

74

SEGAL ALGEBRAS  
THAT ARE NOT CHARACTER INVARIANT

Hans G. Feichtinger

January 1978

Institut für Mathematik  
der Universität Wien

Strudlhofgasse 4  
A-1090 W i e n  
Austria

Die Druckkosten für diese Arbeit werden vom Fond  
"600 Jahre Wiener Universität"  
der Kammer der gewerblichen Wirtschaft für Wien getragen.

In [6] Reiter posed the question, whether or not any Segal algebra  $S(G)$  on a locally compact abelian group  $G$  is character invariant, i.e. admits pointwise multiplication with continuous characters. Cigler [2], Cheng [1], Wang ([7], Th.4.18), and others [unpublished], gave examples of Segal algebras that are not character invariant. Cheng, for example, showed that on any non-discrete, locally compact abelian group there exists a Segal algebra  $S(G)$  and  $f \in S(G)$  such that  $yf \notin S(G)$  for some  $y \in \hat{G}$ . We want to extend and to simplify this result. In fact, the following three theorems can be proved:

Theorem 1: Let  $G$  be a non-discrete, locally compact abelian group. Then for any compact set  $V \subseteq \hat{G}$ ,  $0 \notin V$ , there exist a Segal algebra  $S(G)$  and some  $f \in S(G)$  such that  $yf \notin S(G)$  for all  $y \in V$ .

Theorem 2: Let  $G$  be a locally compact group, and let  $H$  be a closed, non-compact subgroup of  $\hat{G}$ . Then the Segal algebra

$$S_H(G) := \{f \mid f \in L^1(G), \hat{f}/H \in L^1(H)\},$$

with the norm  $\|f\|_S := \|f\|_1 + \|\hat{f}/H\|_{L^1(H)}$ ,

satisfies the following two conditions:

- i)  $yf \in S_H(G)$  for all  $y \in H$ ,  $f \in S_H(G)$ , and  $\|yf\|_S = \|f\|_S$ ;
- ii) For any  $y \notin H$  there exists  $f \in S_H(G)$  with  $yf \notin S_H(G)$ .

It follows from i) and ii) that  $f \mapsto yf$  leaves  $S_H(G)$  invariant if and only if  $y \in H$ . For another remarkable property of  $S_H(G)$  (with  $H$  a non-open subgroup of  $\hat{G}$ ) cf. [4], § 4, remark E.

Theorem 3: Let  $G$  be a non-discrete, locally compact abelian group, and suppose  $\hat{G}$  is second countable. Then for any closed subgroup  $H$  of  $\hat{G}$  there exists a Segal algebra  $S(G)$  and  $f \in S(G)$  such that  $yf \in S(G)$  if and only if  $y \in H$ .

Observe that the special case  $H = \{0\}$  of Theorem 3 says: There exists  $S(G)$  and  $f \in S(G)$  such that  $yf \notin S(G)$  for all  $y \in \hat{G}$ ,  $y \neq 0$ . Here  $f$  does not depend on  $y$ , as it was the case in Theorem 2, ii). On the other hand,  $S(G)$  in Theorem 3 is not  $H$ -invariant in general.

The proof of Theorem 1 is based on essentially the same ideas as that one of Theorem 3. As it is more elementary it is left to the reader.

Proof of Theorem 2: Part i) follows trivially from the translation-invariance of the Haar measure on  $H$ . Therefore we have to prove ii). Let  $y \notin H$  be given. As  $yf \in S_H(G)$  for all  $f \in S_H(G)$  would imply that  $f \mapsto yf$  defines a bounded linear operator on  $S_H(G)$  (by the closed graph theorem) we may confine ourselves to show that there exists a constant  $C > 0$  and a sequence  $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq S_H(G)$  satisfying  $\|f_n\|_S \leq C$ , and  $\|yf_n\|_S \geq n/2$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

