Übungen zu Einführung in die
Lineare Algebra und Geometrie

Hans G. Feichtinger und Team

Wintersemester 2010 **sowie Sommersem. 2011**

Teil 1 Stand: June 9, 2011

Beispiele

1. Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssytems
$$3x + y = 9 \quad ; \quad 2y + x = 8;$$

2. Bestimme das quadratische Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p(k) = k$ für k = 1,2,3, bzw.
$q(x) = ax^2 + bx + c$ mit $q(1) = 6, q(2) = 11, q(3) = 18$.

3. Bestimme das quadratische Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p(1) = 1; p'(1) = 2; p"(1) = 3$.

4. Iterierte Substitution: Man drücke u und v durch a und b aus:
$$x = 3a + 4b; y = a + 2b; u = x - y; v = 2x + u;$$

5. Es sei $u = 3; v = 4$; (im vorigen Beispiel); man bestimme daraus $a, b \in \mathbb{R}$.

6. Man gebe eine (geometrisch anschauliche) Erklärung, warum für jeden beliebigen (aber festen) Punkt $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ der Punkt $(x, y, 0)$ unter allen Punkten der (x, y)-Ebene derjenige ist, der P am nächsten ist.

   am nächsten liegt (für beliebige Punkte $P \in \mathbb{R}^3$).

7. Hat das lineare Gleichungssystem
$$x + 4y + 7z = a\,; 2x + 5y + 8z = b\,; 3x + 6y + 9z = c$$
für jede rechte Seite $[a, b, c]^t$ eine (? eindeutige) Lösung?

8. Es sei $p(x) = x^2 + 2x + 3$. Man bestimme das Polynom $q(x) = p^2(x)$ und vergleiche die Bestimmung des Produktpolynoms mit der Multiplikation von ganzen Zahlen (z.B. $123 = p(10)$). Kurz gesagt, man stelle die Analogie zwischen Multiplikation in $\mathbb{N}$ und im Bereich der Polynomfunktionen einander gegenüber. Anstelle des konkreten Falls kann auch allgemein argumentiert werden.

9. Es seien f, g zwei reelle Funktionen, d.h. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllen:
$$3\ f(x) + 4\ g(x) \ =\ 14\ sin(x)\,,$$
$$f(x) - g(x) \ =\ 7\ cos(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Man versuche, f und g zu bestimmen (ist die Lösung eindeutig). Muss die Gleichung für alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ gelten? Genügt es, dass die Gleichung für zwei verschiedene Werte $x \in \mathbb{R}$ gelten?

10. Entwickle $r(x) = (x+3)^2$ in Potenzen von $(x-1)$, d.h. schreibe [1]

$$r(x) = b_1(x-1)^2 + b_2(x-1) + b_3$$

für passend gewählte (eindeutig?) Koeffizienten $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{Q}^3$.

11. Berechne $\lambda \in \mathbb{Q}$ so, dass das Polynom

$$p(x) = 2(x-1)^2 - (x+3)^2 + \lambda$$

die Gleichung $p(2) = 5$ erfüllt.

Trainingsfragen: Wahr oder Falsch

12. a) Jedes lineare Gleichungssystem in zwei Gleichungen in den zwei Unbekannten x, y hat eine eindeutig bestimmt Loesung, ausgenommen die beiden Gleichungen sind Vielfache voneinander.
b) Jedes lineare Gleichungssystem in drei Gleichungen in den drei Unbekannten x, y, z hat eine eindeutig bestimmt Loesung, ausgenommen eine der Gleichungen ist das Vielfache einer anderen.

13. Entsprechen die genannten math. Objekte der Definition einer Matrix? c) Jede Excel Tabelle, die nur Zahlen enthält;
d) Die Distanztabelle, die alle Distanzen zwischen einer Liste von Städten, z.B. für die Städte Wien, Linz und Graz, angibt;
e) ein digitales Bild (unterscheide schwarz/weiss bzw. Farbbild);

Teil 2:

14. Ist es möglich, ein quadratisches Polynom $q(t) = b_1 t^2 + b_2 t + b_3$ aus folgenden Angaben (eindeutig) zu bestimmen?

$$q(-1) = x\ ,\ q'(0) = y\ ,\ q(1) = z.$$

15. Wie kann man die Multiplikation einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bei der Multiplikation mit D, einerseits von links, andererseits von rechts

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

durch Operationen auf den Zeilen oder Spalten von A beschreiben? (verbal bzw. geometrisch)

---

[1] Es ist in der math. Literatur eher üblich die natürliche Schreibweise

$$r(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2$$

zu verwenden, wobei der Index mit der Potenz übereinstimmt. In MATLAB wird jedoch die hier gewählte Beschreibung verwendet, die vergleichbar mit der Interpretation der Ziffernfolge 123 ist: die Länge des Ausdrucks gibt den Stellenwert der Ziffern wieder, beginnend mit der **höchsten** Potenz.

16. Man bestimme die Inverse Matrix zu folgenden Matrizen, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} k & k+1 \\ k-1 & k \end{pmatrix} \tag{3}$$

(mit Hilfe der Gauss-Elimination).

17. Man finde die Inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wie wirkt diese Matrix bzw. ihre inverse auf $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$?

18. Verifiziere, dass die folgende Matrix *selbstinvers ist*, d.h. mit der eigenen Inversen übereinstimmt:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ist eine (von vielen Matrizen über $\mathbb{R}$) mit der interessanten Eigenschaft, dass $\boldsymbol{B} * \boldsymbol{B} = \mathbf{1}_n$ gilt. Eingabe dieser Matrix in MATLAB wäre:

```
B = [1,1; 1,-1]/sqrt(2);
```

19. Es sei $\boldsymbol{A}$ unsere Standard Testmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Man zeige dass dann

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

die folgenden drei Gleichungen erfüllt:

$$\boldsymbol{B} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\ ,\ \ \boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\ ,\ \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} * \boldsymbol{B}. \tag{7}$$

20. Welche Aussagen über den Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{B}$ lassen sich aus dem obigen Sachverhalt herleiten? (Enthaltensrelationen?)

21. Wie kann man zeigen, dass der Zeilenraum von $\boldsymbol{A}$ im Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ enthalten ist (und mit welchem Ansatz kann man die umgekehrte Fragestellung, ob der Spaltenraum im Zeilenraum enthalten ist, klären). Die Methode der Wahl sei wieder einmal die Gauss-Elimination.

22. Ist einer der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ oder $\mathbf{e}_3$ im Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$?

23. Ist der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine (?eindeutige) Linear Kombination von $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

24. Gleiche Frage für $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, darzustellen mittels $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

25. Liegen die Vektoren $\vec{\mathbf{b}} = [3; 5; -1; 5]$ bzw. $\vec{\mathbf{c}} = [1; 1; 1; 1]$ im Spaltenraum der Matrix?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \\ 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Wenn ja, gebe man die passenden Koeffizienten an, wenn nein, gebe man eine Begründung. Man bedenke, dass man daraus einen Vorteil ziehen kann, dass für beide Fragen die gleiche Systemmatrix H verwendet wird!

26. Es sei $\boldsymbol{B}$ wie in der Vorlesung, d.h.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & -0.5000 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Man bestimme die Koeffizienten der folgenden Vektoren bzgl. der Basisvektoren $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ (Spaltenvektoren von $\boldsymbol{B}$), und zwar durch Rechnung sowie Skizze, für die Vektoren $\mathbf{v}_1 := [4, -2]$ sowie $\mathbf{v}_2 = [4, 0]$.

27. Man zeige, dass die Diagonalmatrizen einen Teilraum im Raum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ bilden, und dass das Produkt von Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist. Wie sehen die Inversen von invertierbaren Diagonalmatrizen aus?

28. Der Kommutator von zwei quadratischen Matrizen, in Symbolen $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ ist gegeben durch $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] := \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$. Man zeige, dass die Gleichung $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$ genau dann gilt, wenn $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \mathbf{0}$ gilt.

29. Man stelle fest, wie sich die allgemeine Lösung des Gleichungssystems der Form $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$, mit $\mathbf{b} = [\alpha, \beta]$ beschreiben läßt, für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

Verwenden Sie die Variablen x, y, z, also $\vec{\mathbf{x}} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Gibt es auch für jede rechte Seite eine Lösung mit $z = 0$? (Begründung!)

30. Man bestimme den *Nullraum* der (linearen) Abbildung $p(t) \mapsto p''(t)$ auf $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, d.h. die Menge (den Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$!)

$$\{p(t) \,|\, p''(t) == 0\}.$$

Man gebe ein Erzeugendensystem für diesen Teilraum an.

31. Zeige, dass $\mathcal{B} = \{x-1, x^2-3x-2, x^2-x-2\}$ eine Basis für $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ ist, d.h. dass jedes quadratische Polynom eindeutig als Linearkombination dieser drei quadratischen Polynome geschrieben werden kann. Konkret, bestimme man die eindeutig bestimmten Koeffizienten ("Koordinaten" bzgl. $\mathcal{B}$) von 1 , x , x^2, d.h. die man benötigt um sie als Linearkombinationen von $\mathcal{B}$ darzustellen.

