KOLLOQIUM zur
Lineare Algebra und Geometrie 1
Hans G. Feichtinger Wintersemester 2010
Datum: Di., 27. März 2012, 14:00 , Alserbachstr. 23, NuHAG
mögliche Gesamtzahl von Punkten: **31**

`NAME:`

`Matr.Nr.:`

1 Definitionen: Gesamt 6 Pkt.

1. .[1 Punkt] Wie ist Winkel zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{C}^n$ definiert?
2. .[2 Punkte] Was ist eine Eigenwert? Muss ein Eigenwert von Null verschieden sein?
3. .[2 Punkte] Was versteht man unter der *algebraischen* bzw. der *geometrischen* Vielfachheit eines Eigenwertes? Gibt es dazu eine allgemeine Aussage?
4. .[1 Punkt] Wie ist die positive Definitheit einer quadratischen Matrix defininiert?

2 Sätze: GESAMT 10 Pkt.

1. .[3 Punkte] Möglichst zwei, aber jedenfalls eine genau Beschreibung des sog. Spektralsatzes für selbstadj. = symm. (im reellen Fall) Matrizen. M.a.W.: Man beschreibe den Zusammenhang zwischen Diagonalisierbarkeit von Matrizen und der Existenz von Eigenvektoren.
2. .[3 Punkte] Man beschreibe die Singulärwertzerlegung einer rechteckigen Matrix (kleines Essay!). Geometrische Fakten und deren algebraische Beschreibung!
3. .[2 Punkt] Man zeige: zwei Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix sind zueinander orthogonal, wenn sie zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gehören.
4. .[2 Punkte] Es sei $\boldsymbol{A}$ eine reelle symmetrische Matrix, mit Eigenwerten $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ (mit entsprechenden Vielfachheiten). Man bestimme daraus die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^2$ bzw. $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3 Multiple Choice: Gesamt 4 Pkt.

Wahr oder Falsch? (kurze Erläuterung?)

Jeweils ein Punkt, bzw. **ein Minuspunkt bei falscher Antwort** und null Punkte bei Nichtbeantwortung.

1. .[1 Punkt] Wenn eine Matrix normal ist, dann stimmen Zeilenraum und Spaltenraum überein.
2. .[1 Punkt] Jede diagonalisierbare Matrix ist symmetrisch.
3. .[1 Punkt] Die Eigenwerte von unitären (insbesondere orthogonalen) Matrizen haben Absolutbetrag eins.
4. .[1 Punkt] Jede reelle 3×3 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

4 Beweise, Rechenschritte, Ansätze: 11 Pkt. Gesamt

1. .[3 Punkte] Wie kann man die Determinante einer quadratischen Matrix berechnen? (Regeln, Fakten).
2. .[3 Punkte] Wie kann man die Singulärwert-Darstellung einer Spiegelung an einer Ebene (2-dim. Teilraum) im $\mathbb{R}^2$ beschreiben? Welche Eigenräume hat eine solche Abbildung. Wenn die Aufgabe zu schwierig erscheint betrachte man zuerst die Spiegelung an der $x - y$-Ebene.
3. .[3 Punkte] Man wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die folgende Matrix an:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Alternativ: Genau Beschreibung des allgemeinen Verfahrens und praktische Ausführung nur des ersten Schrittes.

4. .[2 Punkte] Man beschreibe die Gleichung einer Ellipse mit Mittelpunkt $(3, 4)$ und Hauptachse 2 bzw. Nebenachse 1. Hinweis: Man erhält die Ellipse durch Anwendung einer affinen Abbildung aus einem Kreis.