In order to show this we start with any relatively compact subset  $M \subseteq H$  such that  $|M|_H \geq n$  (measure in  $H$ ). Let now  $V$  be any relatively compact neighborhood of the identity in  $\hat{G}$  such that  $(\overline{H+V}) \cap (\overline{V-y}) = \emptyset$ . Then  $M_0 := M+V$  is again an open, relatively compact subset of  $\hat{G}$  and  $(\overline{V+H}) \cap (\overline{M_0-y}) = \emptyset$ . Consequently there exist  $g \in L^1(G)$  such that  $\hat{g} \equiv 1$  on  $M_0-y$  and  $\text{supp } \hat{g} \subseteq \hat{G} \setminus (H+V)$ . This implies that  $g$  belongs to the closed ideal  $I_H$  of  $L^1(G)$ ,  $I_H(G) := \{f \mid f \in L^1(G), \hat{f}/H \equiv 0\}$ . Since this ideal has bounded approximate units cf. the proofs of [5], there exists a constant  $C_H > 0$  such that there is some  $f \in I_H(G)$ ,  $\|f\|_1 \leq C$ ,  $\|f-f*g\|_1 < 1/2$ . Hence  $\hat{f}(h) = 0$  for all  $h \in H$ , in particular  $\|f\|_S = \|f\|_1 \leq C_H$ , and  $|\hat{f}(z)| \geq 1/2$  for all  $z \in M_0-y$ . This implies

$|\widehat{yf}(z)| > 1/2$  for all  $z \in M \subseteq M_0$ . This gives  $\|yf\|_S \geq \|\widehat{yf}|_H\|_{L^1(H)} \geq \frac{1}{2}|M|_H \geq n/2$ . We may thus take for  $f_n$  the function  $f$  just found, and the proof is complete.

Proof of Theorem 3: Let  $H$  be the given, closed subgroup of  $\hat{G}$ . We have to distinguish between the following two cases:

- i)  $H$  is compact
- ii)  $H$  is not compact.

We shall write down the proof for the first case, with the appropriate modifications for ii) between brackets.

It follows from the assumptions that there exist two sequences  $(V_n)_{n=1}^\infty$  and  $(U_n)_{n=1}^\infty$  of relatively compact, open subsets of  $\hat{G}$  satisfying the following conditions:

$$(1) \quad \bigcup_{n=1}^\infty V_n = \hat{G} \setminus H; \quad \bar{V}_n \subseteq U_n, \quad H \cap \bar{U}_n = \emptyset \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

For later use we define  $K_n := H + \bar{U}_n [= \{0\} + \bar{U}_n]$ . Note that  $K_n$  is a compact set for every  $n \in \mathbb{N}$ . The regularity of the Banach algebra  $F^1(\hat{G}) = \{\hat{f} | f \in L^1(G)\}$  allows us to choose further a sequence  $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq L^1(G)$  such that

$$(2) \quad \hat{f}_n \equiv 1 \quad \text{on } -V_n, \quad \text{supp } \hat{f}_n \subseteq -\bar{U}_n.$$

Thus, in particular

$$(2') \quad \hat{f}_n(h) = 0 \quad \text{for all } h \in H, \quad n \in \mathbb{N}.$$

We now want to define inductively a double sequence  $(y_{k,n})_{k=1, n=1}^\infty \subseteq \hat{G}$ , following the natural order of their indices (given by the lexicographical order). We begin with  $y_{1,1} = 0$ , for example. Given  $(k_0, n_0)$  and  $(y_{k,n})$  for all  $(k,n) < (k_0, n_0)$  we choose  $y_{k_0, n_0}$  [in  $H$ ] such that

$$(3) \quad (y_{k_0, n_0} - K_{n_0}) \cap (y_{k, n} - K_n) = \emptyset \quad \text{for all } (k, n) < (k_0, n_0).$$

This is possible, since  $\bigcup_{(k, n) < (k_0, n_0)} (y_{k, n} - K_n)$  and  $K_{n_0}$  are compact sets, while  $\hat{G}[H]$  is not compact.

We are now in the position to define an unbounded, positive, discrete measure  $\mu$  on  $\hat{G}$ :

$$(4) \quad \mu := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k k^4 \delta_{y_{k, n}}; \quad \text{and}$$

$$(5) \quad S(G) := \{f \mid f \in L^1(G), \hat{f} \in L^1 \mu(\hat{G})\},$$

$$\text{with the norm } \|f\|_S := \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_{L^1 \mu}.$$

That  $S(G)$  is in fact a Segal algebra is easily verified (cf. [3], § 3).