32. Man verifiziere, dass die unteren (und ebenso die oberen) Dreiecksmatrizen, also die Teilmenge der Matrizen von der Form

$$UD_n := \{\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : a_{j,k} = 0 \text{ für } j > k\}$$

abgeschlossen bzgl. Matrix-Multiplikation ist. Eine Dreiecksmatrix ist invertierbar *genau dann* wenn alle Diagonal-Elemente von Null verschieden sind (gilt auchg über dem Körper $\mathbb{C}$). Wie bekommt man einfach analoge Aussagen für obere Dreiecksmatrizen?

33. Man zeige, dass die die *speziellen* unteren (analog oberen) Dreiecksmatrizen, welche zusätzlich konstant gleich 1 auf der Hauptdiagonal sind, eine Gruppe bezüglich der Matrix-Multiplikation bilden (Zusatzfrage: gilt innerhalb dieser Untergruppe der $GL(n, \mathbb{R})$ das Kommutativ-Gesetz?).

34. Es sei $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum, und $J : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ ein selbstinverse linear Abbildung auf $\boldsymbol{V}$, d.h. eine lineare Abbildung, mit $J^2 = Id_{\boldsymbol{V}}$. Man zeige, dass dann jedes $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ als eine Summe von zwei Teilen geschrieben werden kann, nämlich $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_o$ (steht für "even" und "odd"), mit der Eigenschaft: $J(\mathbf{v}_e) = \mathbf{v}_e$ und $J(\mathbf{v}_o) = -\mathbf{v}_o$. HINWEIS: Man nehme $\mathbf{v}_e = (\mathbf{v} + J(\mathbf{v}))/2$.

    Spezialfall: $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}$, als Vektorraum über $\mathbb{R}$ (Gauss'sche Zahlenebene), mit $J(a + ib) = a - ib$ (Konjugation). Dann ist $z_e = real(z), z_o = imag(z)/i$.
    Weitere Bespiele: Reelle Funktionen mit $(Jf)(z) = f(-t)$, dann ist f_e wirklich der gerade Anteil!. Davon kommt die Bezeichnung even = gerade, odd = ungerade!

    Dieses Beispiel passt gut zum einführenden Beispiel der Vorlesung! NACHTRAG: Eine andere Varianten sind die Matrizen (z.B. die 2×2-Matrizen): Die Abbildung $J : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^t$ hat genau die geforderten Eigenschaften. Ein Matrix heisst *symmetrisch*, wenn gilt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^t$. Das Verfahren oben erlaubt jede Matrix in eine symmetrische plus eine *anti-symmetrische* Matrix zu zerlegen.

35. Man kann jedes Polynom $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ in den beiden folgende Formen schreiben:

    (a) $p(t) = b_1 t^2 + b_2 t + b_3$, oder
    (b) $p(t) = c_1(t-1)^2 + c_2(t-1) + c_3$;

    Man drücke die (neuen) Koeffizientenfolge $\mathbf{c}$ durch die alte, d.h. $\mathbf{b}$ aus (lineares Gleichungssystem), z.B. indem man beginnt mit $t^2 = (t-1)^2 + r(t)$, wobei $r(t)$ niedrigeren Grad hat etc... *HINWEIS: Soferne der allgemeine Fall zu kompliziert erscheint ist es OK, ein konkretes Bespiel zu nehmen, z.B.* $p(t) = t^2 + 2t + 3$ *und es in die zweite Gestalt umzuwandeln!*

Material zum Thema Basen

36. Dieselbe Angabe wie das vorige Beispiel: Man drücke den Zusammenhang durch Matrix-Multiplikation aus, d.h. man beschreibe die Matrix $\boldsymbol{A}$ sodass $\mathbf{c} = \boldsymbol{A} * \mathbf{b}$ gilt! Ist die Linearität des Überganges von $\mathbf{b}$ zu $\mathbf{c}$ (und somit die Existenz einer Matrix) klar? Konkret: mit welchen Argumenten kann man das begründen?

37. Gibt es ein quadratische Polynom $p(t) \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ sodass $p(t) + 2p'(t) = t^2 - 2t + 4$ gilt? Wie lautet es (oder wie kann man zeigen, dass es kein derartiges Polynom $p(t)$ gibt?)?
HINWEIS: Unbestimmter Ansatz, dann Koeffizientenvergleich.

38. Ist die lineare Abbildung $p(t) \mapsto p(t)+2p'(t)$ auf $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ (Fleissaufgabe: bzw. $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$) eine invertierbare lineare Abbildung. Wie kann man das feststellen.
HINWEIS: Betrachte die Zuordnung von $p(t)$ zur rechten Seite als Abbildung T. Zeige dass sie linear ist, und versuche durch unbestimmten Ansatz eine passende linke Seite zu finden für beliebig vorgegebenen rechte Seite; also ist zu untersuchen: Ist $T(p(t)) = q(t)$ für jede rechte Seite lösbar?

39. Es sei $\{t^2, t, 1\}$ die (in MATLAB Anordnung) die Standard-Basis für $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Welches der drei Basis-Elemente kann durch das Polynom $q(t) = 3t^2 - 7$ ersetzt werden (mit Begründungen). Wie sieht es mit $r(t) = (1-t)^2$ aus?

40. Es gibt genau vier 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$, welche in genau einer Zeile oder Spalte zwei Einser stehen haben (de facto spielt der Wert keine Rolle, es konnten auch andere, konstante Werte sind). Bilden diese 4 Matrizen eine Basis für den Vektorraum der 2×2-Matrizen.
HINWEIS: Unbestimmter Ansatz, ist jede 2×2-Matrix darstellbar als Linearkombination, etc.

41. Ist es richtig, dass für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\{(t-a)^2, (t-b), 1\}$ eine Basis für $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, oder gibt es Ausnahmewerte?

42. Man stelle fest, ob einer der Zeilenvektoren von $\boldsymbol{A}$ auch im Spaltenraum liegt, für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

43. Man beschreibe, wie man feststellen kann, welche Kombinationen aus den Spalten der eine Basis für $\mathbb{R}^3$ bilden und welche nicht, mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Beispielsweise beantworte man konkret, ob die ersten drei oder die letzten drei Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

44. Ist die Menge $\{t^2-2\,,\, 3t^2+1\,,\, 2t^2-1\}$ eine Basis für den Vektorraum der quadratischen Polynomfunktionen $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$? Wenn nein, kann man (oder nicht: Begründung!) die Menge zu einer Basis ergänzen, durch hinzufügen von weiteren Polynomfunktionen aus $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$?

45. Betrachtet man die Abbildung $p(t) \mapsto q(t) := p'(t)$, d.h. die Ableitung, dann ist klar, dass diese Abbildung $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ in sich abbildet. Gibt es eine 4×4 Matrix $\boldsymbol{A}$,

sodass man diese Abbildung als Matrix-Multiplikation beschreiben kann, die aus den Koeffizienten (nennen wir sie $\mathbf{a}$) des Polynoms $p(t)$ die Koeffizienten $\mathbf{b}$ des Polynoms $q(t)$ erzeugen, d.h. sodass gilt $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$? Wenn ja, erstelle man die Matrix, wenn nein, begründe man die Aussage.

46. Ähnliche Fragestellung für die Abbildung $p(t) \mapsto p(t) + 5$, bzw. $p(t) \mapsto t \cdot p'(t)$, als Abb. auf $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

47. Man stelle die Matrix auf, die lineare Abbildung von einem Polynom $p(t)$ auf die um den Faktor 3 gestreckte Funktion, d.h. das Polynom $q(t) := p(t/3)$ realisiert, d.h. diejenige 3×3-Matrix, die die Koeffizienten von $p(t) \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ auf die Koeffizienten von $q(t)$ abbildet. Ist diese Matrix invertierbar (und wenn ja, wie sieht die inverse Matrix aus)?

48. Man bestimme eine Basis des Nullraumes des folgenden linearen Gleichungssystems:
$$3x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \quad ; \quad 2x_2 + x_3 - x_4 = 0;$$
Was ist die Dimension dieses Raumes (d.h. die Anzahl der Basis-Elemente); Man verifiziere an dem Beispiel, dass diese Basis-Elemente auf die Zeilenvektoren des Systems senkrecht stehen (d.h. Skalarprodukt Null haben).

49. Man zeige, dass für allgemeine $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$ gilt:
$$\langle \boldsymbol{A}' * \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{A} * \mathbf{y} \rangle \tag{13}$$
$$\langle \boldsymbol{A} * \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{A}' * \mathbf{y} \rangle \tag{14}$$

50. Man zeige (unter Verwendung des davorstehenden Beispiels), dass der Nullraum von $\boldsymbol{A}$ mit dem Nullraum von $\boldsymbol{A}' * \boldsymbol{A}$ übereinstimmt.

51. Es sei T eine lineare Abbbildung von $\boldsymbol{V}$ nach $\boldsymbol{W}$, und $\boldsymbol{W}_1$ sei ein Teilraum von $\boldsymbol{W}$, bzw. $\boldsymbol{V}_2$ ein Teilraum von $\boldsymbol{V}$. Man zeige, dass dann auch das Urbild von $\boldsymbol{W}_1$ bzw. das Bild von $\boldsymbol{V}_2$ in $\boldsymbol{W}$ Teilräume sind.

