TEST für BEIDE GRUPPEN: MATERIAL JANUAR .2009: Mo., 10:10 - 10:55.
Übungen zur Angew. Mathematik f. LAK

ALLGEMEINE ANLEITUNG: ES geht vor allem um den Rechengang, und die "allgemeine Perspektive", d.h. wie man mit Hilfe von Linearer Algebra (praktisch gesehen in der Form von MATLAB) an vergleichbare, eventuell auch "viel größere Probleme herangehen könnte.

1. Wie stellt man eine beliebige diagonalisierbare 3×3 Matrix auf die einen zweidim. und einen einfachen Eigenraum hat?

   Beispielantworten: Man "würfelt" eine orthogonale Matrix U (z.B. `U = orth(rand(3))` , nimmt eine beliebige Diagonalmatrix mit genau zwei gleichen Eintragungen, z.B. `D = diag([1,1,2])` oder `D = [1,-1,1]` und bilde dann $A = U * D * U'$. In letzterem Falle ist dann die Wirkung von A genau die Spiegelung an der zu u_2 orthogonalen Ebene. Der Eigenraum zu 1 ist die von u_1 und u_3 aufgespannte Ebene.

   Umgekehrt gefragt: ist A gegeben, kann man D und U eruieren?

   Die Antwort: Die Eigenräume von A sind genau ... die von den entsprechenden Spalten von U aufgespannten ....

2. Die lineare Abbildung $p(x) \mapsto \int_a^b p(x)dx$ ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$, und kann daher in Bezug auf die Standard Basis durch eine 4×1 Matrix dargestellt werden (bzw. als Skalarprodukt mit einem Vektor in $\mathbb{R}^4$. Wie sieht dieser (die lin. Abb. erzeugende) Vektor aus? (für allgeimeines (a, b) bzw. $a = 0, b = 1$)

3. WICHTIG (und im Prinzip eine Wiederholung): Für jede Matrix gilt: $A * pinv(A) = P_A$ (die orthogonale Projektion auf den Spaltenraum A) und $pinv(A) * A = P_{ZA}$ (die orth. Proj. auf den Spaltenraum von A' = Zeilenraum von A). Für Vektoren im Spaltenraum gilt also insbesondere $A * pinv(A) * x = x$ (da das insbesondere für alle Spaltenvektoren von A gilt, kann man auch einfach schreiben $A * pinv(A) * A = A$!)

   SCHREIBT man nun: $B := pinv(A') = pinv(A)'$ (das ist leicht einzusehen, dass die beiden letztgenannten Matrizen immer gleich sind), so bekommt man

   $$x = A * (B' * x)$$

   für jedes x im Spaltenraum von A, also

   $$x = \sum_{k=1}^{n} \langle b_k, x \rangle a_k.$$

   WENN NUN die Spalten von A LINEAR UNABHAENGIG sind, so ist diese Darstellung auch noch eindeutig und es muss daher für $x = a_k$ (k-ter Spaltenvektor) gelten: $\langle b_k, a_j \rangle = \delta_{j,k}$ (Kronecker Delta), oder in anderen Worten (Matrixschreibweise)

   $$B' * A = Id_n.$$

   Das bestätigt nochmals dass man das (eindeutig bestimmte) **Biorthogonalsystem** zum System von Spaltenvektoren aus A ist, das selbst aus Vektoren von A besteht (d.h. im Spaltenraum, den es gilt $pinv(A') = A * (inv(A' * A)$, wobei $A' * A$ die Gram Matrix zu A ist! Spezialfall einer Basis (d.h. $m = n$ und die Spalten von A sind linear unabhängig): Dann ist das Biorthogonalsystem einfach $inv(A') = inv(A)'$, d.h. besteht (bis auf Konjugation) aus den Zeilen der inversen Matrix!

4. Im Weiteren ein Protokoll, wie man zeigen kann, dass die Pseudo- inverse einfach eine Umkehrung der Abbildung $T : x \mapsto A * x$ ist, wobei allerdings x nur aus dem Zeilenraum von A genommen wird und als Bild der Bildraum von $A =$ Spaltenraum von A genommen wird.

