

2. Lineare Analyse des Systems

Betrachten wir nun den linearisierten Fall des Sitnikovproblems für Exzentrizitäten $e \neq 0$. Dessen Bewegungsgleichung ist durch die lineare Komponente des Polynoms in (7) gegeben. Folgen wir dem allgemeinen Konsens des vorigen Kapitels und führen wir die weiteren Herleitungen bis zur 7. Ordnung in e bzw. $z^m \cdot e^n$ für $m+n \leq 7$ durch, behalten aber im Auge, dass die Grafiken in diesem Abschnitt ebenso Resultate höherer Ordnungen darstellen. Die Rechnungen vollständig auszuführen würde nur sehr viele Seiten mit mathematischen Ausdrücken füllen und daher nichts zum Verständnis der verwendeten Methode oder der physikalischen Tatsachen beitragen. Kapitel 5 geht direkt auf die Implementierung der Verfahren in Computer - Algebra - Systemen ein und zeigt, wie es möglich ist, dieselben Ergebnisse jedoch höherer Ordnungen zu bestimmen. Die Resultate, die für eine Reproduktion der Grafiken in diesem Abschnitt notwendig sind, finden sich in kompakter Form in Anhang II wieder.

2.1. Die linearisierte Bewegungsgleichung

Brechen wir die Reihe in (9) nach dem linearen Glied ab, so erhalten wir folgende einfache Form der Bewegungsgleichung:

$$z'' + \frac{z}{r(t)^3} = 0 \quad (19)$$

Im vorigen Abschnitt haben wir den Abstand der Primärkörper vom Baryzentrum, dem gemeinsamen Massenschwerpunkt des Systems nach dem Störparameter e entwickelt. Setzen wir den gefundenen Ausdruck (12) in (19) ein, so erhalten wir durch Entwicklung von $1/r(t)^3$ nach der Exzentrizität e eine Gleichung der Form:

$$z'' + z \cdot g(t, e) = 0 \quad (20)$$

Der lineare Koeffizient g ist ebenfalls durch eine Störreihe um den Systemparameter e gegeben:

$$g(t, e) = \sum_{i=0}^7 g_i(t) e^i \quad (21)$$

Es folgt daher für die einzelnen Koeffizienten g_i für $i = 0, \dots, 7$ durch Entwicklung:

$$g_0(t) = 8 \quad (22.0)$$

$$g_1(t) = 24 \cos(t) \quad (22.1)$$

$$g_2(t) = 12 (3 \cos(2t) + 1) \quad (22.2)$$

$$g_3(t) = 27 \cos(t) + 53 \cos(3 t) \quad (22.3)$$

$$g_4(t) = 28 \cos(2 t) + 77 \cos(4 t) + 15 \quad (22.4)$$

$$g_5(t) = \frac{3}{16} (174 \cos(t) + 131 \cos(3 t) + 591 \cos(5 t)) \quad (22.5)$$

$$g_6(t) = \frac{1}{20} (705 \cos(2 t) + 258 \cos(4 t) + 3167 \cos(6 t) + 350) \quad (22.6)$$

$$g_7(t) = \frac{1}{1920} (71545 \cos(t) + 74259 \cos(3 t) - 24935 \cos(5 t) + 432091 \cos(7 t)) \quad (22.7)$$

In (21) handelt es sich daher um eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer nicht konstanten, aber 2π -periodischen Koeffizientenfunktion g .

2.2. Floquet Theorie

Die linearisierte Gleichung (20) stellt aufgrund ihrer Periodizität eine Gleichung vom Hill'schen - Typus dar. Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist gemäß Floquet Theorie durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$z(t) = a w(t) \cdot \cos(b + \psi(t)) \quad (23)$$

Hier sind a und b reelle Konstanten, die aus den Anfangsbedingungen zu Gleichung (20) bestimmt werden. Die zeitabhängige Amplitude w wird Floquetfunktion, ψ im weiteren einfach Phasenfunktion genannt. Setzt man den Ansatz (23) in eine Gleichung vom Typ (20) ein, so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen folgende Bedingungen, die von den beiden Funktionen w und ψ erfüllt werden müssen:

$$w'' + w \cdot g(t) - w \psi'^2 = 0 \quad (24.1)$$

$$2 w' \psi' + w \psi'' = 0 \quad (24.2)$$

Durch Separation folgen sofort die Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen:

$$w'' + w \cdot g(t) - \frac{1}{w^3} = 0 \quad (25.1)$$

$$\psi' = \frac{1}{w^2} \quad (25.2)$$

Obwohl die Form der Gleichungen nicht einfacher geworden ist, haben wir das Problem durch unseren Ansatz darauf zurückgeführt, eine 2π periodische Lösung von (25.1) zu finden. Ist diese bekannt, kann aus ihr durch einfache Integration die Phasenfunktion bestimmt werden.

