

# Wavelets - Einführung

SIGRID  
HEIMEKEN

(1)

Ein zentrales Thema der Analysis ist die Approximation bzw. Darstellung von einer Funktion  $f$  mit Hilfe von speziellen Funktionen.

z.B. Taylorpolynom: Wenn  $f$  in einer Umgebung des Punktes  $a$  hinreichend oft differenzierbar ist, läßt sich  $f$  durch

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \underbrace{(t-a)^k}_{\text{Bildungsblöcke}}$$

mit kontrollierbarem Fehler approximieren.

Unter geeigneten Voraussetzungen stellt die Taylor-Reihe  $f$  tatsächlich dar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

Allgemein: Man wählt eine Familie  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  von Basisfunktionen  $t \rightarrow e_\alpha(t)$

Approximation:  $f(t) \approx \sum_{k=1}^N c_k e_{\alpha_k}(t)$

Darstellung:  $f(t) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha(t)$

Synthese:  $\{c_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow f(t) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha(t)$

Analyse:  $f \rightarrow \{c_\alpha\}_{\alpha \in I}$

# Fourier - Reihen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad 2\pi\text{-periodisch}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Fourier - Reihe

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{e^{ikt}}_{\text{Bildungsblöcke}}$$

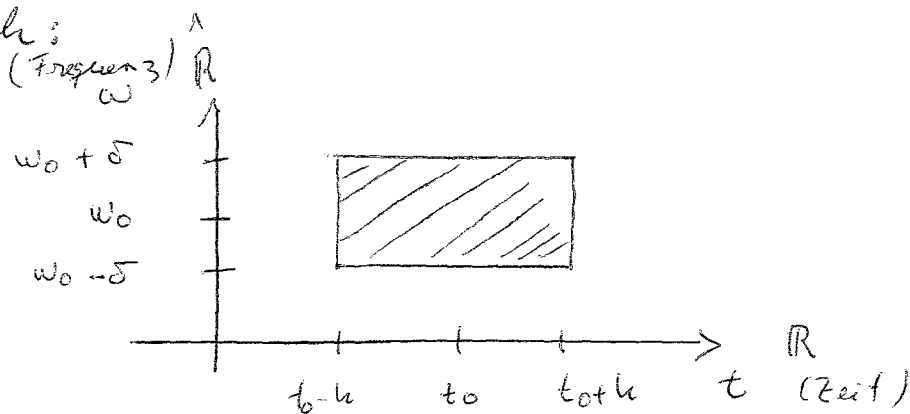
Fourier - Transformation:  $f \rightarrow \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikt} dt$$

Nachteil: Man kann aus den  $c_k$  nicht entnehmen, wo z.B.  $f$  einen Maximalwert oder eine Sprungstelle hat, Gibbs - Phänomen.

Bei einer Approximation einer Funktion mit Hilfe von Wavelets wird es eine bessere Lokalisierung geben.

Aber: Simultane Lokalisierung bezüglich  $t$  (Zeit) und  $\omega$  (Frequenz) in ein und demselben "Datenvektor" ist nicht, oder nur in ganz bestimmten Grenzen erhältlich:



# Gefensterte Fourier-Transformation (Gabor)

(2)

Fensterfunktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

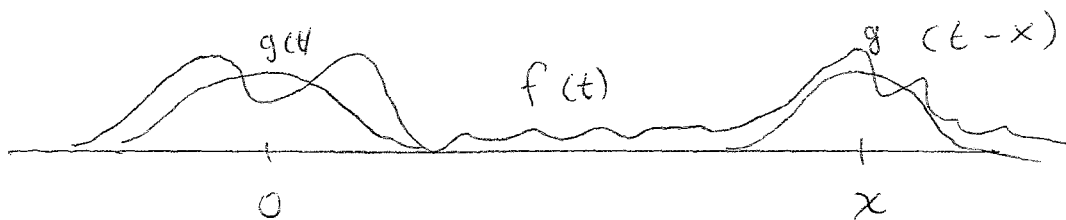
(sollte um  $t=0$  herum konzentriert sein,

z.B.  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ )

$x \in \mathbb{R}: g_x: t \rightarrow g(t-x)$

stellt das um  $x$  verschobene Fenster dar.

$$\mathcal{V}_g f(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t-x) e^{-i\omega t} dt$$



manchmal von Nachteil: die konstante Fensterbreite.

