

59. Berechnen Sie (nur)  $x_2$ , sodaß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist!

60. Berechnen Sie die Determinanten zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

61. Zeigen Sie

$$(a) \det \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = (t-1)^2(t+2)$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

62. Es sei

$$P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m, \quad a_m \neq 0, \text{ und}$$

$$Q(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n, \quad b_n \neq 0.$$

Mit der  $(m+n) \times (m+n)$ -Determinante

$$\text{Res}_{P,Q} = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

bezeichnet man die Resultante von  $P$  und  $Q$ . Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

- (a)  $\text{Res}_{P,Q} = 0$
- (b)  $P, tP, \dots, t^{n-1}P, Q, tQ, \dots, t^{m-1}Q$  sind l.a.
- (c) Es  $\exists R, S \in \mathcal{P}$ ,  $R \neq 0, S \neq 0$  mit  $\text{Grad}(R) \leq n-1$ ,  $\text{Grad}(S) \leq m-1$  und  $RP = SQ$
- (d) Mit zusätzlichen Kenntnissen aus Teilbarkeitstheorie läßt sich sogar zeigen, daß  $P$  und  $Q$  einen gemeinsamen Teiler haben.

63. Entwickeln Sie folgende Determinanten zweckmäßig bzw. geschickt nach Zeilen bzw. Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

64. Beweisen Sie, dass für  $j \neq l : \sum_i a_{ij} A_{il} = 0$  ist.

65. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

66. Ebenso für

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

67. Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

keine Lösung besitzt, falls  $c \neq 2a - 3b$ .

68. Welche Bedingungen müssen  $a, b, c$  erfüllen, damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= b \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= c \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung besitzt? Wie sehen Kern und Bild der zugehörigen linearen Abbildung aus?

69. Auf einer Gerade seien zwei Punkte  $x^1 \in \mathbb{R}, x^2 \in \mathbb{R}$  vorgegeben ( $x^1 \neq x^2$ ). Man denkt sich die Punkte mit der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  versehen. Begründen Sie, weshalb der Schwerpunkt durch

$$s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x^1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x^2$$

gegeben ist (Kraft \* Kraftarm = Last \* Lastarm).

Es sei nunmehr  $s \in \mathbb{R}$  vorgegeben. Wie kommt man dazu, "Massen"  $n_1$  und  $n_2$  zu betrachten, sodaß

$$\begin{aligned} n_1 x^1 + n_2 &= s \\ n_1 + n_2 &= 1? \end{aligned}$$

$n_1$  und  $n_2$  heißen baryzentrische Koordinaten von  $s$ . (Im Gegensatz zu wirklichen Massen können  $n_1$  und  $n_2$  auch negativ sein.)

70. Nunmehr befinden wir uns in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .  $x^1, x^2, x^3$  seien drei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ , die nicht auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie; Dann ist für jedes  $s \in \mathbb{R}^2$  das System

$$\begin{aligned} n_2 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 &= s & (2 \text{ Gleichungen}) \\ n_1 + n_2 + n_3 &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar.

Beschreiben Sie die Menge aller  $s$ , die positives bzw. negatives  $n_1$  haben. (Finden Sie dazu  $\{s : n_1 = 0\}$ ).  $n_1, n_2, n_3$  heißen wieder baryzentrische Koordinaten von  $s \in \mathbb{R}^2$  bzgl.  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ .

71. Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen (falls sie existieren):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

72. Berechnen Sie die inverse Matrix zu  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , indem Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 &= y_1 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

nach  $(x_1, x_2)$  auflösen. Wann existiert die Inverse?

73. Berechnen Sie den Rang folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

74. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + ix_3 &= 0 \\ -ix_1 + x_2 - (2-i)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

75. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die LU-Zerlegung folgender Matrizen:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

76. Überprüfen Sie für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

direkt, daß die Dimensionen der Originalräume gleich der Summe der Dimensionen von Kern und Bild sind!

77. Im  $\mathbb{R}^3$  wird um die  $x_2$ -Achse um den Winkel  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  gedreht. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren! (Ein Eigenvektor ist geometrisch unmittelbar einsichtig!)