As  $f$  we may take

$$(6) \quad f := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k^3} y_{k, n} \frac{f_n}{\|f_n\|_1} = \sum_{k, n} a_{k, n} g_{k, n},$$

$$\text{with } a_{k, n} := (k^3 \|f_n\|_1)^{-1}, \quad g_{k, n} := y_{k, n} f_n.$$

Apparently  $f$  belongs to  $L^1(G)$ , as  $\|f\|_1 \leq \sum k \cdot \frac{1}{k^3} < \infty$ . Note furthermore that (3) and the inclusions

$$\text{supp } \hat{g}_{k, n} \subseteq y_{k, n} + \bar{U}_n \subseteq y_{k, n} + \bar{K}_n \quad \text{imply}$$

$$(7) \quad (y_{k, n} - K_n) \cap \text{supp } \hat{g}_{1, m} = \emptyset \quad \text{for } (k, n) \neq (1, m).$$

In particular, the functions  $\hat{g}_{k, n}$  have pairwise disjoint supports.

We now intend to verify that  $yf \in S(G)$  for all  $y \in H$ , by showing that  $\hat{y} \hat{g}_{1, m}(y_{k, n}) = 0$  for all  $(1, m)$  and  $(k, n)$ . This in turn implies  $\hat{y} \hat{f}(y_{k, n}) = 0$  and  $\|yf\|_S = \|yf\|_1 = \|f\|_1 = \|f\|_S$  for all  $y \in H$ .

In the case i) we argue as follows: Fix  $(k, n)$  for a moment. By (2') and (6) we then have

$$(8) \quad \hat{y} \hat{g}_{k, n}(y_{k, n}) = \hat{g}_{k, n}(y_{k, n} - y) = a_{k, n} \hat{f}_n(-y) = 0 \quad \text{for } y \in H.$$

(7) now implies  $\widehat{y}_{g_{m,l}}(y_{k,n}) = 0$  for  $(l,m) \neq (k,n)$ , as  $y_{k,n} - y$  belongs to  $y_{k,n} - K_n$ .

In the case ii) (2') and the choice of  $(y_{k,n}) \subseteq H$  imply directly

$$(8') \quad \widehat{y}_{g_{l,m}}(y_{k,n}) = a_{l,m} \widehat{f}_m(y_{k,n} - y_{l,m} - y) = 0$$

for all  $(k,n)$ ,  $(l,m)$ , and all  $y \in H$ .

It remains to prove that  $yf \notin S(G)$  for  $y \notin H$ . Let  $y \notin H$  be given. Then, by (1), there is some  $n_1 \in \mathbb{N}$  such that  $y \in V_{n_1}$ . Consequently

$$(9) \quad \widehat{y}_{g_{k,n_1}}(y_{k,n_1}) = a_{k,n_1} \widehat{f}_{n_1}(-y) = (k^3 \|f_{n_1}\|_1)^{-1} \text{ for all } k > n_1.$$

Because  $\mu$  is a positive measure we have

$$(10) \quad \|yf\|_S \geq \mu(|\widehat{yf}|) \geq k / \|f_{n_1}\|_1 \text{ for all } k \geq n_1$$

and the proof is complete.

REFERENCES

- [1] C.S. CHENG, Segal algebras and the multiplication by continuous characters, Chin.J.Math. 1(1973), 175-181.
- [2] J.CIGLER, Normed ideals in  $L^1(G)$ , Nederl.Akad.Wet.,Proc.,Ser.A-72(1969), 273-282.
- [3] H.G.FEICHTINGER, Results on Banach ideals, to appear in Math. Scand.
- [4] H.G.FEICHTINGER, Multipliers from  $L^1(G)$  to a Homogeneous Banach space, Journ.Math.Anal.Appl. 61(1977), 341-356.
- [5] J.E.GILBERT, On a strong form of spectral synthesis, Ark.f.Mat.7 (1968), 571-575.
- [6] H.REITER,  $L^1$ -algebras and Segal algebras, Lecture Notes in Mathematics, Vol.231, Springer, New York, 1971.
- [7] H.C.WANG, Homogeneous Banach algebras, Lecture Notes in Pure and Applied Math., Marcel Dekker,1977.