## Wavelet-Transformationen

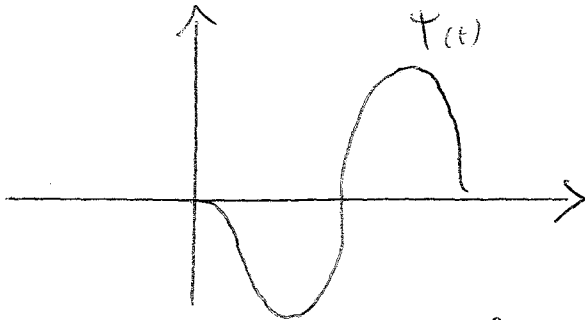
Wavelets sind relativ neue ( $\approx 1980$ ) Systeme von Basisfunktionen für die Darstellung, Filterung, Speicherung usw. von Signalen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

- $n=1$ , unabhängige Variable = Zeit (Zeitsignale)
- $n=2$  Bildverarbeitung (Wavelets sind besonders dafür geeignet).

Beispiel: Darstellung und Speicherung von Millionen von Fingerabdrücken.

Man wählt eine geeignete Wavelet, auch Mutter-Wavelet genannt.

$$t \rightarrow \psi(t)$$



Name leitet sich vom französischen "ondelette" ab (kleine Welle).

Morlet (Geophysik)

1988: Ingrid Daubechies: Wavelets mit kompakterem Träger.

Wir betrachten den Raum

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\|f\| = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

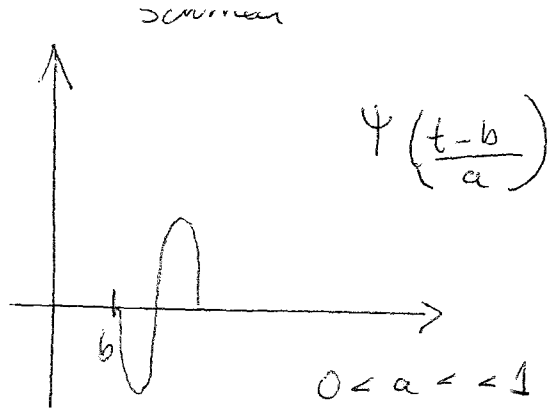
$\psi \in L^2(\mathbb{R})$  (wavelet). Wir erzeugen die Familie von Funktionen

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{|a|^{\frac{1}{2}}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

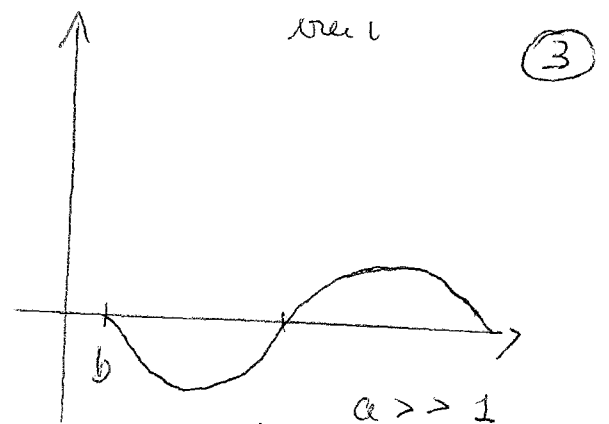
$a$  = Skalenparameter

$b$  = Verschiebungsparameter

Man streckt und verschiebt die Funktion.



dient zur Erfassung von kurzwelligen Schwingungsanteilen



dient zur Erfassung von langwelligen Schwingungsanteilen

Wavelet-Transformierte:

$$W_{\Psi} f(a, b) = \langle f, \Psi_{ab} \rangle = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Bedingung (Zulässigkeit):

$$C_{\Psi} = \int \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

Dann gilt auch die Umkehrformel.

$$f = \int Wf(a, b) \Psi_{ab} \frac{da}{a^2} db \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Discretisierungsproblem:

Unter den geeigneten Voraussetzungen, kann jede Funktion in  $L^2(\mathbb{R})$  mit Hilfe der Wavelet-Transformation zurückgewonnen werden (Umkehrformel). Das Discretisierungsproblem beschäftigt sich damit,

zu untersuchen, ob es eine diskrete Menge

$\mathcal{X} = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  gibt, so daß jede  $f \in L^2(\mathbb{R})$  anhand der Werte ihrer Transformation in  $\mathcal{X}$  wiedergewonnen werden kann.

