PS Lineare Algebra 1 M. Dörfler WS 2003/2004,
Übungen für den 9.12.2003

1. Bestimme für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Singulärwerte und die Matrizen U und V in der Zerlegung $A = U\Sigma V^T$.

2. Bestimme die Pseudoinverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Bestimme die Matrix P zur Projektion auf die Gerade $y = -x$. Finde, möglichst "ohne zu rechnen", ihre Eigenwerte und eine Basis von Eigenvektoren sowie die daraus resultierende Faktorisierung $P = QDQ^{-1}$.

4. Es sei U ein endlichdimensionaler Teilraum eines euklidischenVektorraumes V. Bestimme die Eigenwerte der orthogonalen Projektion $P_U : V \mapsto U$. Beachte die Sonderfälle $U = V$ und $U = \{0\}$.

5. $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ seien Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^n$. Bestimme die Matrix $\mathbf{A}$, die für alle j, v_j in u_j überführt, i.e., $Cv_j = u_j \; \forall j = 1, \ldots, n$.

6. Konstruiere eine Matrix $\mathbf{A}$ mit Rang 1, die für den Vektor $v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Produkt $\mathbf{A}v = 9u$ mit $u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liefert!

7. Es sei A eine $m \times n$-Matrix, r bezeichne ihren Rang. Erkläre, warum im Fall $r = n$ die Matrix $C = (A'A)^{-1}A'$ ("*Linksinverse*", $CA = I$) und im Fall $r = m$ die Matrix $B = A'(AA')^{-1}$ ("*Rechtsinverse*", $AB = I$) die Pseudoinverse A^+ von A ist. Bestimme für die folgenden Matrizen B und C wo das möglich ist und A^+ für alle drei:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$
(Hinweis: dieses Beispiel dient vor allem dazu, sich noch einmal die vier zu einer Matrix gehörigen Unterräume in Zusammenhang mit der Pseudoinversen genau vor Augen zu führen!)

8. Gegeben sind die Vektoren $v1 = \begin{pmatrix} \sqrt{(3)} \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{(3)} \end{pmatrix}$. Berechne mithilfe der Grammatrix die zugehörige Orthonormalbasis!

9. $v1$ ist wie in Aufgabe 3, $v2$ soll jedoch durch einen Faktor λ gestreckt werden. Berechne zunächst für allgemeines λ die resultierende Orthonormalbasis und betrachte dann das Ergebnis für verschiedene konkrete Werte.

10. Zeige, evtl. anhand eines Beispiels, dass das Produkt zirkulanter Matrizen wieder zirkulant ist. Dieses Produkt lässt sich anhand der diskreten Fourier Transformation realisieren, indem man das Produkt der Fouriertransformationen der erzeugenden Vektoren multipliziert. Zeige, dass das Ergebnis unabhängig davon ist, ob man die erste Zeile oder die erste Spalte als erzeugenden Vektor betrachtet.