52. Man bestimme eine Basis des Urbildes der $x - y$-Ebene unter der von unserer Standardmatrix (siehe Beispiel 19.) induzierten linearen Abbildung $T : \mathbf{x} \to \boldsymbol{A} * \mathbf{x}$. Was kann man über die Dimensionen sagen. Zusatzfrage ohne Wertung: Steckt ein allgemeines Prinzip dahinter? (Vermutungen, Diskusson!)

53. Man zeige, daß eine obere bzw. untere Dreieck-Matrix (vom Format $n \times n$) genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonalelemente ungleich null sind. Für beide Fälle gebe man eine Begründung (mit Querverbindungen zur Gauss-Elimination).

54. Man zeige, dass die Menge der invertierbaren, unteren (und genauso, in analoger Weise der oberen) Dreiecksmatrizen eine Untergruppe der $GL(n, \mathbb{R})$ ist, indem man zeigt, dass die Inversion ohne Vertauschen von Zeilen möglich ist. Insbesondere beachte man, welche Elementarmatrizen zur Inversion nötig sind [Demonstration anhand eines konkreten 2×2-Beispiels und nachfolgende allgemeine Diskussion ist zulässig].

55. Man stelle die Matrix für den Verschiebungsoperator: $T_a : p(t) \mapsto q(t) = p(t-a)$, für bel. festes $a \in \mathbb{R}$ als Abbildung auf $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ auf, und zwar einerseits bzgl. der Monomial-Basis in mathematischer Ordnung, andererseits in MATLAB Ordnung, d.h. $\{t^3, t^2, t, 1\}$. Auch hier bestimme man die inverse Operation **(das ist natürlich T_{-a})**, indem man die Probe macht (oder mittels Gauss Elim. invertiert).

56. Ist ein $p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ aus den Werten $p(0), p(1), p'(0), p''(1)$ rekonstruierbar. Man Stelle die zugehörige Matrix auf (und erkläre, mit welcher Basis man arbeitet).

57. Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Basen, gespeichert in der Form von $n \times n$-Matrizen. Der Vektor $\mathbf{u}$ sei der Koeffizientenvektor von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. der Basis $\boldsymbol{A}$. Man bestimme daraus die Koeffizienten $\mathbf{v}$ von $\mathbf{x}$ bzgl. der Basis $\boldsymbol{B}$. Weiters sei eine dritte Basis $\boldsymbol{C}$ gegeben. Man wende das vorige Prinzip auf den iterierten Basiswechsel (von $\boldsymbol{A}$ auf $\boldsymbol{B}$ auf $\boldsymbol{C}$) an, andererseits direkt (von $\boldsymbol{A}$ auf $\boldsymbol{C}$), und gebe eine Erklärung der Zusammenhänge.

58. Es sei $\boldsymbol{A}$ unsere Standard Testmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Man bestimme die Winkel zwischen den Zeilen (paarweise) bzw. den Spalten dieser Matrix.

59. Es seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ die zwei Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$ oben. Man bestimme einen zu $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ normalen, normierten Vektor in der von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Ebene in $\mathbb{R}^3$ (Richtungsvektor). Nachtrag (15.1.):Bestimme den Nullraum der Matrix $\boldsymbol{A}$.

60. Man überzeuge sich davon, dass für eine $m \times n-$matrix $\boldsymbol{A} = [\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n]$ (aus n Spaltenvektoren in $\mathbb{C}^m$ bestehend) die folgende wichtige Identität gilt:

$$\langle \boldsymbol{A}' * \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{A} * \mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m. \tag{15}$$

61. Aussagen über Teilräume von $\boldsymbol{V}$, beispielsweise $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^d$: i) Man zeige, dass der Durchschnitt von Teilräumen wieder ein Teilraum ist. Was kann man über die Dimension des Durchschnittes sagen?
ii) Unter welchen Bedingungen (falls das überhaupt möglich ist) ist die Vereinigung von zwei Teilräumen wieder ein Teilraum.

62. Man finde die 2×2-Matrix, welche die Drehung um $60°$, gefolgt mit einer Spiegelung an der y-Achse realisiert. Ebenso beschreibe man die 2×2-Matrix, welche die Spiegelung an der durch $P = [0, 0]$ und $Q = [2, 1]$ gehenden Geraden realisiert.

63. Man bestimme eine Basis für das orthogonale Komplement zu dem von den Vektoren $\vec{\mathbf{x}} = [1, 0, 2, 3]$ und $\vec{\mathbf{y}} = [1, 0, 0, 4]$ aufgespannten Teilraumes von $\mathbb{R}^4$.

64. Gegeben seien zwei linear unabhängige (im Sinne von lin. unabh. Zeilenvektoren der System-Matrix) Gleichungen in 3 Variablen. Man gebe eine geometrische Interpretation der Lösungsmenge als Gerade (mögliche Erklärung mit Hilfe der Gauss-Elimination, aber alternative Antworten sind erwünscht.). Umgekehrt stelle man zu einer gegebenen Geraden, beispielsweise die Gerade mit Richtungsvektor

(die normierte Version von) $\vec{\mathbf{v}} = [1,2,3]$ durch den Punkt $P = [1,1,1]$ eine Gleichungssystem dieser Art, das diese Gerade beschreibt. Ist die Darstellung eindeutig?

BEISPIELE für das Sommersemester 2011

65. (Spezialbeispiel mit Sonderpunkten) Wenn man drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ hat, die orthogonal zueinander sind, so sind sie linear unabhängig. Man überlege sich, für welchen Wert von $\alpha \in [0, 90°]$ gilt: Jedes System von drei Vektoren, mit Winkel $\angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k) > \alpha$ garantiert, dass diese Vektoren linear unabhängig sein müssen (Antwort: 60°, indem man zeigt, was für den Fall $\leq 60°$ passieren kann. Andererseits kann man für $> 60°$ zeigen, dass die zugehörige Gram-Matrix *diagonal dominant* ist, das heißt, dass
$$\sum_{k \neq j} |g_{k,j}| < |g_{k,k}|,\ 1 \leq k \leq 3$$
gilt, denn daraus folgt die Invertierbarkeit der Gram-Matrix [ohne Beweis verwendbares Argument, hier]).

66. Bilden die Polynomfunktionen $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$ eine Basis für den Raum der quadratischen Polynomfunktionen $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$? Man beschreibe die Menge aller Koeffizenten (bzgl. dieses Systems) welche Polynome mit den Nebenbedigungen $p(-1) = 3$ und $p(0) = 14$ ergeben (es geht vor allem um das Aufstellen der entsprechenden Gleichungssysteme).

67. Man zeige, dass für beliebiges $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ die lineare Transformation $p(t) \mapsto q(t) := p(at+b)$ einen Automorphismus von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ (natürlich genauso auf $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ oder $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$) bildet, d.h. invertierbar ist. Wie sieht die inverse Abbildung aus, und wie die zugehörige Matrix bzgl. der Standardbasis? (eventuell ist es hilfreich, die Transformation $t \mapsto at + b$, eine sog. affine Tranformation von $\mathbb{R}$ in sich, als Komposition einer Streckung mit einer Verschiebung aufzufassen, also als Komposition einfacherer Bausteine).

68. Man zeige, dass die Menge $\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ aller Paare von Polynomen $(p(t), q(t))$, wobei $p(t)$ kubisches Polynom und $q(t)$ quadratisches Polynom ist, einen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ bilden. Man zeige, dass die Menge $\boldsymbol{W} = \{(p(t), p'(t)), p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\}$ ein Teilraum von $\boldsymbol{V}$ ist. Man bestimme die Dimension von $\boldsymbol{V}$ sowei die von $\boldsymbol{W}$ (mit Begründung).

69. Man zeige, dass $\{F(x,y) = x^k y^j, \quad \text{mit} \quad 0 \leq k,j \leq 2\}$ 9 linear unabhängige Funktionen im Raum aller Funktionen von 2 Variablen sind (über $\mathbb{R}^2$ oder über $[0,1] \times [0,1]$). Was ist die Dimension des von dieser Menge aufgespannten Vektorraums (stetiger Funktionen). Die Polynome vom Grad ≤ 2 ist der Teilraum aller Funktionen in diesem Vektorraum mit der Nebenbedingung $j + k \leq 2$. Was ist die Dimension dieses Teilraumes?

70. Man beschreibe eine zur $x-y-$Ebene um 45° geneigte Ebene in allgemeiner Lage auf zwei Arten: Entweder betrachte man den Normalvektor und neige diesen in eine

beliebige Richtung ($0° \dots 360°$), um daraus die Gleichung der (allgemeinen) Ebene zu bestimmen, oder man wähle eine konkrete Ebene und rotiere das Erzeugersystem um die z-Achse. Man verifiziere anhand eines konkreten Beispiels (selbst zu wählen), dass diese beiden Sichtweisen (natürlich) miteinander kompatibel sind.

71. Man stelle die Drehmatrix 3×3-Matrizen auf, die einer (allgemeinen oder wenigstens einer speziellen) Drehung um die z-Achse bzw. um die y (bzw. x-)-Achse beschreiben. Vertauschen solche Matrizen?