$$\mathcal{X} = (a_k, b_k) \longrightarrow \left\{ Wf(a_k, b_k) \right\}_{(a_k, b_k) \in \mathcal{X}}$$

Ziel:  $\{(a_k, b_k)\}_k$  zu finden, so daß gilt

$$\begin{aligned} f &= \sum_k Wf(a_k, b_k) \psi_{a_k, b_k} = \\ &= \sum_k \langle f, \psi_{a_k, b_k} \rangle \psi_{a_k, b_k} \end{aligned}$$

Wir betrachten das Gitter:

$$\left\{ \left( \underset{a}{2^{-j}}, \underset{b}{2^j k} \right) : k, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

Das Gitter ergibt die Funktionenfamilie:

$$\begin{aligned} \psi_{jk}(x) &= 2^{\frac{j}{2}} \psi \left( 2^j \left( x - \frac{k}{2^j} \right) \right) = \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j x - k) = 2^{\frac{j}{2}} \frac{1}{2^j} D_{2^j} \psi(x) \end{aligned}$$

Ziel:  $\psi$  zu finden, so daß  $\{\psi_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  eine orthonormierte Basis für  $L^2(\mathbb{R})$  ist.

Definition:  $\psi$  ist eine Wavelet  $\Leftrightarrow$

$\{\psi_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine orthonormierte Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ .

Das bedeutet,  $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$

und jede  $f \in L^2(\mathbb{R})$  kann als

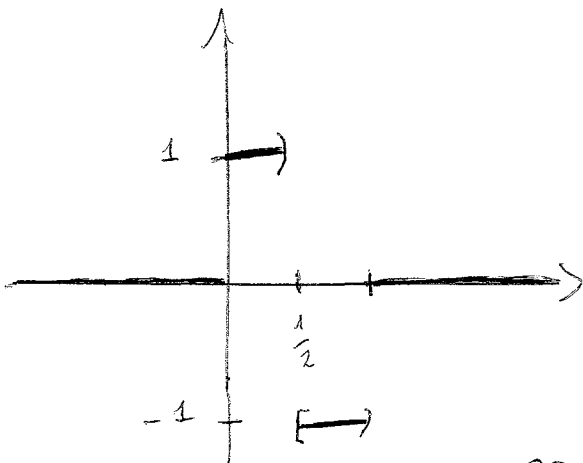
$$f(x) = \sum_{j,k} \alpha_{jk} \psi_{jk}(x)$$

geschrieben werden.

Bei der Wahl der Wavelets hat man große Freiheit.

Einfaches Beispiel: • Haar-wavelet:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



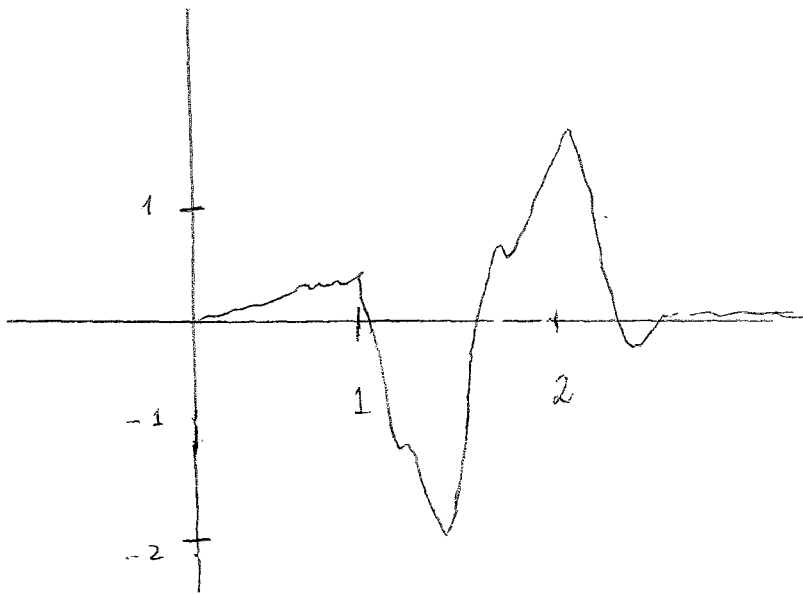
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