Bleibt noch, die Konstanten aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen: Hierfür setzen wir in (20) die Anfangsamplitude $z_0 = z(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = z'(0)$ ein und finden für die Konstanten a und b in gewohnter Weise (mit $w_0 = w(0)$ und $w_0' = w'(0)$):

$$a = \frac{\sec(b) z_0}{w_0} \quad (26.1)$$

$$\tan(b) = w_0^2 \left(\frac{w_0'}{w_0} - \frac{v_0}{z_0} \right) \quad (26.2)$$

Für die Herleitung wurden die aus der Theorie bekannten Beziehungen $\psi'(0)=0$ sowie $\psi'(0)^2 = 1/w(0)^2$ verwendet.

2.3. Die lineare Amplitudenfunktion

Wenden wir uns nun den Differentialgleichungen für Amplituden- und Phasenfunktion zu. Da g selbst in Form einer Störreihe gegeben ist, ist es nahe liegend, einen klassischen Störungsansatz durchzuführen, um Gleichung (25.1) zu lösen:

$$w(t) = w_0(t) + w_1(t) e + w_2(t) e^2 + \dots + w_7(t) e^7 + O(e^8) \quad (27)$$

Setzen wir diesen in die Bedingungsgleichung ein, so erhalten wir durch Ordnen in den Potenzen von e das folgende Gleichungssystem aus gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$w_0'' + 8 w_0 = \frac{1}{w_0^3} \quad (28.0)$$

$$w_1'' + 8 w_1 = -24 \cos(t) w_0 - \frac{3 w_1}{w_0^4} \quad (28.1)$$

$$w_2'' + 8 w_2 = -36 \cos(2t) w_0 - 24 \cos(t) w_1 + \frac{6 w_1^2 + w_0 (-12 w_0^5 - 3 w_2)}{w_0^5} \quad (28.2)$$

$$w_3'' + 8 w_3 = -53 \cos(3t) w_0 - 36 \cos(2t) w_1 + \cos(t) (-27 w_0 - 24 w_2) + \frac{w_0 (12 w_1 w_2 + w_0 (-12 w_1 w_0^4 - 3 w_3)) - 10 w_1^3}{w_0^6} \quad (28.3)$$

$$w_4'' + 8 w_4 = -77 \cos(4t) w_0 - 53 \cos(3t) w_1 + \cos(2t) (-28 w_0 - 36 w_2) + \cos(t) (-27 w_1 - 24 w_3) + \frac{1}{w_0^7} (15 w_1^4 + w_0 (w_0 (6 w_2^2 + 12 w_1 w_3 + w_0 (w_0^4 (-15 w_0 - 12 w_2) - 3 w_4)) - 30 w_1^2 w_2)) \quad (28.4)$$

$$\begin{aligned}
w_5'' + 8 w_5 = & \frac{1}{16} (-1773) \cos(5 t) w_0 - 77 \cos(4 t) w_1 + \cos(3 t) \left(-\frac{393 w_0}{16} - 53 w_2 \right) + \\
& \cos(2 t) (-28 w_1 - 36 w_3) + \cos(t) \left(-\frac{261 w_0}{8} - 27 w_2 - 24 w_4 \right) + \\
& \frac{1}{w_0^8} (w_0 (60 w_2 w_1^3 + w_0 (w_1 (-30 w_2^2 - 30 w_1 w_3) + w_0 (12 w_2 w_3 + 12 w_1 w_4 + \\
& w_0 (w_0^4 (-15 w_1 - 12 w_3) - 3 w_5)))) - 21 w_1^5)
\end{aligned} \tag{28.5}$$