72. Es sei F die Matrix, welch die diskrete Fourier Transformation der Größe 3 realisiert:
$$F = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & -0.5000 - 0.8660i & -0.5000 + 0.8660i \\ 1.0000 & -0.5000 + 0.8660i & -0.5000 - 0.8660i \end{pmatrix} \qquad (16)$$
Man zeige, dass diese Matrix unitär ist (bis auf einen zu bestimmenden Faktor), und visualisiere die komplexen Zahlen in dieser Matrix.

73. Man berechne für die Matrizen von Beispiel 19 die Kreuzprodukte der Spaltenvektoren (paarweise, drei Ergebnisse gefragt). Was sagt deren Länge über die Winkel aus?

74. Gegeben zwei orthogonale Vektoren im $\mathbb{R}^3$, $p = [1, 2, 2]$ und $q = [2, 1, -2]$. Man bestimme den Normalabstand des Punktes $P = (3, 4, 3)$ von der Ebene, die von diesen beiden Vektoren aufgespannt wird.

75. Es seien g, h zwei Vektoren in $\mathbb{C}^n$, mit $\|g\|_2 = 1 = \|h\|_2$, und P_g bzw. P_h seien die Projektionen auf die von g bzw. h erzeugten (1-dim.) Teilräume. Man zeige, dass $P_g \circ P_h = 0$ (der Null-Operator) genau dann wenn $g \perp h$ gilt.

76. Es sei $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{C}^m$ (z.B. Spalten einer unitären Matrix). Sei $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, dann ist $\sum_{k \in J} P_{\mathbf{u}_k}$ eine orthogonale Projektion auf $V_M, M = \{\mathbf{u}_k, k \in J\}$ (der vom M erzeugte Teilraum von $\mathbb{C}^m$). Man verifiziere, dass die zugehörige Matrix $\mathbf{P}$ die Bedingungen $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ und $\mathbf{P} = \mathbf{P} * \mathbf{P}'$ gelten.

77. Man berechne die Matrix der linearen Abbildung, welche den Werten eines quadratischen Polynoms $p(t) \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ an den Stellen $-1, 0, 1$ die Ableitung $p'(0)$ zuordnet. Man benutze das Ergebnis, um das Funktional $\delta'(0) : p(t) \mapsto p'(0)$ als Linearkombination der Delta-Funktionale $(\delta_x(p(t)) = p(x))$ $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1$. [Zusatzfrage: was ändert sich, wenn man die Folge $-1, 0, 1$ durch $-a, 0, a$ ersetzt?]

    Hinweis: Gleichheit von Funktionalen ist gleichbedeutend mit der Übereinstimmung ihrer Wirkung auf beliebigen Vektoren, aber aus Linearitätsgründen reicht es, die Gleichheit auf den Basis-Elementen zu überprüfen.

78. Man zeige, dass der Vektorraum aller (stetigen und beschränkten) Funktionen von der Form
$$\boldsymbol{V}_1 := \{f(t) = \alpha \cos(t-u) + \beta \sin(t-u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{R}\}$$

zwei-dimensional ist (über $\mathbb{C}$). Man spricht daher davon, dass dieser Raum verschiebungsinvariant ist, da mit $f(t)$ auch die verschobene Version $f(t-v), v \in \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{V}_1$ liegt. Dasselbe gilt natürlich auch entsprechend wenn man $\cos(kt)$ bzw. $\sin(kt)$ für festes $k \in \mathbb{N}$ verwendet. Diese Verschiebungsinvarianz macht die Fourier-Transformation so wichtig für die Anwendungen.

79. Man bestimme die zur Standardbasis von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, d.h. zu $\mathscr{M}_3 := \{1, t, t^2\}$ duale Basis (HINWEIS: Taylorreihe einer Funktion durch Ableitung). ACHTUNG: das Beispiel wird vielleicht schon in der Vorlesung gemacht!

80. Es sei $\mathscr{B}$ die Standardbasis für die 2×2-Matrizen, und T die lineare Abbildung $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$, für eine feste 2×2-Matrix $\boldsymbol{B}$ (Beispiel: $\boldsymbol{B} = [1, 3; 2, 4]$). Es ist klar, dass T eine lineare Abbildung ist. Man bestimme die zugehörige Matrix (das muss also eine 4×4-Matrix sein). Ebenso kann man das von der linken Seite her machen! Das gibt dann eine andere Matrix.

81. Es sei $\vec{\mathbf{a}} = [a; b]$ ein Richtungsvektor in $\mathbb{R}^2$. Man zeige, dass er auf genau zwei Arten zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ ergänzt werden kann. Man folgere daraus (Ansatz: $a = cos(\alpha)$), dass im Prinzip die (reellen) unitären (also die sog. orthogonalen) Matrizen genau die Rotationen sind (bis auf ein Vorzeichen, das geometrisch zu interpretieren ist).

82. Wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert (Gauss'sche Zahlenebene), dann entsprechen den unitären Matrizen genau die Multiplikationen mit komplexen Zahlen vom Absolut-Betrag eins (d.h. die komplexen 1×1 Matrizen, welche unitär sind). Die Abbildung $[x; y] \mapsto [x; -y]$ ist dann aber nicht mehr linear (über dem Körper der komplexen Zahlen: es ist einfach der Konjugationsoperator), allerdings ist es eine längenerhaltende, d.h. den Absolutbetrag wahrende (additive) Operation auf $\mathbb{C}$. Die allgemeinen orthogonalen Matrizen (im reellen Sinne, auf $\mathbb{R}^2$ wirkend) sind also genau die Produkte von Matrizen dieser Art.

83. Es seien $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ zwei Vektoren in $\mathbb{C}^n$. Man zeige, dass $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ auf $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ senkrecht steht genau dann wenn gilt:
$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|.$$

84. Man verifiziere die durch eine Skizze leicht geometrisch verständlich zu machende Aussage, dass die Länge der Projektion eines Vektors $\vec{\mathbf{x}}$ auf den eindim. Teilraum aller skalaren Vielfachen ("Gerade") eines anderen Vektors $\vec{\mathbf{y}}$ nur vom Winkel zwischen den beiden Vektoren abhängt. Beschreiben Sie die Menge aller derartigen Vektoren $\vec{\mathbf{y}}$, welche zu festem Vektor $\vec{\mathbf{x}}$ den gleichen Winkel haben.

85. Man berechne (für eine beliebige Auswahl von Spalten oder Zeilenvektoren der Standard Test-Matrix (Bsp.58) das zugehörige Biorthogonalsystem, und berechne daraus die Matrix der Projektion auf den Spaltenraum (=Zeilenraum) (wieder Vergleich mit dem Ergebnis der KollegInnen). Wie kann man daraus die Projektion auf den Nullraum dieser Matrix bestimmen?

86. Man bestimme, ausgehend von zwei beliebigen Zeilen oder Spaltenvektoren, eine Orthonormalbasis des Zeilenraumes oder des Spaltenraumes der Standard Testmatrix (Beispiel 58), um daraus `alter Text war [Unsinn]: mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis für den entsprechenden Raum zu berechnen.` **die Matrix für die orthogonale Projektion auf diesen Raum zu berechnen. Sie ist die Hintereinanderschaltung der Koeffizienten-Bildung, gefolgt von dem Bilden von Linear-Kombinationen, also mathematisch die Umsetzung der Formel**

$$P(\vec{\mathbf{x}}) = \langle \vec{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \vec{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$$

Durch Vergleich mit dem Ergebnis anderer Kollegen stelle man fest, dass dies ein anderer Weg ist, um festzustellen, dass der Zeilenraum gleich dem Spaltenraum ist.

87. (*) Etwas theoretischeres Beispiel: Wir haben gesehen, dass für jeden endlichdim. Vektorraum $\boldsymbol{W}$, welcher mit einer Basis $\mathscr{B}$ ausgestattet ist, der Dualraum eine Basis besitzt. Andererseits haben wir festgestellt, dass für eine linear unabhängige Folge in $\mathbb{C}^n$ (sagen wir r Spaltenvektoren im $\mathbb{C}^n$) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, **welche einen r-dim. Teilraum $\boldsymbol{V}$ von $\mathbb{C}^n$ aufspannen**, eine Biorthogonal-Folge $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ (eine anderer Basis desselben Raumes!) existiert, welche mit Hilfe der (inversen) Gram-Matrix berechnet werden kann. Man zeige, dass die Abbildungen (genauer: linearen Funktonale) $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_k \rangle, 1 \leq k \leq r$, genau die duale Basis (im Sinne der abstrakten Definition) realisiert. Wenn $r < n$ gilt, dann gibt es neben dem (innerhalb von $\boldsymbol{V}$ liegenden) "kanonischen" Biorthogonalsystem auch noch andere Vektoren (man denke an das orthogonale Komplement von $\boldsymbol{V}$ in $\mathbb{C}^n$!).

   Man diskutiere, warum das kanonische Biorthogonalsystem das beste/richtige ist, weil es nämlich auf ganz $\mathbb{C}^n$ definiert ist, und die *orthogonale* Projektion

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{P}_{\boldsymbol{V}}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_r \rangle \mathbf{v}_r \tag{17}$$

   liefert, während andere Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}_j, 1 \leq j \leq r$ eben andere lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^n$ nach $\boldsymbol{V}$ definieren.

