TEST MONTAGSGRUPPE:
HS 3, Mo., 10:10 - 10:55, 1. Dezember 2008
. [**TOTAL: 18 Punkte**] .

ALLGEMEINE ANLEITUNG: ES geht vor allem um den Rechengang, und die "allgemeine Perspektive", d.h. wie man mit Hilfe von Linearer Algebra (praktisch gesehen in der Form von MATLAB) an vergleichbare, eventuell auch "viel größere Probleme herangehen könnte.

1. . [**4 Punkte**] Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, welche die Koordinaten $[1, 2, -1]$ in der Basis $(x-1)^2, (x+2), 1$ hat. Man bestimme (durch Angabe von MATLAB Code, oder eine direkte Berechnung) die Koordinaten des Polynoms in der Basis $\{1 + x, x - 7, x^2 + 2x - 3\}$.

```
p(x) = 1*((x-1)^2 + 2 *(x+2) - 1.1 =  x^2  + 0.x + 4;
bzw. die Standard-Koordinaten [1,0,4];
Das ist auch dasselbe wie die Matrix der ``alten Basis''
H1 =
     1     0     0
    -2     1     0
     1     2     1
losgelassen auf den Vektor [1,2,-1]' ;
Die neue Basis hat die Koordinaten
H =
     0     0     1
     1     1     2
     1    -7    -3
daher gilt:  c = inv(H) * [1,0,4]' = inv(H) * H1 * [1,2,-1]';
inv(H) * H1 * [1,2,-1]'
ans =
   -0.8750
   -1.1250
    1.0000
```

2. . [**4 Punkte**]

Man bestimme die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

```
 x + 4y + 7z = 3;
2x +5y + 8z = 3;
3x +6y + 9z = 3;
```

nach geometrischen Üeberlegungen, oder nach "Schulmethode" (Gleichungslösen) oder mit Hilfe von MATLAB (basierend auf der Geometrie hinter dem Problem!).

```
AA = zeros(3); AA(:) = 1:9;
AA =
     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
```

```
bb = [1;2;3];     sorry, das war ein FEHLER meinerseits!! siehe unten (korr. 9.12.2008)
xx =  pinv(AA) * bb;
xx =
    0.8333
    0.3333
   -0.1667
KORREKT:
br = 3*ones(3,1);  ! richtige rechte Seite
>> xx = pinv(AA)* br
xx =
   -0.5000
         0
    0.5000
nn  = null(AA)
nn =
   -0.4082
    0.8165
   -0.4082
Die ALLGEMEINE Loesung ist also von der Form  xx +  lambda * nn, lambda in R.
```

3. . [**3 Punkte**] Wie kann man mit Hilfe von MATLAB (oder sonstwie) die Binomial-Koeffizienten für $n = 120$ bestimmen? (unter Benutzung der Eigenschaften der FFT)? Wenn dieser Kontext nicht erkärt werden kann, versuche man die Idee des Pascalschen Dreieckes in MATLAB zu realisieren, oder den CONVBefehl zu verwenden. [Es geht nicht um das numerische Endergebnis].

   Klarerweise sollte man an das Pascalsche Dreieck denken. Einerseits gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x), n \geq 1$$

   , also

```
   gesucht: Binomialkoeff. zu k (z.B. k = 11):
    aaa = [1,1];   binom = aaa;
    for jj = 2 : k;  binom = conv(binom,aaa); end; disp(binom);

waere also ein solcher code. Alternativ, aber weniger elegant:
die n-te Reihe direkt durch Rekursion realisiert:
KERNTEIL des Codes sieht dann so aus
if n > 1;
cofs = [1,1];
for jj = 2:n;
cofs = [1, cofs(2:jj)+cofs(1:jj-1),1];
end;
end;
```

4. . [**2 Punkte**] Man bestimme den Winkel (soweit ohne Taschenrechner möglich) zwischen dem Vektor $a = [4; 5; 6]$ und $b = [7; 8; 9]$

```
a = [4;5;6], b = [7;8;9],  a1 = a/norm(a); b1 = b/norm(b);
acos(b1'*a1) * 180/pi     % Umrechnung in Grade!
ans =     3.4470  (Grade, also kleiner! Winkel)
```