$$\begin{aligned}
w_6'' + 8 w_6 = & \frac{1}{20} (-3167) \cos(6 t) w_0 - \frac{1773}{16} \cos(5 t) w_1 + \\
& \cos(4 t) \left(-\frac{129 w_0}{10} - 77 w_2 \right) + \cos(3 t) \left(-\frac{393 w_1}{16} - 53 w_3 \right) + \\
& \cos(2 t) \left(-\frac{141 w_0}{4} - 28 w_2 - 36 w_4 \right) + \cos(t) \left(-\frac{261 w_1}{8} - 27 w_3 - 24 w_5 \right) + \\
& \frac{1}{w_0^9} \left(28 w_1^6 + w_0 \left(w_0 \left((90 w_2^2 + 60 w_1 w_3) w_1^2 + \right. \right. \right. \\
& w_0 \left(-10 w_2^3 + w_1 (-60 w_2 w_3 - 30 w_1 w_4) + \right. \\
& w_0 \left(6 w_3^2 + 12 w_2 w_4 + 12 w_1 w_5 + w_0 \left(w_0^4 \left(-\frac{35 w_0}{2} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 15 w_2 - 12 w_4 \right) - 3 w_6 \right) \right) \right) \right) - 105 w_1^4 w_2 \Big)
\end{aligned} \tag{28.6}$$

$$\begin{aligned}
w_7'' + 8 w_7 = & \left(\frac{4987 w_0(t)}{384} - \frac{1773 w_2(t)}{16} \right) \cos(5 t) - \\
& \frac{3167}{20} \cos(6 t) w_1(t) + \cos(4 t) \left(\frac{1}{10} (-129) w_1(t) - 77 w_3(t) \right) + \\
& \cos(3 t) \left(\frac{1}{640} (-24753) w_0(t) - 53 w_4(t) - \frac{393 w_2(t)}{16} \right) + \\
& \cos(2 t) \left(\frac{1}{4} (-141) w_1(t) - 28 w_3(t) - 36 w_5(t) \right) + \\
& \cos(t) \left(\frac{1}{384} (-14309) w_0(t) - 27 w_4(t) - 24 w_6(t) - \frac{261 w_2(t)}{8} \right) + \\
& \frac{1}{w_0(t)^{10}} \left(w_0(t) \left(168 w_2(t) w_1(t)^5 + w_0(t) \left((-210 w_2(t)^2 - 105 w_1(t) w_3(t)) \right. \right. \right. \\
& w_1(t)^3 + w_0(t) \left(w_1(t) (60 w_2(t)^3 + \right. \\
& w_1(t) (180 w_2(t) w_3(t) + 60 w_1(t) w_4(t)) \Big) + \\
& w_0(t) \left(-30 w_3(t) w_2(t)^2 + w_1(t) (-30 w_3(t)^2 - \right. \\
& 60 w_2(t) w_4(t) - 30 w_1(t) w_5(t)) \Big) + \\
& w_0(t) \left(12 w_3(t) w_4(t) + 12 w_2(t) w_5(t) + 12 w_1(t) \right.
\end{aligned} \tag{28.7}$$

$$w_6(t) + w_0(t) \left(w_0(t)^4 \left(\frac{1}{2} (-35) w_1(t) - 15 w_3(t) - 12 w_5(t) - 3 w_7(t) \right) \right) - 36 w_1(t)^7 - \frac{432091 \cos(7 t) w_0(t)}{1920}$$

Die Bedingung für 2π - Periodizität reduziert die Lösung bezüglich der nullten Ordnung im einfachsten Fall zu einer Konstanten. Diese finden wir durch Nullsetzen von w_0'' und algebraischer Auflösung nach der gesuchten Funktion w . Das Ergebnis sind vier konjugierte Lösungen. Da uns eine partikuläre Lösung reicht, wählen wir die nicht komplexe, nicht negative, welche somit auch die Lösung nullter Ordnung des Problems darstellt:

$$w_0(t) = \frac{1}{2^{3/4}} \quad (29 / 38.0)$$

Des weiteren müssen wir die Differentialgleichungen (28.1) - (28.7) lösen: Betrachten wir deren Form genauer, so sehen wir, dass jede dieser Gleichungen durch einen gestörten harmonischen Oszillator:

$$w_i'' + K \cdot w_i = h_i(w_i, t) \quad (30)$$

ausgedrückt werden kann, wobei K zeitunabhängig und h_i durch rekursives Einsetzen der einzelnen Lösungen w_j , $j < i$ eindeutig gegeben ist. Die Einschränkung auf 2π -periodische Lösungen reduziert das Problem auf das Auffinden der partikulären Lösung für w_i . Diese Annahme begründet sich auf der Tatsache, dass die allgemeine Lösung von (30) immer in Form einer Summe aus homogener und partikulärer Lösung angeschrieben werden kann:

$$w_i(t) = w_{i,h} + w_{i,p} \quad (31)$$

Nun ist die homogene Lösung von (30) gleich:

$$w_{i,h}(t) = c_1 \cos(\sqrt{K} t) + c_2 \sin(\sqrt{K} t) \quad (32)$$

Ist $K \neq 2^{2m}$ ($m \in \mathbb{Z}$), so müssen die Konstanten c_1 und c_2 null gesetzt werden, um die 2π -Periodizität zu erfüllen. Da K in unserem Gleichungssystem gleich 8 oder 32 ist, reicht es aus, den partikulären Anteil und somit die vollständige 2π -periodische Lösung von (30) zu bestimmen. Es ist bekannt, dass eine partikuläre Lösung immer durch einen Ansatz in Form des inhomogenen Teils h_i gefunden werden kann. Wenn für alle Indizes i der Anteil h_i gleich 2π -periodisch ist, so ist es auch $w_{i,p}$. Für die nullte Ordnung ist dies auf jeden Fall erfüllt. Wie sieht es aber mit den weiteren Ordnungen aus? Setzen wir w_0 in (28.1) ein, so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$w_1'' + 32 w_1 + 12 \sqrt[4]{2} \cos(t) = 0 \quad (33)$$

Diese Gleichung entspricht dem gewöhnlichen, angeregten Oszillator: Ihre 2π -periodische Lösung ist daher durch folgende Form gegeben:

$$w_1(t) = -\frac{12}{31} \sqrt[4]{2} \cos(t) \quad (34 / 38.1)$$

Hierfür wurden die unbestimmten Koeffizienten, die bei der Integration auftreten, null gesetzt. Da sich alle h_{i+1} nur aus Produkten und Summen der w_j mit $j < i$ ergeben ist die 2π -Periodizität in jedem Fall bis zur n -ten Ordnung erfüllt. Ein Beweis folgt über Induktion. Die Lösungen bis zur 7. Ordnung wurden durch Ansatz des inhomogenen Teils der Differentialgleichung gefunden. Diese Methode eignet sich sehr gut für eine spätere Implementation eines automatisierten Verfahrens für höhere Ordnungen. Sehen wir uns die Methode anhand der zweiten Ordnung genau an: Nach Einsetzen von w_0 und w_1 (definiert in (29) und (34)) in die Differentialgleichung für w_2 (28.2) ergibt sich die Bedingungsgleichung für die zweite Ordnung in e :

$$w_2'' + 32 w_2 + \frac{6 \sqrt[4]{2}}{961} (987 \cos(2t) - 935) = 0 \quad (35)$$

Anhand der vorausgegangenen Überlegungen setzen wir den inhomogenen Teil von (35) mit unbestimmten Koeffizienten an, um die periodische Lösung zu erhalten. Diese ergibt sich in unserem Fall zu:

$$w_2(t) = A + B \cos(2t) \quad (36)$$

Wir setzen sie in die Ausgangsgleichung (35) ein, nach weiteren algebraischen Vereinfachungen erhalten wir für die unbekannten Koeffizienten A und B die Gleichung:

$$15376 A + 7 (1922 B + 423 \sqrt[4]{2}) \cos(2t) = 2805 \sqrt[4]{2} \quad (37)$$

Diese kann nur dann für alle Zeiten erfüllt sein, wenn sowohl $15376 \cdot A - 2805 \cdot 2^{1/4} = 0$, als auch $7 (423 \cdot 2^{1/4} + 1922 \cdot B) = 0$ erfüllt sind. Das Gleichungssystem ergibt aufgelöst nach A und B und eingesetzt in den Ansatz aus (36) für die gesuchte Funktion w_2 :

$$w_2(t) = \frac{2805}{7688 \cdot 2^{3/4}} - \frac{423}{961 \cdot 2^{3/4}} \cos(2t) \quad (38.2)$$