# SYMMETRIE DER WIENERSCHEN ALGEBRA UND GRUPPENSTRUKTUR

von H.G.Feichtinger und H.Rindler

In [1] wurde für allgemeine lokalkompakte Gruppen die Algebra  $W^1(G)$  definiert. Sei  $g \neq 0$  irgendeine positive, stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann besteht  $W^1(G)$  genau aus denjenigen stetigen Funktionen auf  $G$ , für die es eine geeignete absolut summierbare Folge  $(a_n)_{n=1}^\infty$  sowie eine Folge  $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$  gibt, sodaß

$$(1) |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(y_n^{-1}x) \quad \text{für alle } x \in G \text{ gilt.}$$

Es wurde gezeigt, daß  $W^1(G)$  mit der Norm

$$\|f\| = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, (a_n)_{n=1}^\infty \text{ erfüllt (1)} \right\}$$

eine pseudosymmetrische Segalalgebra ist ([4], §4). In [1] wurde weiters bewiesen, daß  $W^1(G)$  die kleinste unter allen Segalalgebren auf  $G$  ist, die gleichzeitig ein  $C^0(G)$ -Modul bezüglich der punktweisen Multiplikation sind. Außerdem stimmt  $W^1(\mathbb{R})$  mit der von N.Wiener definierten Gruppenalgebra überein ([3], Chap. 1, §5, iii).

Da  $W^1(G)$  in kanonischer Weise gegeben ist, stellt sich von selbst die Frage, für welche Klasse von Gruppen  $W^1(G)$  als symmetrische Segalalgebra angesehen werden kann. Wir werden diese Frage hier weitgehend beantworten.

Proposition 1. Die folgenden beiden Eigenschaften sind äquivalent: I)  $W^1(G)$  besitzt eine äquivalente Norm mit der es eine symmetrische Segalalgebra ist;

II) Für jede offene, relativ kompakte Menge  $U \subseteq G$  gibt es eine natürliche Zahl  $n_0 (=n_0(U))$  mit der Eigenschaft, daß es für jedes  $x \in G$  eine endliche Folge

$(y_i)_{i=1}^{n_0} \subseteq G$  existiert, für die gilt

$$(2) \quad Ux = \bigcup_{i=1}^{n_0} y_i U.$$

Es ist unmittelbar klar, daß eine Gruppe, die die Eigenschaft II) hat, notwendigerweise unimodular sein muß. Außerdem ist es nicht schwer zu zeigen, daß II) genau dann gilt, wenn es eine solche Menge  $U$  gibt, die II) erfüllt.

Proposition 2. Sei  $G$  eine lokal zusammenhängende Gruppe.

Dann sind die Eigenschaften II) und III) äquivalent:

III) Es gibt eine invariante, relativ kompakte Teilmenge  $W$  von  $G$  mit nichtleerem Inneren (d.h.  $xW = Wx$  für alle  $x \in G$ ).

Die Klasse aller Gruppen, die die Eigenschaft III) haben, wird üblicherweise mit  $[IN]$  bezeichnet. Als direkte Konsequenz der beiden Propositionen haben wir:  
SATZ. Sei  $G$  eine Liegruppe. Dann ist  $W^1(G)$  genau dann (mit einer geeigneten Norm) eine symmetrische Segalalgebra, wenn  $G \in [IN]$  gilt.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für eine kompakte, invariante Untergruppe  $H$  die Quotientengruppe  $G/H$  genau dann die Eigenschaft II) bzw. III) hat, wenn  $G$  diese Eigenschaft hat, läßt sich das Ergebnis des Satzes unter anderem auf lieprojektive Gruppen ausdehnen. Wegen des Approximationssatzes in [2] (theorem 4.6.) gilt der Satz also insbesondere für fast zusammenhängende Gruppen (der Quotient  $G/G_0$  von  $G$  nach der Zusammenhangskomponente  $G_0$  des neutralen Elementes ist kompakt).

LITERATUR

1. H.G.Feichtinger, A characterization of Wiener's algebra on locally compact groups, wird erscheinen.
2. D.Montgomery and L.Zippin, Topological transformation groups, Interscience Tracts in pure and app. math. 1,(1965).
3. H.Reiter, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford Univ. Press (1968),
4. H.Reiter,  $L^1$ -algebras and Segal algebras, Lecture Notes 231, Springer (1971).

Mathematisches Institut der  
Universität Wien  
Strudlhofgasse 4  
1090-Wien