   HINWEIS: vielleicht ist es hilfreich, sich das ganze im rellen Fall vorzustellen: Der Teilraum waere dann ein 2-dim. Teilraum, also eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Der Dualraum ist dann auch zweidimensional. Biorthogonalität erweist sich als: Man finde zwei Vektoren, die kreuzweise zu den Basis-Vektoren orthogonal stehen, aber in derselben Ebene liegen. Die "abstrakte duale Basis" gewinnt damit auch einen konkreteren Charakter!

88. (Vorbereitung von Begriffen der Konditionszahl, G.Strang, Chap.9.1.)

   Man stelle allgemein fest, was für zwei beliebig gedachte unitäre bzw. Diagonalmatrix $\mathbf{U}$ und $\mathbf{D}$ die maximale Länge von $\boldsymbol{A}{*}\mathbf{x}$ ist, für $\boldsymbol{A} = \mathbf{D}{*}\mathbf{U}$, oder $\boldsymbol{A} = \mathbf{U}{*}\mathbf{D}{*}\mathbf{U}'$, und $\mathbf{x}$ ein normierter Vektor, d.h. ein Vektor von Länge 1. Man erstelle eine allgemeine Vermutung, indem man ein paar Beispiele im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ analysiere, und daraus eine allgemeine Vermutung formuliere.

89. Es sei die Matrix $\boldsymbol{A}$ gegeben als

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

mit inverse Matrix $\boldsymbol{C}$

$$\begin{pmatrix} 0.0000 & 0.3333 & -0.0000 \\ 0.3333 & -0.2222 & -0.0000 \\ -0.1111 & -0.0370 & 0.3333 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Man berechne die Determinante von $\boldsymbol{A}$. Hinweis: bis auf den Faktor $1/\det(\boldsymbol{A})$ ist $\boldsymbol{C}$ ein ganzzahlige Matrix. Weiters stelle man für die Matrix $\boldsymbol{B}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

die Basiswechselmatrix in der Notation der Vorlesung $[Id_3]_{\boldsymbol{A}\hookleftarrow\boldsymbol{B}}$ auf, welche aus den $\boldsymbol{B}$-Koordinaten eines beliebigen Vektors $[\vec{\mathbf{x}}]_{\boldsymbol{B}}$ des Vektors $\vec{\mathbf{x}} = [x; y; z]$ die $\boldsymbol{A} - Koordinaten$ macht, also folgende Identität erfüllt:

$$[\vec{\mathbf{x}}]_{\boldsymbol{A}} = [Id_3]_{\boldsymbol{A}\hookleftarrow\boldsymbol{B}} * [\vec{\mathbf{x}}]_{\boldsymbol{B}}.$$

90. Es sei $\boldsymbol{V}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$, und $\boldsymbol{V}^\perp$ sein orthogonales Komplement. Man zeige, dass man durch Vereinigung je einer ONB (Orthonormalbasis) für diese beide Räume eine Orthonormalbasis für den $\mathbb{R}^n$ bekommt. Bekommt man auf diese Weise alle möglichen OnBs des $\mathbb{R}^n$?

91. Man zeige, wie man die Gleichung einer Ellipse in gedrehter Form (sagen wir: $a = 2, b = 1$, gedreht im math. positiven Sinne um 60°) durch eine quadratische Gleichung beschreiben kann.

92. (*) Hat man irgendeine Basis $\mathscr{B}_1$ im Zeilenraum der Standard-Matrix (Beispiel 58) gewählt, und eine andere $\mathscr{B}_2$ im Spaltenraum der Matrix. dann gibt es eine zugehörige 2×2-Matrix, welche die Einschränkung der linearen Abbildung $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \boldsymbol{A}{*}\vec{\mathbf{x}}$ beschreiben. Diese Abbildung ist (aus theoretischen) Gründen (warum?) als Isomorphismus bekannt. Man zeige anhand des konkreten Beispiels (vergleiche vorangegangene Beispiele), dass diese 2×2-Matrix invertierbar ist. [Hinweis für später: Die pseudo-inverse Matrix bildet den Spaltenraum zurück in den Zeilenraum, und entsprecht dort genau der linearen Abbildunge, welche die vorgenannte Einschränkung invertiert].

93. Man wähle beliebige zwei (lin. unab.) Vektoren im Spaltenraum der *Standard-matrix* (Beispiel 58) (der ja gleich seinem Zeilen Raum ist, also z.B. die zweite Spalte und die erste Zahl, aber bitte eine eigene Auswahl treffen, z.B. unter Verwendung von Linearkombinationen von bel. Zeilen und Spaltenvektoren!!) sowie einen dritten zufälligen Vektor (entweder als gewürfelter Vektor gedacht, oder einfach "irgenein Vektor im $\mathbb{R}^3$"). Dann wende man auf diese drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ das Gram-Schmidt Verfahren an und vergleiche das Ergebnis mit dem der KollegInnen. Wie interpretieren Sie das Ergebnis (geometrisch, bzw. in der Terminologie der Linearen Algebra)? Was passiert, wenn man (mit Wahrscheinlichkeit Null) doch einen Vektor aus dem Zeilenraum "würfelt" (d.h. wenn man beispielsweise Gram-Schmidt direkt auf die Kollektion der Spaltenvektoren der Standard-Matrix anwendet)?

94. Das Ergebnis des Gram-Schmidt Verfahrens hängt klarerweise von der Reihenfolge der Basisvektoren ab. Man wende es daher auf die Zeilen oder Spaltenvektoren der Matrix von Beispiel 89 an, und zeige, dass das GS-Verfahren als letzten Vektor jeweils einen normierten, d.h. Richtungsvektor in die Richtung der entsprechenden Spalte resp. Zeile der Inversen Matrix darstellt (d.h. bis auf einen sklararen Faktor kommen auf diese Weise die Zeilen resp. Spalten, bzw. die Elemente des Biorthogonalsystems, zustande).

    Konkret (bitte nicht alle dasselbe!): Nimmt man die Spalten von $\boldsymbol{A}$ in der Reihenfolge $2, 3, 1$, d.h. in MATLAB $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(:, [2, 3, 1])$; und wendet darauf Gram-Schmidt an, so erhält man (bis auf Skalierung) die erste Zeile von $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$ (Bsp. 89). Insbesondere hängt der letzte Vektor des Ergebnisses nicht davon ab, in welcher Reihenfolge die davorliegenden Vektoren verwendet werden.

95. Es seien $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ zwei zueinander orthogonale Teilräume des $\mathbb{C}^n$. Man zeige, dass dann $\dim(\boldsymbol{V}_1)+\dim(\boldsymbol{V}_2) \leq n$ gilt. Genau dann wenn Gleichheit in der obigen Abschätzung gilt, kann $\mathbb{C}^n$ als direkte (orthogonale) Summe der beiden Teilräume dargestellt werden.

96. Man berechne (nach der Regel von Sarrus) die Determinante von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{21}$$

97. Es sei $\boldsymbol{B}$ eine reelle 3×3-Matrix vom Rang 2. Man zeige, dass dann der Durchschnitt von Zeilenraum und Spaltenraum von Dimension 1 oder 2 ist, je nachdem ob die beiden Räume verschieden voneinander sind oder gleich (genau dann ...). Insbesondere begründe man, warum dieser Raum NICHT trivial sein kann (d.h. nur aus dem Null-Vektor bestehen) oder ganz $\mathbb{R}^3$ sein kann.

98. Man bestimme die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

und bestimme den Durchschnitt von Zeilenraum und Spaltenraum dieser Matrix. (was ist die Dimension diese Teilraumes).

99. Man wende auf die folgende Matrix das Gram-Schmidt-Verfahren an (möglichst mit rationalen Zahlen rechnend):

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Zur Kontrolle: das Ergebnis sollte (numerisch) wie folgt aussehen:

$$\begin{pmatrix} 0.6172 & 0.5774 & -0.5345 \\ 0.1543 & 0.5774 & 0.8018 \\ 0.7715 & -0.5774 & 0.2673 \end{pmatrix} \tag{24}$$

100. Man berechne auf dem Vektorraum $\boldsymbol{V} = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ das lineare Funktional $\varphi(p(t)) := \int_{-1}^{1} p(t)dt$ als Linearkombination der Punktfuntionale δ_{-1}, δ_0 bzw. δ_1. D.h. man bestimme eine exakte Integrationsformel für quadratische Polynome. Wie ist die Formel zu ändern, wenn man anstelle der Folge $[-1, 0, 1]$ die Folge $[-a, 0, a]$ für ein anderes $a > 0$ (mit entsprechender Änderung der Integrationsgrenzen).

101. Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Man bestimme das charakteristische Polynom, seine Wurzeln, sowie die geometrische und algebraische Vielfachheit der Eigenräume.
Hinweis: MATLAB liefert folgendes Zwischenergebnis:
`poly(A) , ans = 1 -6 9 , roots(poly(A)) = ....`

102. Gegeben

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

bestimme man die Eigenwerte und Eigenvektoren (eine Basis für die Eigenräume) dieser Matrix.