Das Verfahren lässt sich gut automatisieren. Im wesentlichen muss nur der inhomogene Teil der Gleichung bestimmt und aus ihm ein geeigneter Ansatz aufgestellt werden. Ergebnis ist in jedem Fall ein lineares Gleichungssystem, das die freien Parameter determiniert. Die Implementation, sowie eine genaue Beschreibung kann in Kapitel 5 unter dem Namen *AmplitudeFunction* gefunden werden. Die Lösungen für $i = 3, \dots, 7$ ergeben sich hierbei zu:

$$w_3(t) = \frac{4725 \sqrt[4]{2}}{29791} \cos(t) - \frac{242639}{685193 \cdot 2^{3/4}} \cos(3t) \quad (38.3)$$

$$w_4(t) = \frac{720921}{118210688 \cdot 2^{3/4}} + \frac{51488435}{169927864 \cdot 2^{3/4}} \cos(2t) - \frac{112233097}{339855728 \cdot 2^{3/4}} \cos(4t) \quad (38.4)$$

$$w_5(t) = -\frac{164709933 \cos(t)}{10535527568 \cdot 2^{3/4}} + \frac{81478484721 \cos(3 t)}{242317134064 \cdot 2^{3/4}} - \frac{3522692847 \cos(5 t)}{10535527568 \cdot 2^{3/4}} \quad (38.5)$$

$$w_6(t) = -\frac{3115519619475 \cos(2 t)}{60094649247872 \cdot 2^{3/4}} + \frac{119481371612061 \cos(4 t)}{300473246239360 \cdot 2^{3/4}} - \frac{26800521248289 \cos(6 t)}{75118311559840 \cdot 2^{3/4}} + \frac{567253678047}{480757193982976 \cdot 2^{3/4}} \quad (38.6)$$

$$w_7(t) = \frac{9363222575665 \cos(t)}{5588802380052096 \cdot 2^{3/4}} + \frac{679872351784735 \cos(5 t)}{1397200595013024 \cdot 2^{3/4}} - \frac{21605776029715653 \cos(3 t)}{214237424568663680 \cdot 2^{3/4}} - \frac{187553953798498979 \cos(7 t)}{475048202304428160 \cdot 2^{3/4}} \quad (38.7)$$

Bezüglich der Darstellung der Brüche sei auf die Einleitung verwiesen. Es handelt sich hier um exakte Ergebnisse der Störungstheorie, die Terme wurden bezüglich der trigonometrischen Funktionen sortiert. Eine numerische Näherung, um ein Gefühl für die Größe der einzelnen Koeffizienten zu bekommen, sollte ohne weiteres durch die beigefügten Algorithmen möglich sein.

2.4. Die lineare Phasenfunktion

Aus der Definitionsgleichung für die Phasenfunktion $\psi(t)$ in (25.2) leiten wir nun die Störreihe für die Phasenfunktion her. Durch Entwicklung von $1/w^2$ nach dem Störparameter ϵ und durch einfache Integration nach der Zeit t erhalten wir für die einzelnen Koeffizientenfunktionen unter Vernachlässigung von Potenzen in ϵ größer 7:

$$\psi_0(t) = 2 \sqrt{2} t \quad (39.0)$$

$$\psi_1(t) = \frac{96}{31} \sqrt{2} \sin(t) \quad (39.1)$$

$$\psi_2(t) = \frac{3 \sqrt{2} (217 t + 1140 \sin(2 t))}{1922} \quad (39.2)$$

$$\psi_3(t) = \frac{188 \sqrt{2} (1863 \sin(t) + 15997 \sin(3 t))}{2055579} \quad (39.3)$$

$$\psi_4(t) = \frac{\sqrt{2}}{339855728} (63889791 t - 107017928 \sin(2 t) + 474025501 \sin(4 t)) \quad (39.4)$$

$$\psi_5(t) = \frac{\sqrt{2}}{302896417580} (3 (32022773270 \sin(t) - 62958759535 \sin(3 t) + 145592632511 \sin(5 t))) \quad (39.5)$$