## Shannon - Wavelet :

$$\Psi / \hat{\Psi}(\xi) = \chi_I(\xi)$$

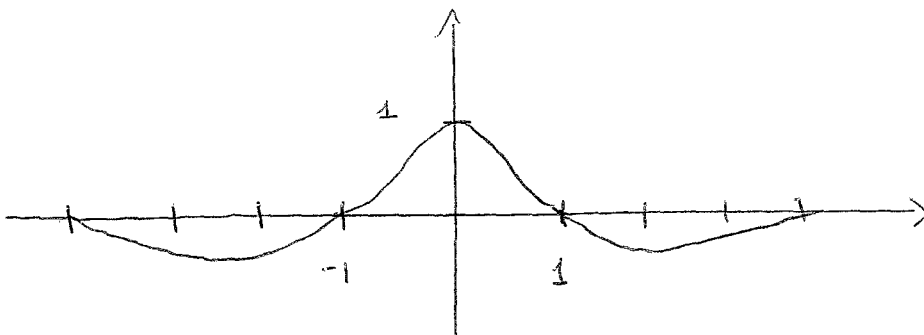
$$I = [-2\pi, 2\pi] \cup [\pi, 2\pi]$$

## Daubechies Wavelet :

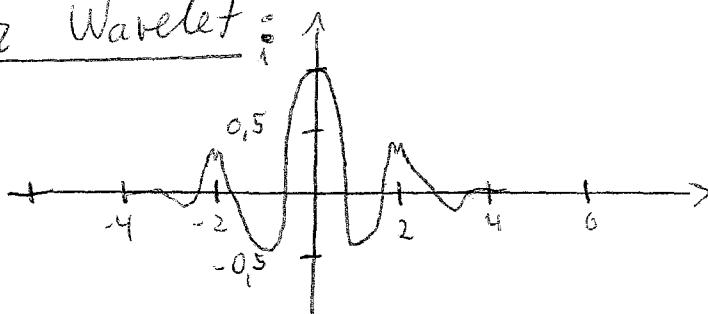


## Mexikanischer Huet :

$$\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-x^2) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



## Meyer Wavelet :





Sehr vereinfachtes Beispiel für Bildanalyse

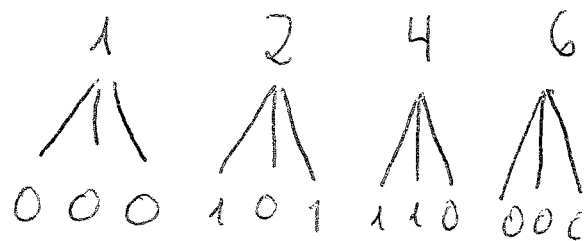
(5)

Bild (jede Farbe hat eine Nummer)

Die Folge  $1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 6, 6, 6, 6$  kodiert das Bild vollständig.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 6 |
| 4 | 5 | 6 | 6 |

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 4 | 6 |



Man kann eine unscharfe Version haben und die Details addieren.

Nur 8 Nummern sind für die Kodierung nötig (man wirft den Wert 0 weg).

Kompression: 50%, exakte Rekonstruktion.

Multiskalenanalyse (MSA) ist eine Folge

$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  von abgeschlossenen Teilräumen von

$L^2(\mathbb{R})$  so daß

1)  $V_j \subset V_{j+1}$

2)  $\bigcap V_j = \{0\}$ ,  $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$

3)  $f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}$

4) Es existiert eine Funktion  $\psi \in V_0$  so daß

$\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  eine orthonormierte Basis für  $V_0$  ist.

Die Multiskalenanalyse eignet man gut für Orthonormalbasen.  
 Die Räume  $V_j$  können als die Räume interpretiert werden, wo eine Approximation im "Niveau  $j$ " erreicht wird.

Konstruktion von Wavelets aufgrund MSA:

Sei  $W_0$  das orthogonale Komplement von  $V_0$  in  $V_1$ ,

$$\text{i.e. } V_1 = V_0 \oplus W_0$$

Wenn wir die Elemente von  $W_0$  um  $2^j$  dilatieren, bekommen wir einen abgeschlossenen Teilraum  $W_j$ ,

$W_j \subset V_{j+1}$ , so daß

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

$$V_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \text{folgt}$$

$$\Rightarrow V_{j+1} = V_j \oplus W_j = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$V_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$$

Wir müssen also eine  $\psi$  finden, so daß

$\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  eine orthonormierte Basis für  $W_0$  ist