Nach Möglichkeit ziehe man aus den Beobachtungen, die man anhand dieses Beispiels machen kann, allgemeine Schlüsse die auf vergleichbare Matrizen anwendbar sind (kurz gesagt: warum ist das vorgegebene Beispiel ein relativ einfaches, und auf welche Art von Matrizen läßt sich die Argumentation übertragen).

103. Bilden die Polynomfunktionen $(x-1)^2, x^2, (x+1)^2$ eine Basis für den Raum der quadratischen Polynomfunktionen $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$? Wie steht es mit der Basiseigenschaft allgemeiner Familien der Form $(x-a)^2, (x-b)^2, (x-c)^2$, für $a, b, c \in \mathbb{R}$? (es genügt, eine *einfaches* Argument zu suchen, dass den Fall $c = -a, b = 0$ oder den Fall einer arithmetischen Progression, d.h. $c = b + (b-a)$ behandelt). In diesen Fällen kann man nämlich Invarianz-Eigenschaften des Vektorrraumes $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ verwenden!

104. Es seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ die zwei folgenden Basen für den Raum der quadratischen, reellen Polynomfunktionen $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{A} = \{(t+1)^2, (t-0)^2, (t-1)^2\}$$

bzw. $\mathscr{B}$ die Lagrange Interpolationspolynome für die gleichen Stellen, also für die Punktfolge $[-1, 0, 1]$. Man bestimme die Basis-Wechsel Matrix, d.h. die Matrix, welche aus den Koeffizienten eines quadratischen Polynoms in der einen Darstellung die der anderen Darstellung macht, also $[Id_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathscr{B}\leftrightarrow\mathscr{A}}$ bzw. $[Id_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}}$.

105. Es seien auf $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ die Funktional $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1$ gegeben ($\delta_x(p(t)) = p(x)$, die Auswertung an der Stelle x). Man berechne δ_2 (oder δ_k für in $k \geq 2$) als Linearkombination der gegebenen Basis des Dualraumes von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ (also $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})^*$). Hinweis: Ein Funktional ist eine Linearkombination anderer linearer Funktionale genau dann wenn sie auf allen Vektoren einer Basis übereinstimmen.

Anmerkung: Man kann daraus eine Rekursionsgleichung ableiten, d.h. eine Regel, die es erlaubt, die Werte von $q(r+3)$ aus der Folge von Werten $q(r), q(r+1), q(r+2)$ auszurechnen, für beliebiges $q(t) \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, für beliebiges $r \in \mathbb{R}$.

106. Es zu $\mathbf{U}$ eine $n \times r$ Matrix, $1 \leq r \leq n$, mit $\mathbf{U}' * \mathbf{U} = Id_r$, d.h. $\mathbf{U}$ repräsentiert ein Orthonormalsystem von r (reellen oder komplexen) Vektoren der Länge n. Man zeige, dass für beliebige linear unabh. Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ in $\mathbb{C}^r$ (also eine Matrix $\boldsymbol{A}$ vom Format $r \times s$ Matrix mit $s \leq r$) gilt: die beiden folgenden Operationen vertauschen: Anwendung von Gram-Schmidt auf die Folge $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ (also sozusagen im Koorinatenbereich) und dann Multiplikation (von links) mit U (d.h. Bildung der Vektoren), oder umgekehrt, Bilden der Linearkombination in $\mathbb{C}^n$ (also der Matrix $\mathbf{U} * \boldsymbol{A}$), welche s (!linear unabh.) Vektoren im $\mathbb{C}^n$ repräsentiert, und dann die Anwendung von Gram-Schmidt im $\mathbb{C}^n$, und verwende (begründe) die Formel

$$\langle \mathbf{U} * \vec{\mathbf{x}}, \mathbf{U} * \vec{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{C}^r} \quad \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^r. \tag{27}$$

NEW MATERIAL as of 4.4.2011

107. Man zeige, dass sich die Determinante einer Matrix auch durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens bestimmt werden kann, indem auf das Normieren der jeweils neuen Orthogonal-Vektoren verzichtet, also jeweils nur den nächsten Basis-Vektor auf das lineare Erzeugnis der davorgehenden Vektoren projeziert und den Rest, d.h. den orthogonalen Anteil bewahrt. Dann ist das Produkt der Diagonal-Element genau die Determinante. Damit ist aber auch klar, dass man auf dies Weise Volumsberechnungen macht.

108. Man verifiziere anhand einfacher Bespiele, dass die Determinante einer Vandermonde-Matrix mit drei äquidistanten Punkten von Null verschieden ist, aber unabhängig von den konkreten Werten, beispielsweise $\vec{\mathbf{a}} = [1, 2, 3]$ oder $\vec{\mathbf{b}} = [-1, 0, 1]$, oder $\vec{\mathbf{c}} = [2, 3, 4]$.

    Zusatzaufgabe: was ändert sich, wenn der Abstand um einen Faktor (z.B. um den Faktor 2) vergrößert wird, also z.B. für $\vec{\mathbf{z}} = [-2, 0, 2]$?

109. Man berechne die Vandermonde-Matrix zur Folge $\vec{\mathbf{d}} = [-1, 0, 1, 2]$ (Anmerkung: auch hier gilt, dass sie gleich ist der von $\vec{\mathbf{d}} = [x, x+1, x+2, x+3]$, für beliebiges $x \in \mathbb{R}$). (Kontrolle: Die Determinante sollte 12 sein).

110. Man diagonalisiere die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \tag{28}$$

    Als Basis für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ kann man die Vektoren $\vec{\mathbf{v}}_1 = [0, 1, 1]'$ bzw. $\vec{\mathbf{v}}_2 = [1, 2, 1]'$ gewählt werden. Man bestimme alle fehlenden Informationen (also z.B. λ_3, etc., um festzustellen, dass sich $\boldsymbol{A}$ als $\mathbf{V}^{-1} * \boldsymbol{A} * \mathbf{V}$ auf Diagonalgestalt bringen lässt. Wie sieht die Diagonalmatrix aus, bzw. wie das charakteristische Polynom.

111. Beispiel zum Thema “Minimal Norm Least Squares Problem”: Man finde die Projektion des Vektors $[3, 0, 3]$ auf den Zeilenraum der Matrix (in Beispiel 58).

Neues Material ab 26.4.2011

112. Es sei $\vec{\mathbf{p}} = [2; 2; 1]$ ein Normalvektor zu einer Ebene im $\mathbb{R}^3$. Man stelle die Matrix auf, welche die Spiegelung an der zugehörigen Ebene (welche also durch die Gleichung $2x + 2y + z = 0$ gegeben ist) in Standardkoordinaten beschreibt. Weiters bestimme man die Eigenräume und Eigenwerte dieser Matrix (Vielfachheiten, Orthonormalbasen, etc.).

113. Man beschreibe geometrisch die Spiegelung in der Ebene an der Geraden $3x+4y = 14$ und versuche sie als *affine Abbildung* (d.h. einer linearen Abbildung + einer Vektoraddition) zu beschreiben, d.h. als Abbidlung von der Form $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \boldsymbol{A} * \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{v}}_0$, für eine passend gewählte 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ und festen Vektor $\vec{\mathbf{v}}_0 \in \mathbb{R}^2$. Hinweis: Man behandle zuerst den Fall der parallelen Geraden durch $\vec{\mathbf{0}}$, die durch $3x + 4y = 0$ gegeben ist.

114. Es sei $\boldsymbol{A}$ eine beliebige komplexe, normale $n \times n$-Matrix. Man zeige, dass dann die Einschränkung der linearen Abbildung $T : \mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{A} * \mathbf{x}$ auf den Spaltenraum denselben invariant läßt (!Begründung?). Man kann also die Einschränkung $\tilde{T} : Sp(\boldsymbol{A}) \to Sp(\boldsymbol{A})$ durch Wahl einer **orthonormalen** Basis $\tilde{\mathscr{B}}$ für $Sp(\boldsymbol{A})$ wieder durch eine (nun kleinere) Matrix darstellen, nennen wir sie $\tilde{\boldsymbol{A}}$. Im Sinne der üblichen Terminologie hätten wir also

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\tilde{T}]_{\tilde{\mathscr{B}} \leftarrow \tilde{\mathscr{B}}}.$$

Man verifiziere, dass dann auch die Matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ normal ist.

115. Man begründe,

- warum das charakteristische Polynom $\tilde{p}(t)$ zu $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ nicht von der Wahl der Orthonormalbasis für $Sp(\boldsymbol{A})$ abhängt
- dass es keine Nullstelle bei $t = 0$ hat;
- und dass man das char. Polynom zu $\boldsymbol{A}$ in folgender Form schreiben kann: $p(t) = t^k \cdot \tilde{p}(t)$ schreiben kann, für passendes $k > 0$.

116. Man bestimme für die Standard-Matrix $\boldsymbol{A}$ (Beispiel 58) eine Orthonormalbasis für den Spaltenraum $Sp(\boldsymbol{A})$. Obwohl die Matrix nicht normal ist, läßt sich die obige Überlegung anwenden, weil der Zeilenraum (aus anderen Gründen) mit dem Spaltenraum übereinstimmt. Diese Orthonormalbasis (bestehend aus 2 Vektoren im $\mathbb{R}^3$, und ich erwarte, dass es möglichst viele verschiedene Orthonormalbasen gibt) soll dann benutzt werden, um die im vorhergehenden Beispiel genannte 2×2-Matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ zu definieren. Man zeige (am jeweils konkreten Bespiel), dass $\tilde{\boldsymbol{A}}$ invertierbar ist.

