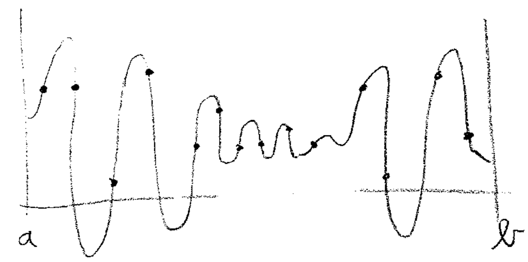
12.01.09

SPLINE - Interpolation

Problem

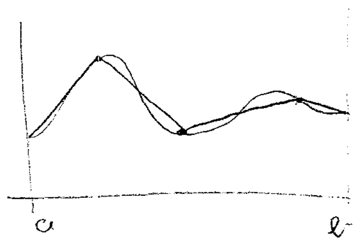
Seien $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ und $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ gegeben

=> Interpolationspolynom kann stark oszillieren (große Schwankungen)



Idee verwende Polynome mit geringeren Grad stückweise auf den Intervall $[a,b]$.

z.B. stückweise lineare Interpolation (d.h. Polygonzug)



Vorteil: geringe Schwankungen

Nachteil: keine Diff.barkeit auf $[a,b]$

Lösung Geringe Schwankungen + Diff.barkeit (2 mal) auf $[a,b]$ durch (kubische) Splines (3. Ordnung)

Methode Teile Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ und interpoliere eine gegebene Funktion f auf jedem Teilintervall durch ein Polynom 3. Grades.

FR76

Definition (kubische Splines)

Sei f auf dem Intervall $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ definiert. Dann versteht man unter dem kubischen Spline S von f eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1) S ist auf jedem Teilintervall ein kubisches Polynom, d.h.

$$S_j := S|_{[x_j, x_{j+1}]} \quad \text{mit} \quad \text{grad } S_j \leq 3 \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1$$

Bem: $S = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$

(2) $S_j(x_j) = f(x_j) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n$ "INTERPOLATION".

(3) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1$ "stetiger Übergang"

$S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ "gleiche Steigung"

$S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ "gleiche Krümmung"

damit eindeutig:

(4) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ "freier oder natürlicher Spline"

(interessant für z.B. 2-dim Splines → Enden können "zusammengefügt" werden)

⊛ Anmerkung: S_j, S_{j+1} => 8 Variable, durch Bed. jeweils 3 gleich => 2 „freie" Var. ≙ c (2)

zur Konstruktion

setze $S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3 \quad \forall j = 0,1,\dots,n$

⊛

setze $\underline{h_j} := x_{j+1} - x_j$ -- bekannt

aus Eigenschaft (2) => $\underline{a_j} = f(x_j) = S_j(x_j)$ bekannt

Durch Bed. (1)-(4) und geeignetes Einsetzen/Umformen erhält man folgendes Glgssys:

(G)

$$\boxed{h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1}+h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1}-a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad \forall j = 1,2,\dots,n-1}$$

und Formeln für $b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1}-a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$

$d_j = \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j)$

=> (G) ist Glg.sys mit $(n+1)$ Unbekannten $c_0, c_1, \dots, c_n$

d.h.: falls $c_0, c_1, \dots, c_n$ aus (G) (eindeutig) berechenbar sind

=> $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ (eind.) berechenbar

=> Spline S (eind.) berechenbar, falls (G) eind. lösbar.

Bem: durch Eigenschaft (4) => $S_0''(x) = 2c_0 = 0$ => $\underline{c_0 = 0}$ analog: $\underline{c_n = 0}$

Satz:

Sei f auf $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ definiert. Dann gilt:

∃! freier Spline.

Beweisidee

schreibe (4) als Matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3-a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

das Glg.-sys. $A \cdot x = b$ ist eind. lösbar $\Leftrightarrow$ A ist regulär, d.h. $\exists A^{-1}$
$\Leftrightarrow \det A \neq 0$
$\Leftrightarrow$ ~~rg. A~~ $\operatorname{rang} A = n+1$ (für $(n+1)\times(n+1)$-Matrix)

Unsere Matrix A ist regulär, weil sie streng diagonaldominant ist,

d.h. $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

$\Rightarrow$ Spline S existiert eindeutig

Bem: bisher haben wir mit Standard-Basis $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ gearbeitet. Können Basis aber frei wählen, d.h. in Praxis verwendet man eine Basis, durch die das Glg.-Sys. effizient lösbar wird (d.h. asympt. Rechenaufwand ist <u>nicht</u> kubisch mit Anzahl der Stützstellen.

