PS Lineare Algebra 1 M. Dörfler WS 2003/2004,
Übungen für den 27.1.2004

1. Matrixnorm:
   Beweise, dass für beliebige Matrizen gleicher Dimension gilt: $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$.

2. Zeige, dass für jeden Eigenwert λ der $n \times n$- Matrix A gilt: $|\lambda| \leq \|A\|$.

3. Zeige, dass A und A^{-1} dieselbe Konditionszahl haben und dass A und A^T dieselbe Norm haben!

4. Schätze die Konditionszahl der folgenden Matrix A ab. Wie würdest Du diese beurteilen? $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$.

5. Berechne $b - Ay$ und $b - Az$ für

   $$b = \begin{pmatrix} .217 \\ .254 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} .78 & .563 \\ .913 & .659 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} .341 \\ -.087 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} .999 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Ist y eine bessere Lösung der Gleichung $Ax = b$ als z? Vergleiche dazu das Residuum $b - Ay$ mit $b - Az$ und vergleiche y und z mit der richtigen Lösung $x = (1, -1)$.

6. Berechne die Determinante und die Inverse der Matrix A aus dem letzten Beispiel! Berechne (oder schätze ab!)$\|A\|$ und $||A^{+1}||$ und zeige dass für die Konditionszahl c gilt: $c > 10^6$.

7. Beweise für die ℓ^1-Norm und die ℓ^∞-Norm von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

   $$||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1.$$

   Zeige weiters, dass $||\mathbf{x}||_2/||\mathbf{x}||_\infty \leq \sqrt{n}$ und $||\mathbf{x}||_1/||\mathbf{x}||_2 \leq \sqrt{n}$. Für welchen Vektor gilt Gleichheti?

8. Diagonaldominate Matrizen sind diejenigen, deren Diagonaleinträge a_{ii} alle grösser sind als die Summe der Absolutbeträge der restlichen Einträge in Zeile i. Zeige mithilfe der Gerschgorin-Kreise, dass diagonaldominate Matrizen invertierbar sind und gib ein 3×3-Beispiel an!

9. Schöne Ferien!!