117. Man studiere die reellen Matrizen $\boldsymbol{B}$ von der Form

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

wobei $r \in \mathbb{R}$ beliebig, fix sei, und zeige: Diese (speziellen) Matrizen sind genau dann normal (d.h. $\boldsymbol{B} * \boldsymbol{B}^t = \boldsymbol{B}^t * \boldsymbol{B}$) genau dann wenn sie unitär sind. Weiters charakterisiere man die Werte von r für welche die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ reell sind.

118. Die Drehmatrizen in der Ebene bilden eine kommutierende Familie von Matrizen, d.h. je zwei Drehmatrizen vertauschen (das Produkt ist einfach die Drehung um die Summe der beiden Drehwinkel, unter Berücksichtigung der Vorzeichen). Man stelle experimentell fest (indem man zwei nicht-triviale, und nicht zueinander inverse Drehwinkel wählt), also durch Lösen des Eigenwertproblems, dass de zugehörigen (komplexen!) Eigenvektoren dieselben sind!

119. Man bestimme die Diagonalisierung (über dem Körper $\mathbb{R}$) der folgenden Matrix (d.h. Eigenvektoren und Eigenwerte):

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

120. Man bestimme die Diagonalisierung (über dem Körper $\mathbb{C}$) der folgenden Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} \tag{31}$$

121. Man finde für folgende lineare Abbildung T auf $\boldsymbol{V} = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ eine Basis von Eigenvektoren:

$$T(p(t)) = tp'(t) + p(2)t + p(3). \tag{32}$$

Ist T invertierbar?

122. (Rechnen mit Block-Diagonalmatrizen) Es sei $\boldsymbol{B}$ die Matrix zu Beispiel 119, und $\mathbf{BB}$ eine daraus abgeleitete Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Man zeige, dass für jede Potenz $k \geq 0$ gilt (ja sogar für negative Potenzen, weil $\boldsymbol{B}$ invertierbar ist), dass "blockweise" potenziert wird:

$$\mathbf{BB}^k = [\boldsymbol{B}^k, \mathbf{0}; \mathbf{0}, \boldsymbol{B}^k]. \tag{34}$$

Insbesondere gilt für das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{B}$, nennen wir es $p_{\boldsymbol{B}}(t)$:

$$p_{\boldsymbol{B}}(\mathbf{BB}) = \mathbf{0}.$$

Daraus folgt, dass das Minimalpolynom zu $\mathbf{BB}$ das Polynom $p_{\boldsymbol{B}}(t)$ teilt.

123. Man verwende die Methode der Normalgleichungen, um die Ausgleichsgerade zu folgender einfach Datenfolge zu bestimmen: $x_k = k - 2$, mit $1 \leq k \leq 5$, und $y_1 = 2$, $y_2 = 3.1$, $y_3 = 3.9$, $y_4 = 5.1$, $y_5 = 6$. Eventuell mache man eine Skizze.

124. (*) [kann bei Zeitknappheit auch ausgelassen werden, wird eventuell auch noch in der Vorlesung diskutiert]
Die sogenannte *Begleitmatrix* kann verwendet werden, um zu zeigen, dass jedes Polynom auch das charakteristische Polynom von (vielen, aber insbesondere bestimmten, einfachen) Matrizen ist. Ohne Beschränkung kann man sich bei der Diskussion auf Polynome mit führendem Koeffizienten 1 beschränken. Zum Einüben der Lage (der Beweis erfolgt durch Induktion, auch im allgemeinen Fall): $p(t) = t^2 + 2t + 3$ und

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$p(t) =$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

und schliesslich $p(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$ (also `compan(1:5)`):

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Die richtige Betrachtungsweise ist die Interpretation der jeweils größeren Matrix als Blockmatrix, wobei die letzte Zeile und letzte Spalte hinzugefügt werden. Die Rekursion sieht auf der Ebene der Polynome also so aus, dass

$$p(t) = (t^3 + 2t^2 + 3t + 4) \cdot t + 5$$

anzuwenden ist. Man muß also $\det(\lambda Id - \boldsymbol{C})$ unter dem Gesichtspunkt betrachten.

125. Man bestimme das charakteristische Polynom und alle Eigenwert bzw. Eigenvektoren zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Hinweis: Einer der Eigenwerte ist $\lambda = 1$. Ist die Matrix auch positiv definit? Sind die Eigenvektoren zueinander orthogonal?

126. Man zeige, dass eine reelle $n \times n$- Matrix welche Längen erhält, auch Skalarprodukte und daher auch Winkel beibehält, als eine orthogonale (d.h. unitäre) Matrix ist. Für den Beweis zeige man zuerst die folgende (Polarisierungs-) Identität, die für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2. \tag{39}$$

127. Das Produkt von zwei hermiteschen Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ist genau dann wieder hermitesch, wenn $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{B}$ vertauscht, wenn also $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} * \boldsymbol{A}$ gilt.

128. Ist die lineare Abbildung

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -7x_1 - 10x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}\right) \tag{40}$$

diagonalisierbar? Anders gefragt, man stelle fest ob es im $\mathbb{R}^2$ eine Basis von Eigenvektoren zu der entsprechenden linearen Transformation gibt.

129. (eine geometrische Aufgabe) Man bestimme die Ebene, in der eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ als Mercedes-Stern (unter der orthog. Proj.) erscheint.

130. Man betrachte die unsymmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = [0,2;0,0]$ und bestimme deren Operatornorm (d.h. den größten Singulärwert) und untersuche, ob ein Einheitsvektor, der Gleichheit in der Gleichung

$$\|\boldsymbol{A} * \mathbf{x}\| = |||\boldsymbol{A}||| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

erfüllt, kein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ ist.

131. Man zeige, dass die Konditionszahl von $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ (zwei invertierbare $n \times n$-Matrizen) durch das Produkt der Konditionszahlen von der beiden Faktoren kontrolliert wird.

132. Es sei $\boldsymbol{V} = \mathscr{M}_{2\times 2}$ and

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{41}$$

Man bestimme (wenn möglich!?) ein Basis von Eigenvektoren und zugehörigen Eigenvektoren (es gibt genau zwei verschiedene Eigenvektoren). Beachte, da der Raum aus Matrizen besteht, könnte man von *Eigenmatrizen* sprechen.

133. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

134. Man zeige, dass das Bild einer (absolut) konvexen Menge wieder (absolut) konvex ist. Insbesondere zeige man, dass das Bild der (vollen) Einheitskugel unter einer linearen Abbildung eine Ellipse im Bildbereich ist, bzw. ein entsprechend verallgemeinertes Ellipsoid in höheren Dimensionen.

135. Betrachtungen und Beispiele von Kegelschnitten: Man suche Material (z.B. aus den eigenen Schulbüchern) zum Thema Kegelschnitte (insbes. Eigenschaften von Hyperbeln, Parabeln und Ellipsen), wie etwas Brennpunkt und deren Eigenschaften. Insbesondere für den Fall des $\mathbb{R}^d$ mit $d = 2$ bzw. $d = 3$.

136. Man zeige, dass das Bild eines Kegelschnittes unter einer invertierenbaren linearen Abbildung wieder ein gleichartiger Kegelschnitt ist.

137. Man zeige, dass der (schräge) Schatten einer Ellipse im Raum (d.h. einer Ellipse in einer Ebene im $\mathbb{R}^3$) auf einer anderen Eben wieder eine Ellipse ist (der Fall einer entarteten Ellipse mit $b = 0$ ist nicht ausgeschlossen).

138. Man zeige, dass der Durchschnitt eines Ellipsoides im $\mathbb{R}^3$ mit einer (affinen) Ebene im Raum (falls er nichtleer ist) eine Ellipse in der Schnitt-Ebene ist. Man beschreibe eine Strategie, um die Brennpunkte dieser Schnitt-Ellipse (in der affinen Ebene) zu bestimmen.

139. Es sei ein Ellipsoid in Standardlage im $\mathbb{R}^3$ gegeben, also

$$M = \{\mathbf{x} \mid \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1\}$$

und die Gleichung der Schnitt-Ellipse in den Koordinaten der Schnitt-Ebene. Kann man aus einem solchen Schnitt das Ellipsoid eindeutig bestimmen (soferne die Schnittmenge nicht leer ist)?

[unverbindliche Ergänzung]: Man diskutiere den Fall der allgemeinen Lage, und zwar einerseits den Fall eines lediglich verschobenen Ellipsoides: genügen zwei Schnitte mit zwei verschiedenen Ebenen?? (und dann noch dann Fall er allgemeinen Lage.