5. . [**3 Punkte**] Man bestimme das quadratische Polynom, das die Lagrange-Bedingung $p(-1) = 0, p(1) = 1$ und $p(2) = 0$ erfüllt. Wie würden Sie in MATLAB diese Polynom berechnen/beschreiben bzw. plotten (idealerweise so, dass die Werte an den enstprechenden Stellen speziell markiert werden.

```
Entweder direktes Aufstellen des Gleichungssystems fuer  q(x) = a x^2 + b x + c;
oder  V = vander([-1,1,2])
V =
     1    -1     1
     1     1     1
     4     2     1
 inv(V)
ans =
    0.1667   -0.5000    0.3333
   -0.5000    0.5000         0
    0.3333    1.0000   -0.3333
Die zweite Spalte liefert das Ergebnis
q(x) = 1/2 * (- x^2 + x + 2);
check = polyval(ans(:,2), [-1,1,2])
check =
     0     1     0
```

6. . [**2 Punkte**] Wie kann man mit einem einfachen MATLAB Befehl testen, ob eine Kollektion von Vektoren linear unabhängig? Ebenso stelle man fest, ob die Spalten einer Matrix ein Orthonormalsystem (für den Spaltenraum) bilden.

```
null(A) sollte leer sein, oder rank(A) == n;
norm(  A' * A - eye(n)) vergleicht die Gram
Matrix mit der Einheitsmatrix!
```

TEST DIENSTAG GRUPPE:
HS 3, **Di** (not Mo.!), 12:10 - 12:55, 2. Dezember 2008
. [**TOTAL: 18 [+2] Punkte**] .

ALLGEMEINE ANLEITUNG: Es geht vor allem um den Rechengang, und die "allgemeine Perspektive", d.h. wie man mit Hilfe von Linearer Algebra (praktisch gesehen in der Form von MATLAB) an vergleichbare, eventuell auch "viel größere Probleme herangehen könnte.

1. . [**3 Punkte**] Man bestimme die Matrix-Darstellung zur linearen Abbildung $T : p(x) \mapsto [p'(0), p'(-1), p(2), p''$ von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^4$ und stelle fest, ob diese Abbildung invertierbar ist.

```
Matrix aufstellen, und mit Hilfe von Gauss-Elimination oder
Determinantenberechnung die Invertierbarkeit feststellen.
```

2. . [**2 Punkte**] Wie kann man mit einem einfachen MATLAB Test feststellen, ob eine Kollektion von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ den ganzen Raum aufspannt (oder doch nur einen Teilraum). Die Überlegung soll auch die Möglichkeit beinhalten, dass diese Vektoren nicht den ganzen Raum aufspannen.

```
Sorry: Beim Kopieren wurde die Angabe widerspruechlich:
Eine Matrix ist surjectiv wenn  rank(A) == m  ist, oder wenn
null(A')  leer ist (das orthog. Komplement des Spaltenraumes
ist trivial).
```

3. . [**2 Punkte**] Bilden die Polynome $p_1(x) = x^2+2x+3; p_2(x) = 4x^2+5x+6$ bzw. $p_3(x) = 6x^2+7x+8$ eine Basis für die quadratischen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$?

```
Aufstellen der Matrix B in Bezug auf die Standard Basis
der Monome (z.B. x^2,x,1):
B =
    1     4     6
    2     5     7
    3     6     8
Diese Matrix wurde mehrfach in der Vorlesung verwendet und hat Rang 2!
```

4. . [**4 Punkte**] Man beschreibe, wie man das folgende, kombinierte Experiment mit Hilfe eines Polynoms beschreiben kann: Man wirft gleichzeit eine Münze und einen Würfel. Wenn die Münze den Kopf zeigt, gelten die Augenzahlen des Würfels wie gewürfelt. Tritt jedoch der Fall des Adlers ein, so wird die gewürftelt Augenzahl verdoppelt. Wie koennte man die Verteilung bestimmen, die sich nach 10 Wiederholungen ergibt?