   Erinnern wir uns auch noch, dass die Abbildung T injektiv ist, weil ja zwei Elemente mit gleichem Bild ihre Differenz im Nullraum von A haetten, das sie aber gleichzeitig im Zeilenraum liegt, muesste eine derartiger Vektor auf sich selbst senkrecht stehen, ist also der Nullvektor. Da Zeilenrang gleich Spaltenrang ist, ist die Abbildung T nicht nur injektiv, sondern automatisch surjektiv, und somit invertiertbar.

   Wir wollen nun anhand eines MATLAB Experimentes klären (und eine konkrete Vorstellung machen, das ist keine Beweis!), dass dies auf verifiziert werden kann, indem man zu T eine entsprechende Matrix aufstellt:

   (a) Bestimmen einer Basis des Zeilenraumes
   (b) Bestimmen einer Basis des Spaltenraumes
   (c) Darstellen der Abbildung T in dieser Basis: MT
   (d) Testen der Invertierbarkeit
   (e) Darstellen von $TI : y \mapsto pinv(A) * y$ vom Spaltenraum in den Zeilenraum in denselben Basen
   (f) Feststellen, dass die beiden entsprechenden Matrizen **invers zueinander** sind, d.h. dass die Pseudo-Inverse den Isomorphismus T einfach umkehrt, bzw. dass $T1 = inv(T)$ (als Abbildung) ist.
   (g) auf den jeweiligen Nullräumen sind sowohl A als auch $pinv(A)$ "trivial" (d.h. sie bilden alles auf Null ab, sodass mit T bzw. $T1$ "alles beschrieben ist"!

   DETAILS DAZU GIBT ES AUF DER FOLGENDEN SEITE. !

5. EIN Beispiel des Tests wird voraussichtlich eine Aufgabenstellung der folgenden Art enthalten: Gegeben ist eine (kleiner) MATLAB Code, und man soll herausfinden, "was da gemacht wird", d.h. sozusagen eine Dokumentation und Erläuterung schreiben.

PROTOKOLL zu einem Test, bei dem VERIFIZIERT wird, dass die Wirkung von $pinv(A)$ genau die Umkehrung der Wirkung der Matrixmultiplikation zwischen Zeilenraum von A und Spaltenraum von A realisiert. BEACHTE: Die Betrachtungsweise, dass der sog. Zeilenraum von A *eigentlich* korrekterweise der Spaltenraum von A' sein sollte kommt dadurch zum Ausdruck, dass wir T (d.h. Matrix Multiplikation mit der 3×3 Matrix A auf einen ZEILENvektor gar nicht direkt anwenden können).

```
    A =
     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
RA = rref(A)
     1     0    -1
     0     1     2
     0     0     0
ZRA = RA(1:2,:)'
     1     0
     0     1
    -1     2
disp('Basis f. Zeilenraum');
Basis f. Zeilenraum
BZRA = pinv(ZRA')
    0.8333    0.3333
    0.3333    0.3333
   -0.1667    0.3333
disp('Biorth. Basis zum Zeilenraum');
Biorth. Basis zum Zeilenraum
OA = orth(A)
   -0.4797    0.7767
   -0.5724    0.0757
   -0.6651   -0.6253
disp('basis f.d. Spaltenraum');
basis f.d. Spaltenraum
BOA = OA; disp('ist schon orthogonal, daher gleich eigenes Biorth.');
ist schon orthogonal, daher gleich eigenes Biorth.
check = norm( BOA - pinv(OA'))
check =
  5.8518e-016
MT = OA' *  A * ZRA;
   10.3026  -36.6154
   -1.3624    0.5622
det(MT) = - 44.0908
MT1 = BZRA' * pinv(A) * OA;
norm( MT * MT1 - eye(2))
ans =     9.2783e-015

Alternativ koennte man z.B.  als Basis f\"ur den Zeilenraum

OZ = orth(A');
nehmen, das waere dann ja auch wieder sein eigenes Biorthogonalsystem.
```