140. 140: korrigierte Fassung vom 8.6.2011
Man zeige, dass es zu je zwei *(vom Ursprung verschiedenen!)* Punkten P_1, P_2 im $\mathbb{R}^3$ (die also gemeinsam mit dem Null-Punkt $\mathbf{0}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ aufspannen) eine (fast) eindeutig bestimmte unitäre (d.h. also orthogonale) Matrix gibt, die diese beiden Punkte "in die $x - y$-Eben abbilden, *und zwar so, dass der erste Punkt auf die $x-$Achse abgebildet wird.*

Anmerkung: eine solche Abbildung ist beispielsweise von Interesse, wenn es darum geht, eine in einer Ebene liegende Ellipse in der Bild- bzw. Tafelebene darzustellen. Umgekehrt ist die inverse unitäre Abbildung geeignet, eine in der Ebene realisierte Konstruktion wieder zurück in die Ebene zu transportieren *(beispielsweise Tangentenbildung, etc.)*

141. Es sei auf dem Vektorraum $\boldsymbol{V} = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ die Bilinearform

$$(p(x), q(x))) \mapsto \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

gegeben. Man zeige, dass dies eine Bilinearform ist, bestimme deren Matrix-Darstellung bzgl. der Standard Monomial-Basis $\{t^2, t, 1\}$, und leite daraus die Eigenschaften her (Symmetrie?, ist die zugehörige quadratische Form positiv definit?).

142. (einfach, kann ausgelassen werden) Man zeige, dass für jede bilineare Abbildung $H : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ gilt

$$H(x + y, z + w) = H(x, z) + \dots \tag{43}$$

143. Wenn H bilinear ist auf $\boldsymbol{V}$, und $\boldsymbol{W}$ ein Teilraum ist, dann ist auch die Einschränkung auf $\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ bilinear. Ist die zugehörige quadratische Form positiv definit, so auch ihre Einschränkung.

144. Eine bilineare Abbildung der Form $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ hat in Bezug auf die Standard Basis im $\mathbb{R}^2$ einfach die Matrix $[a, b; c, d]$ (also erste Spalte $[a; c]$ und zweite Spalte $[b; d]$).

145. Zwei $n \times n$-Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ heissen kongruent, wenn es eine invertierbare Matrix $\mathbf{Q}$ gibt mit $\mathbf{Q}^t \boldsymbol{A} \mathbf{Q} = \boldsymbol{B}$. Man zeige, dass dies eine Äquivalenz-Relation ist, und dass die Bilder des Einheitskreises unter äquivalenten Matrizen dieselben Ellipsoide (nur mit anderer Parametrisierung) sind.

146. (Auffrischung) Man beschreibe die Matrix, welche die Spiegelung an der durch die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ definierten Ebene beschreibt (möglichst auf verschiedene Arten, z.B. mit Basiswechsel).

147. Man zeige, dass zwei affine Abbildungen genau dann gleich sind, wenn die entsprechenden Ingredienzien (Verschiebungsparameter und Matrix) gleich sind. Weiters schreibe man $f(v) = v_0 + T(v)$ alternativ in der Form $f(v) = T_1(v + w_0)$, für passende lineare Abbildunge T bzw. T_1.

148. Man zeige, dass in der Ebene jede quadratische Form, also jeder der Ausdrücke $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ durch eine Streckung, gefolgt von einer Drehung um einen Winkel $\theta \in [0, 90]^\circ$ beschrieben werden kann (richtige Numerierung der Eigenvektoren zur Matrix $\boldsymbol{A} = [a, b; b, c]$ führt zum Ziel).

149. Man bestimme die Singulär-Werte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

[jedenfalls einen genauen Ablauf der nötigen Schritte, so als würde man die SVD von Hand programmieren müssen].

150. Man bestimme für den Vektor $\mathbf{b} = [2, 1]$ verschiedene Darstellungs-Möglichkeiten mit Hilfe der Spalten von $\boldsymbol{A}$ im vorigen Beispiel, also $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$ und untersuche die Länge dieser Vektoren.

151. Es sei $\boldsymbol{B}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Man bestimme die Peudo-Inverse dieser Matrix. Was ist die "billigste" Darstellung eines Vektors $\mathbf{x} = [x; y] \in \mathbb{R}^2$? durch die Spalten dieser Matrix (im MNLSQ-Sinne)? Man leite daraus eine Vermutung ab, wenn die Spalten einer "breite" Matrix mehrere Kopien eines (oder verschiedener!?) Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^n$ sind? (solche Fragen werden in der Theorie der "Frames" diskutiert).

152. Man wähle als affine Basis (d.h. Koordinatensystem in der Ebene) drei Punkte eines auf der $x-$Achse stehenden, gleichseitigen Dreieckes, also wie üblich A, B, C, und bestimme dann in diesem Koordinatensystem die Gleichung des Umkreises (bzw. des Inkreises) für das Dreieck. [d.h. man verwende für $\mathbb{R}^2$ die Basis-Vektoren AB bzw. AC, um die beiden Kreise zu beschreiben.

153. Man zeige, dass die Abbildung, welche jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ auf seine Bestapproximation in einer (affinen) Ebene im $\mathbb{R}^3$ abbildet, eine *affine Abbildung* auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Das Bild dieser Abbildung ist natürlich genau die affine Ebene.

     Wie könnte eine entsprechende allgemeinere Aussage aussehen?

154. Gegeben seine 2 (verschiedene) affine Basen in einem $k-$-dimensionalen Teilraum A des $\mathbb{R}^n$ gegeben (auch der Fall $k = n$ ist durchaus möglich/sinnvoll), d.h. es seien $P_0, \ldots, P_k$ in einer (affinen) Ebene geben, und ebenso $Q_0, \ldots, Q_k$, die ebenfalls den gleichen affinen Teilraum aufspannen. Dann ist jeder Punkt A sowohl in der Form der (affinen) P-Koordinaten bzw. der Q-Koordinaten darstellbar (jeweils im $\mathbb{R}^k$). Man zeige, dass die Abbildung, welche diese beiden Koordinaten aufeinander abbildet einen affinen Isomorphismus von $\mathbb{R}^k$ in sich selbst darstellt.

155. Man zeige, dass die Menge der *invertierbaren affinen Abbildungen* von $\mathbb{R}^n$ in sich ein (nicht-kommutative) Gruppe bilden.

156.

Schon in der Vorlesung gemacht: Es sei $H(x, y)$ eine symmetrische Bilinearform auf $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ und $K(x) := H(x, x)$ für alle $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$. Dann ist H eindeutig aus K rekonstruierbar, wegen der Relation

$$H(x, y) = \frac{1}{2}[K(x + y) - K(x) - K(y)]. \tag{46}$$

CHALLENGE (vielleicht f.d. Tutorium): Gegeben zwei beliebige *linear unabhängige* Vektoren im $\mathbb{R}^3$, sagen wir in Form einer 2×3-Matrix. Ist es dann immer möglich (und wenn ja, ist es auf eindeutige Art möglich) diese Martrix zu einer reellen 3×3-Matrix so zu ergänzen, dass man in eine Lage, vergleichbar zur "Lieblingsmatrix" kommt, d.h. so, dass der Zeilenraum der erweiterten Matrix gleich dem Spaltenraum der erweiterten Matrix ist, und zwar so, dass beide zwei-dimensional sind!?? Kann man sich womöglich auch noch wünschen, dass die erweiterte Matrix *normal* ist??

Für die (hand)schriftliche Präsentation einer einigermassen vollständigen Antwort möchte ich gerne (nach Rücksprache mit den Übungsleitern) Sonderpunkte vergeben (hgfei).

Extra Material:

- Gegeben zwei Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{y}_1$ in $\mathbb{C}^3$, beide vom Nullvektor verschieden. Man bestimme die Menge aller unitären Matrizen, welche $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{y}_1$ überführen. Weiters überlege man, unter welchen Bedingungen diese Menge eine Gruppe (bzgl. Matrix-Multiplikation) ist.

- Man zeige, dass die Menge aller reellen 3×3-Matrizen, welche $\mathbb{Z}^3$ in sich überführen, abgeschlossen gegenüber Matrix-Multiplikation ist, und dass diese Matrizen ganzzahlige Determinanten haben.

- Man zeige, dass die "faire" (Loewdin) Orthonormalisierung im Falle von gleich langen Vektoren gerade die "Gegenkraft" beschreibt (Mittelschule, Stoff der 5-ten Klasse).

- Gegeben ein Frame (Erzeugendensystem). Dann ist das jeweils auch das orthogonale Projektionsbild einer Orthonormalbasis eines höherdim. ONS (es gibt viele Möglichkeiten), die Minimalzahl ist die Anzahl der Vektoren, die verwendet werden. Es liegt nahe zu vermuten, dass das Ergaenzen, dann Loewdin, dann zurückprojizieren äquivalent zur Bestimmung des canonical tight frames ist.... Insbesondere ist jeder tight frame der canonical tight frame zu einem System... (notfalls er selber, aber das ist nicht befriedigend!)

- Man zeige, dass die übliche euklidische Norm die Dreiecksungleichung erfüllt, ebenso die alternativen Normen, wie $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ oder $|\mathbf{x}\|_\infty = max_k |x_k|$. Zu jeder dieser Normen (= Größenmessung von Vektoren) gibt es auch eine entsprechende Matrixnorm.

- Man bestimme die Matrixnorm einer 3×3-Matrix bezglich der $\| \cdot \|_\infty$-Norm.