KOLLOQIUM zur
Lineare Algebra und Geometrie 1
Hans G. Feichtinger Wintersemester 2010 Datum: Di., 27. Sept. 2011, 10:30, Alserbachstr. 23, NuHAG

`NAME:`

`Matr.Nr.:`

1 Definitionen:

1. .[1 Punkt] Wie ist das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{C}^n$ definiert? `ANTWORT:`
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$
2. .[2 Punkte] Was ist eine Eigenwert? Muss ein Eigenwert von Null verschieden sein? `ANTWORT:`
$$\boldsymbol{A} * \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0.$$
3. .[2 Punkte] Was versteht man unter der *algebraischen* bzw. der *geometrischen* Vielfachheit eines Eigenwertes? Gibt es dazu eine allgemeine Aussage? `Zusatz: Wie zeigt man, dass die geom. Vielfachheit immer kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist.`
4. .[2 Punkte] Welche Eigenschaften charakterisieren die Determinantenfunktion auf der Menge der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$?
5. .[1 Punkt] Was sind *normale* Matrizen (und warum sind diese wichtig)?
6. .[1 Punkt] Was ist die allgemeine Gestalt einer quadratischen Form?

2 Sätze:

1. .[3 Punkte] Möglichst zwei, aber jedenfalls eine genau Beschreibung des sog. Spektralsatzes für selbstadj. = symm. (im reellen Fall) Matrizen;
2. .[4 Punkte] Man beschreibe die Singulärwertzerlegung einer rechteckigen Matrix (kleines Essay!). Geometrische Fakten und deren algebraische Beschreibung!
3. .[3 Punkte] Wie stellt man bei einer quadratischen Gleichung in x, y fest, ob es sich dabei um die Beschreibung einer Ellipse oder Hyperbel oder ? handelt?
4. .[3 Punkte] Wie kann man die Determinante einer quadratischen Matrix berechnen? (Regeln, Fakten).

3 Multiple Choice:

Wahr oder Falsch? (kurze Erläuterung?)

Jeweils ein Punkt, bzw. ein Minuspunkt bei falscher Antwort und Null Punkte bei Nichtbeantwortung.

1. .[1 Punkt] Wenn eine Matrix normal ist, dann stimmen Zeilenraum und Spaltenraum überein. [JA]
2. .[1 Punkt] Jede diagonalisierbare Matrix ist symmetrisch. [NEIN]
3. .[1 Punkt] Die Eigenwerte von unitären (insbesondere orthogonalen) Matrizen haben Absolutbetrag eins. [JA]
4. .[1 Punkt] Jede reelle 3×3 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert, und komplexe Eigenwerte treten als paarweise konjugierte auf. [JA]
5. .[1 Punkt] Es seien zwei Ebenen durch Null im $\mathbb{R}^3$ gegeben: $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$. Dann ist die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$, für die der Zeilenraum gleich $\mathbf{V}_1$ ist und der Spaltenraum gleich $\mathbf{V}_2$ ein 4-dimensionaler Vektorraum. [JEIN]: Frage wurde gestrichen, im Prinzip sind diese linearen Abbbildungen mit der Menge der 2x2 Matrizen identifizierbar, aber andererseits ist die Null-Abbildung nicht strikt in der Menge.

4 Beweise, Rechenschritte, Ansätze:

1. .[3 Punkte] Man bestimme den dritten Singulärvektor (in der Darstellung $\boldsymbol{A} = \mathbf{U} * \Sigma * \mathbf{V}'$) von $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

`Die Matrix hat Rang 3, also ist der dritte Singulärwert die Zahl 0, somit ist` $\mathbf{v}_3$ `der Vektor, der den Nullraum erzeugt.`

2. .[2 Punkte] Man zeige, dass zwei quadratische Matrizen, welche mit Hilfe derselben ONB (Orthonormalbasis) diagonalisierbar sind, miteinander vertauschen.

$$\boldsymbol{A}_i = \mathbf{U} * \mathbf{D}_i * \mathbf{U}' \Rightarrow \boldsymbol{A}_1 * \boldsymbol{A}_2 = ...$$

3. .[4 Punkte] Man wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die folgende Matrix an:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

`EINFACH das Gram-Schmidt Verfahren anwenden....`