KOLLOQIUM zur
Lineare Algebra und Geometrie 1
Hans G. Feichtinger —– Wintersemester 2010
Mo., 16. April 2012, 14:00, Alserbachstr. 23, NuHAG

NAME:

Matr.Nr.:

1 Definitionen:

1. .[1 Punkt] Man berechne das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, der Vektoren
$$\mathbf{x} = [1, 2, 3 + 4i] \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} = [1 - i, 2, 1 + i];$$
2. .[1 Punkt] Wie kann man feststellen, ob $\lambda = 0$ ein Eigenwert einer quadratischen Matrix ist?
3. .[1 Punkt] Zeige, dass ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ auch ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}^2$ ist.
4. .[2 Punkte] Was versteht man unter der *algebraischen* bzw. der *geometrischen* Vielfachheit eines Eigenwertes? Gibt es dazu eine allgemeine Aussage?
5. .[2 Punkte] Welche Eigenschaften charakterisieren die Determinantenfunktion auf der Menge der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$?
6. .[1 Punkt] Was ist die allgemeine Gestalt von quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^n$?

2 Sätze, Beweise, technische Überlegungen:

1. .[3 Punkte] **Man zeige/begründe**, warum die folgenden drei Eigenschaften logisch und praktisch gleichwertig sind.
   - $\boldsymbol{A}$ lässt sich diagonalisieren, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $\mathbf{Q}$ sodass $\mathbf{Q} * \boldsymbol{A} * \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{D}$.
   - Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist *äquivalent zu einer Diagonalmatrix.*
   - $\boldsymbol{A}$ hat eine Basis von Eigenvektoren.

   Antwort hat zu tun mit der "richtigen" Interpretation der Gleichheit:
$$\boldsymbol{A} * \mathbf{V} = \mathbf{V} * \mathbf{D}.$$
   Was hat das mit Eigenvektoren zu tun, was bedeutet die linke und was bedeutet die rechte Seite seperat berechnet!?

2. .[3 Punkte] Wie kann man das Problem der "kleinsten Quadrate" (minimal norm least squares solution) eines allgemeinen linearen Problems $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (de facto also mittles der pseudo-inversen Matrix $\boldsymbol{A}^+$) beschreiben. Wodurch zeichnet sich die Lösung $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\mathbf{b}$ von allen möglichen Lösungen des Problems und in welchem Sinne ist es überhaupt eine Lösung im üblichen Sinne, d.h. *was kommt raus wenn man die Probe macht, also* $\boldsymbol{A} * \mathbf{x}_0$ *bildet?*

   Teilweise Antwort: $\boldsymbol{A} * \mathbf{x}_0$ *ist die Projektion von* $\mathbf{b}$ *auf den Spaltenraum von* $\boldsymbol{A}$ *(warum)?*

3. .[2 Punkte] Wie stellt man bei einer quadratischen Gleichung in x, y fest, ob es sich dabei um die Beschreibung einer Ellipse oder Hyperbel oder ? handelt?

4. .[2 Punkte] Wie kann man die Determinante einer quadratischen Matrix mit Hilfe der Gauss-Elimination berechnen? (Erklärung und Begründung).

5. .[2 Punkte] Worauf beruht die Methode der Vektor-Iteration, mit deren Hilfe die Eigenvektoren zu den größten Eigenvektoren bestimmt werden können (Voraussetzungen, Realisierung).

   WURDE NICHT GEWERTET!

6. .[3 Punkte] Man wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die folgende Matrix an. Hinweis. Man üeberprüfe zuerst, ob die beiden ersten Spalten schon orthogonal zueinander sind.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   Weil die ersten Spalten zueinander senkrecht stehen, braucht man nur den dritten Vektor orthogonal zu seinen Vorgängern zu machen und dann zu "orthonormalisieren".

3 Multiple Choice:

Wahr oder Falsch? (kurze Erläuterung?)

Jeweils ein Punkt, bzw. **ein Minuspunkt bei falscher Antwort** und Null Punkte bei Nichtbeantwortung.

1. .[1 Punkt] Wenn eine Matrix nicht diagonalisierbar ist, dann gilt für jeden Eigenwert: die geometrische Vielfachheit ist kleiner als die algebraische Vielfachheit. [NEIN] es wird normalerweise EINEN Eigenwert geben, für den das gilt, aber nicht alle!

2. .[1 Punkt] Jede reelle, diagonalisierbare Matrix ist normal (d.h. erfüllt $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{A}^t * \boldsymbol{A}$). [Nein] nur wenn die Matrix ORTHOGONAL diagonalisierbar ist ist das richtig (man schreibe $\boldsymbol{A}$ in der entsprechenden Form auf und multipliziere dann $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}^t$).

3. .[1 Punkt] Die Eigenwerte von reellen, orthogonalen Matrizen sind reell. [NEIN], denn es sind typischerweise Drehmatrizen (welcher Vektor bleibt bei Drehung in der Ebene unverändert!?).

4. .[1 Punkt] Es gibt 3×3-Matrizen, die keine Eigenwerte besitzen. [NEIN]

5. .[2 Punkt] Für eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{B}$ gilt: $\boldsymbol{B} * \boldsymbol{B}'$ (Multiplikation mit der Transponierten + Konjugierten) ist eine positiv definite Matrix. [Ein Punkt für die richtige Begründung der Antwort]

   [JA] BEACHTE:

$$\langle \mathbf{x},\ BB * \boldsymbol{B}' * x \langle = \langle \boldsymbol{B}' * \mathbf{x}, \boldsymbol{B}' * x \langle = \|\boldsymbol{B}' * \mathbf{x}\|^2$$

4 Kommentare, Wünsche, Anregungen