aus der Tatsache hergeleitet werden, daß $w_{a,d}$ für $d > 1$ nicht die Bedingung (SSM) erfüllt.

C. Der allgemeine Fall ($c > 0$)

Die in der Tabelle gemachten Aussagen bleiben unverändert richtig, wenn man für beliebig $c > 0$ die Funktionen $w_{a,d}$ durch die Funktion ${}_c w_{a,d}$ ersetzt, welche gegeben ist durch

$${}_c w_{a,d}(x) := (1 + |x|)^a \exp(c|x|^d).$$

Beweis: Für $c > 0$ definieren wir den Operator $M_c f$ durch $M_c f(x) = c f(cx)$. Dann ist M_c ein linearer Operator, welcher klarerweise die Klassen $[M]$, $[SSA]$ sowie $[SSM]$ invariant läßt, aber auch die Eigenschaft (SSC) bleibt wegen $M_c(f * g) = M_c f * M_c g$ erhalten. Daraus folgt die oben aufgestellte Behauptung, wenn man berücksichtigt, daß für jedes $c > 0$ $M_c(w_{a,d})$ zu ${}_c w_{a,d}$ äquivalent ist.

Adresse des Autors: Hans G. Feichtinger, Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, 1090 Wien, Austria.