78. Die folgende Matrix beschreibt eine Drehung:

$$D = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 109 & -12 & 60 \\ -12 & 116 & 45 \\ -60 & -45 & 100 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Drehachse. (Sie ist Eigenvektor zu welchem Eigenwert?) Ebenso wären die anderen Eigenwerte und Eigenvektoren zu ermitteln.

79. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu  $A, A^2$  und  $A^{-1}$ . Was fällt Ihnen auf?

80. Zeigen Sie: ist  $A$  eine  $n \times n$  Matrix,  $\alpha$  Eigenwert zu  $A$  und  $x$  zugehöriger Eigenvektor, so ist  $x$  auch Eigenvektor zu  $A^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Wie sieht der entsprechende Eigenwert zu  $x$  aus? Ist  $A$  invertierbar, so gilt die Aussage auch für  $k \in \mathbb{Z}$ .

81. Es sei  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$  linear mit  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ . Zeigen Sie, daß nur 0 oder 1 als Eigenwerte von  $\mathcal{A}$  in Frage kommen.

82. Die Eigenwerte schiefssymmetrischer Matrizen ( $A^T = -A$ ) sind stets rein imaginär.

83. Zeigen Sie an Hand konkreter Beispiele ( $2 \times 2$  Matrizen), daß i. A. Eigenwerte von  $AB$  nicht Produkte von Eigenwerten von  $A$  und  $B$  sind und Eigenwerte von  $A+B$  nicht derartige Summen. Wie verhält es sich aber, wenn  $A$  und  $B$  gemeinsame Eigenvektoren besitzen?

84. Ergänzen Sie  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$  so, daß als Eigenwerte 4 und 7 auftreten.

85. Es sei  $A$  eine quadratische Matrix, für die 0 ein Eigenwert ist. Zeigen Sie, daß  $A$  nicht invertierbar ist. Gilt die Umkehrung auch?

86. Zeigen Sie: ist in einer reellen  $n \times n$  Matrix die Summe der Elemente jeder Zeile dieselbe, so hat diese Matrix mindestens einen reellen Eigenwert. Gilt dies auch bei konstanter Spaltensumme?

87. Dividieren Sie

$$\begin{aligned} P(x) &= x^7 - x^6 + x^5 - 2 \text{ durch} \\ Q(x) &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

mit Rest.

88. Ebenso  $x^n - 1$  durch  $x - 1$ , und  $x^{2k} - 1$  durch  $x + 1$ .

89. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume zur Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(Achtung: es ergeben sich in natürlicher Weise komplexe Eigenvektoren.)

90. Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie  $A^n$  für  $n = 2, 3, 7, 100$ . (Anleitung; Hier zählt sich Diagonalisierung so recht aus.)

91. Ebenso  $e^A := \mathcal{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

92. Für  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ist das charakteristische Polynom  $P_A$  aufzustellen. Überprüfen Sie direkt, daß  $P_A(A) = 0$  ist.

93. Zeigen Sie: ist für ein  $r \in \mathbb{N} : A^r = 0$ , so sind alle Eigenwerte Null. (Anleitung: Cayley-Hamilton).

94. Welche der vier Aussagen ist richtig (Beweis oder Gegenbeispiel)?

- (a) Die Summe zweier symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- (b) Das Produkt zweier symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- (c) Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
- (d) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

95. Zeigen Sie: ist  $A$  eine symmetrisch  $n \times n$  Matrix und ist  $A^r = 0$  für ein  $r \in \mathbb{N}$ , so ist schon  $A = 0$ .

96. Bestimmen Sie zu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix  $T$ , sodaß  $T^t A T$  diagonal ist.

97. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

98. Für welche  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Matrizen orthogonal?

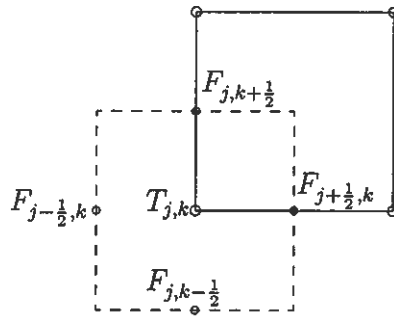
$$a) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & a \\ b & \frac{1}{3} & c \\ \frac{2}{3} & d & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & a \\ b & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & d & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

99. Zeigen Sie, daß für jede orthogonale  $3 \times 3$  Matrix  $F$  und  $u, v \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$(Fu) \wedge (Fv) = (\det F) F(u \wedge v).$$

100. Besitzt eine reelle  $2 \times 2$  Matrix orthogonale Eigenvektoren, so ist sie schon symmetrisch.

101. Leiten Sie die Wärmeleitungsgleichung auf dem Einheitsquadrat her, das mit einem quadratischen Gitter überdeckt wird (Skizze!)