Bsp. betrachten Spezialfall:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ sind äquidistant verteilt,

d.h. $x_{j+1} - x_j = h$

wähle:

x_j	0	1	2	3	4
$a_j = f(x_j)$	0	1	0	0	0

$\Rightarrow h = 1$

Zum Vergleich: mittels Newton-Interpolation erhält man

$$p_4(x) = 4x - \frac{13}{3}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 \qquad \cancel{x \in [0,}\ \ x \in [0,4]$$

Splineansatz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b_j = (a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1})$

$d_j = \frac{1}{3}(c_{j+1} - c_j)$

j	0	1	2	3	4
a_j	0	1	0	0	0
b_j	$\frac{45}{28}$	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{14}$	—
c_j	0	$-\frac{51}{28}$	$\frac{9}{7}$	$-\frac{9}{28}$	0
d_j	$-\frac{17}{28}$	$\frac{29}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{3}{28}$	—

$$\Rightarrow \quad S_0(x) = \frac{45}{28}x - \frac{17}{28}x^3$$

$$S_1(x) = -\frac{23}{14} + \frac{183}{28}x - \frac{69}{14}x^2 + \frac{29}{28}x^3$$

$$S_2(x) = \frac{153}{14} - \frac{345}{28}x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{15}{28}x^3$$

$$S_3(x) = -\frac{45}{7} + \frac{141}{28}x - \frac{9}{7}x^2 + \frac{3}{28}x^3$$

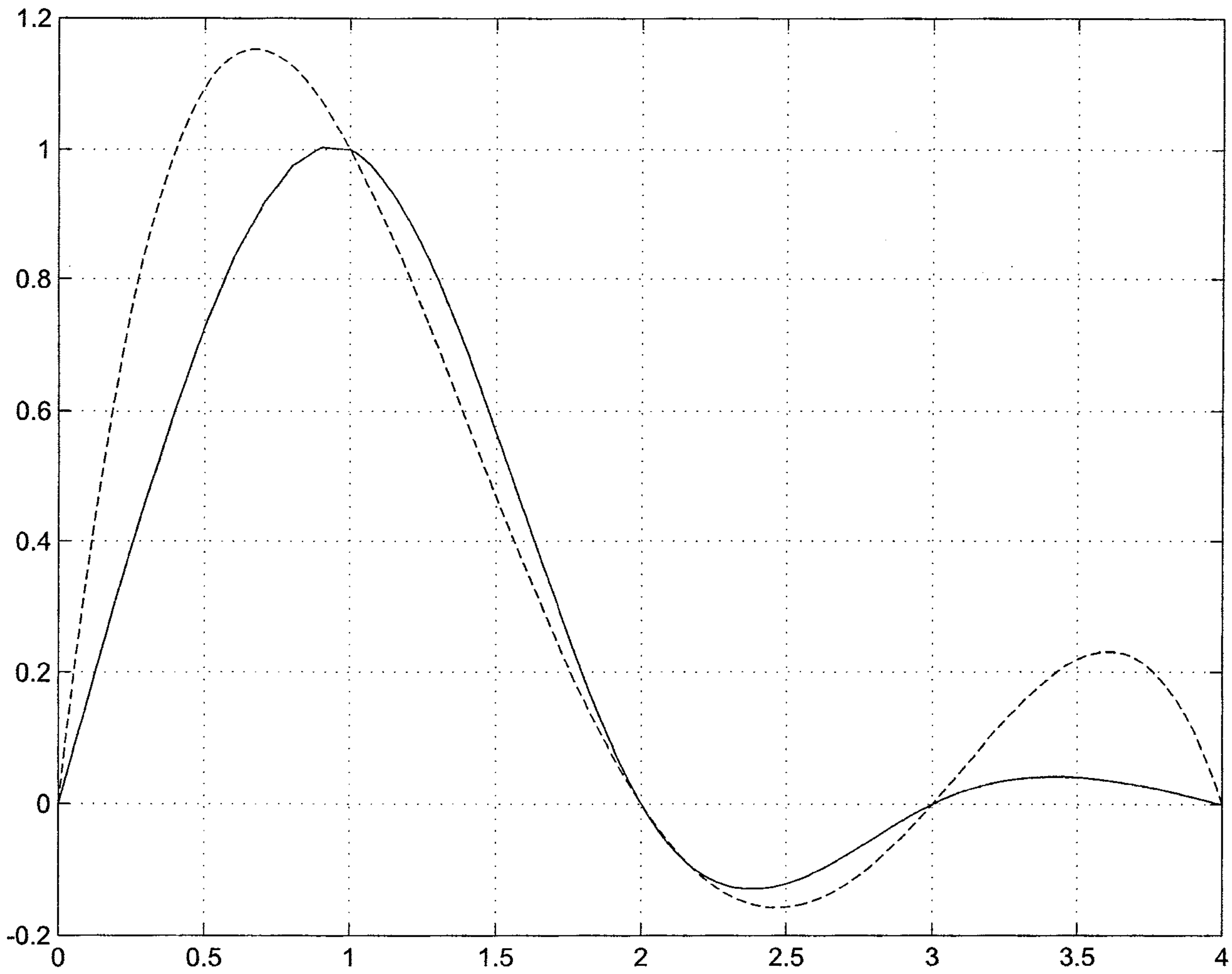
$$\Rightarrow \quad S(x) = \begin{cases} S_0(x) & , x \in [0,1] \\ S_1(x) & , x \in [1,2] \\ S_2(x) & , x \in [2,3] \\ S_3(x) & , x \in [3,4] \end{cases}$$

<u>Bemerkung</u>

Numerische Integration - Trapezformel

- verwandt zu Splines
- kann als lineare Spline - Interpolation verstanden werden
- Fläche von Trapezen entspricht Integral von Interpolationspolynom

Anmerkungen zu Linearität, ...



--- p_4 - Newton Interpolation

— S = Spline - Interpolation