PS Lineare Algebra 1 M. Dörfler WS 2003/2004, **Übungen für den 20.1.2004**

1. Bestimme die Matrix zur linearen Abbildung, die aus einer Streckung der x-Achse um den Faktor 2 und einer Stauchung der y-Achse um denselben Faktor und einer anschliessenden Drehung um 45° im Uhrzeigersinn besteht. Berechne dann ihre Polarzerlegung!

2. Es sei $V = \mathcal{P}_2(x)$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad 2, W dessen Teilraum, der aus allen Polynomen mit $p(3) = 0$ besteht. Bestimme die Dimension des Quotienten V/W. Wie sehen die Elemente in diesem Raum aus?

3. Es werde W_1 von den ersten beiden Einheitsvektoren in $V = \mathbb{R}^3$ aufgespannt. W_2 sei ein eindim-Raum, aufgespannt von v_0. Zeige, dass $V/W_1 \cong W_2$. Für welche Richtungen v_0 ist dieser Isomorphismus auf natürliche Art moeglich ist und wann gibt es Probleme?

4. Bestimme die Rotation $x = Px'$, die die gemischten Terme eliminiert, beschreibe die Quadrik und gib ihre Gleichung im $x'y'z'$-System an!

$$2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$$

5. Bringe die folgenden Quadriken durch Hauptachsentransformation und Translation in Standardlage und beschreibe die Fläche!

$$7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x - 12y + 60z = 24$$

$$2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$$

6. Die Matrix A habe die Einträge (a_{ij}). Zeige, dass für alle Eigenwerte λ gilt, dass $|\lambda| < 1$, falls die Summe der Beträge $|a_{ij}|$ in jeder Zeile kleiner als 1 ist.
Jeder Eigenwert von A liegt in einem Kreis, dessen Mittelpunkt ein Diagonalintrag a_{ii} und dessen Radius $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ist. (Ist $|x_i|$ grösser als die anderen Komponenten von x, so hat diese Summe höchstens den Wert $r_i|x_i|$, sodass die Division durch $|x_i|$ liefert: $|\lambda - a_{ii}| \leq r_i$). Diese Kreise heissen Gerschgorin-Kreise.

7. Welche Schranke für $|\lambda|_{max}$ liefert die vorige Aufgabe für die folgenden Matrizen? Welche 3 Gerschgorin-Kreise enthalten alle Eigenwerte?

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 02 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$