Prüfen Sie nach, daß die Matrix symmetrisch ist!

102. Orthogonalisieren Sie die Vektoren  $(1, 1, 1)^t$ ,  $(2, 1, 4)^t$ ,  $(1, 2, 0)^t$  nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.
103. Geben Sie den Orthogonalraum zu  $[(1, 2, 1)^t]$  an.
104. Es sei  $\langle x, y \rangle := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$  ein inneres Produkt über  $\mathbb{R}^2$  (Kontrolle!). Geben Sie eine Orthonormalbasis für den  $\mathbb{R}^2$  an!
105. Es sei  $V$  ein linearer Raum,  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Zeigen Sie: ist für  $x \in V, y \in V : \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \forall z \in V$ , dann ist  $x = y$ .
106. Stellen Sie die folgenden Polynome in der Form  $\langle x, Ax \rangle$  dar mit einer symmetrischen Matrix  $A$

$$a) \quad x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2; \quad b) \quad 4x_1^2 + 7x_1x_2.$$

107. Ebenso für

$$a) \quad x_1^2 + 5x_1x_2 - x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2; \quad b) \quad 5x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_2x_3.$$

108. Bestimmen Sie für die folgenden quadratischen Formen auf  $\mathbb{R}^4$  Rang und Positivitätsrang.

$$(a) \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4;$$

(b)  $q(x) = -x_1^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_4;$

(c)  $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$

109. Bringen Sie die quadratische Form

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

auf Diagonalgestalt und bestimmen Sie den Positivitätsrang.

110. Ebenso für  $q_A(x) = x^tAx$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

111. Bestimmen sie die orthogonale Projektion  $P$  von  $y = (1, 1, 2)^t$  auf die Ebene

$$V = \{v = (v_1, v_2, v_3) : 3v_1 + v_2 - v_3 = 0\}.$$

112. *Orthogonale Projektion auf einen Teilraum  $V$ .* Es sei  $V \subseteq X, (X, \langle \cdot, \cdot \rangle), \dim X = n$ . O.B.d.A. kann für die folgenden Betrachtungen angenommen werden, daß  $V = [e^1, \dots, e^k]$  für ein  $k \leq n$  ist (weshalb?).  $\mathcal{P} : X \rightarrow X$  sei die orthogonale Projektion von  $X$  auf  $V$ . Geben Sie - für die obige Wahl von  $V$  - die explizite Form von  $\mathcal{P}$  an; stellen Sie insbesondere fest, daß  $\mathcal{P}(x) = Px$  mit

$$P = \left( \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 0 \end{array} \right) \Bigg\}^k,$$

sodaß  $\mathcal{P}$  linear ist. Zeigen Sie:  $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$

113. Bestimmen Sie zu den Meßwerten

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	0,5	0,5	2	3,5	3,5

eine Gerade  $y(x) = \alpha x + \beta$  so, daß  $\sum (y(x_i) - y_i)^2$  minimal wird. Stellen Sie die Normalgleichungen auf und berechnen Sie daraus die optimalen Parameter  $\alpha, \beta$ .

114. Wie allgemein bekannt, ist

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).\end{aligned}$$

Verwenden Sie dies, um für  $k, l = 1, 2, 3, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(lt) dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cos(lt) dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(lt) dt$$

zu ermitteln; ebenso  $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(kt) dt$  und  $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt$ .

Schließen Sie daraus, daß die Funktionen

$$\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = \cos t, \dots, \varphi_n(t) = \cos(nt),$$

$$\psi_1(t) = \sin t, \dots, \psi_n(t) = \sin(nt)$$

linear unabhängig sind. (Vektorraum:  $C[-\pi, \pi]$  = Menge der stetigen Funktionen von  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ; inneres Produkt:  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$ .)