   freiwilliger Zusatz (Sonderpunkte): . [**2 Extra-Punkte**] Wie kann man mit Hilfe der FFT feststellen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, auf diese Weise innerhalb von 10 Zuegen mindestens 35 Gesamtpunkte zu erzielen. Man beschreibe die Vorgangsweise.

```
Es gibt zwoelf moegliche F\"alle, jeweils Kopf kombiniert
mit einer der W\"urfel. Jede dieser Wahrscheinlichkeiten ist 1/12.
Die moeglichen Ergebnisse sind  1,2,. 6  bzw. 2,4,6,..12, sodass
nur Zahlen zwischen 1 und 12 auftauchen, keine 7,9,11, dafuer
```

```
aber 2,4,6 mit Wahrscheinlichkeit  2/12 = 1/6; Das entsprechende
Polynom lautet also
p(x) =  1/12 ( x + 2x^2 + x^3 + 2x^4  + .. x^12);
Bezueglich der Standard Basis der Monome ist also die
Koeffizientenfolge wie folgt gegeben:
p = [0, 1, 2,1,2,1,2,0,1,0,1,0,1]/12;

 Zusatz:
   pp = zeros(1,128);  pp(1:13) = p;
   w=real(ifft( fft(p).^10));  result=sum(w(36:128))
```

5. . [**2 Punkte**] Für $a = [4; 5; 6]$ und $b = [7; 8; 9]$ bestimme man die Projektion von b auf a durch Angabe des MATLAB Codes (+Beschreibung) oder notfalls durch Berechnung von Hand.

```
AUS VERSEHEN GAB ich urspruenglich folgende Loesung an =
PROJEKTION auf den SPALTENRAUM:
C = [ 4,5,6; 7,8,9]';      P =  C * pinv(C);
oder   OC = orth(C);   PO =  OC * OC' ;
sollte dasselbe Ergebnis liefern, und zwar
PO =
    0.8333    0.3333   -0.1667
    0.3333    0.3333    0.3333
   -0.1667    0.3333    0.8333

   Es sollte richtigerweise einfach heissen:
   an= a/norm(a); Pba =  an * an' * b,   ! fertig
    an= a/norm(a); Pba =  an * an' * b,
Pba =
    6.3377
    7.9221
    9.5065

    oder haendisch:   Pba =  a  < a,b>/<a,a>
    (explizit rechenbar);
    format rat
    a'*b
ans =      122
>> a'*a
ans =       77
Pabh = a* (a'*b)/(a'*a)
Pabh =
     488/77
     610/77
     732/77
```

```
WINKEL: bn = b/norm(b);
wab =  acos( bn' * an),
wabgrad =  wab * 180/pi,
wab =
   0.060160669141775
wabgrad =
   3.446952434506621
```

6. . [**5 Punkte**] Es seien 5 Werte (verwackelte Messwerte) eines quadratischen Polynoms geben, in Form eines Datenvektors $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^5$, und zwar an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, 5$. Wie kann man daraus das "beste quadratische Polynomän die Daten anpassen, und in welchem Sinne findet diese Anpassung statt. Wie sieht eine enstprechender MATLAB (Pseudo)-code aus. Was würde sich ändern, wenn dieselben Daten an verschobenen Stellen, sagen wir $-2, -1, 0, 1, 2$ oder $51, 52, 53, 54, 55$ vorgegeben wären?

```
 Durch Aufstellen der Vandermonde-Matrix beschreibt man die Abbildung von R3 (Koeffizient
 zu den Werten (5 Werte) der Monome, und wende PINV auf die entsprechende Teilmatrix an.
 Unterschied: Die Konditionszahl aenders sich ``gewaltig'':
 vander(51:55); cond(ans)
ans =   4.9091e+013
>> vander(1:5)
ans =
     1     1     1     1     1
    16     8     4     2     1
    81    27     9     3     1
   256    64    16     4     1
   625   125    25     5     1
>> cond(ans)
ans =   2.6170e+004
Wir brauchen aber nur die Teilmatrix: !falsch.. sorry
      1     1     1     1     1
    16     8     4     2     1
    81    27     9     3     1n
sollte natuerlich sein:
V =   ans(:,3:5)
V =
       1              1              1
       4              2              1
       9              3              1
      16              4              1
      25              5              1
eventuell in umgekehrter Reihenfolge.
```