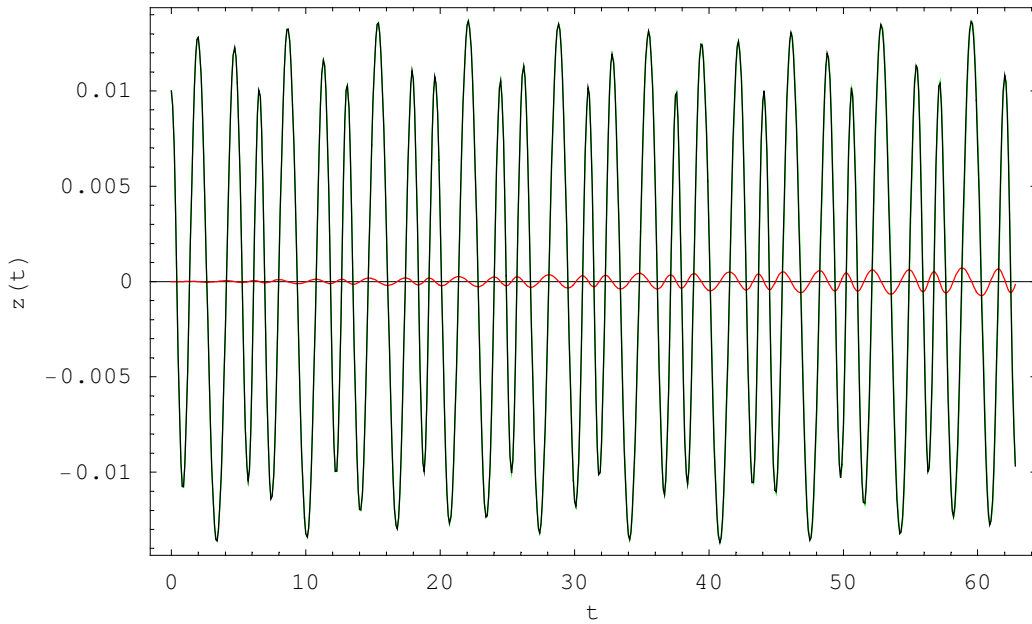
$$\begin{aligned} \psi_6(t) = & \sqrt{2} (19496618578605 t + \\ & 28707609712380 \sin(2 t) - \\ & 142524380369253 \sin(4 t) + 235737844510112 \sin(6 t)) / \\ & 150236623119680 \end{aligned} \quad (39.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_7(t) = & \sqrt{2} (4269978099608055625 \sin(t) + \\ & 4553710659604960875 \sin(3 t) - 25793309234972221033 \sin(5 t) + \\ & 33817333800397726525 \sin(7 t)) / 19120690142753233440 \end{aligned} \quad (39.7)$$

Die Phasenfunktion $\psi(t)$ ist nun durch folgende Störungsreihe definiert:

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t) e + \psi_2(t) e^2 + \dots + \psi_7(t) e^7 + O(e^8) \quad (40)$$

Für sehr kleine Amplituden $z \ll 1$ ist mit (27) und (40) sowie den Relationen (26.1) und (26.2) für die Anfangsbedingungen $z_0 = z(0)$ und $v_0 = z'(0)$ eine erste Lösung für das Sitnikov Problem gegeben. Sie hat die Form einer endlichen Störreihe und gibt die Oszillationen des dritten Körpers entlang der z -Achse abhängig von der Zeit für kleine Auslenkungen wieder.



Grafik 3: Vergleich der Orbits zwischen analytisch (schwarz) und numerisch (grün) gewonnener Lösung des Sitnikovproblems für Exzentrizität $e = 0.2$, $z(0) = 10^{-2}$ und $z'(0) = 0$. Die rote Kurve kennzeichnet den absoluten Fehler zwischen den gefundenen Lösungen. Die Störungslösung wurde für die Darstellung bis zu 13. Ordnung in e entwickelt und gibt die Geometrie des Orbits für kleine Auslenkungen des dritten Körpers sehr gut wieder.

Die Darstellung in Grafik 3 zeigt den Vergleich zwischen numerisch gewonnener und analytischer Lösung im Bereich $0 \leq t \leq 20\pi$. Die numerische Lösung ist grün, die analytische durch die schwarze Kurve gegeben. Die Ordnung in e beträgt für die Darstellung 13, die Exzentrizität $e = .2$, die Anfangsgeschwindigkeit des dritten Körpers ist Null, die

Anfangsamplitude $z(0) = 10^{-2}$. Deutlich ist die gute Übereinstimmung der Lösungen zu erkennen. Der Differenzbetrag zwischen numerischer und analytischer Lösung (in der Grafik rot) wächst sehr langsam an, und ergibt sich aufgrund der Linearisierung der Bewegungsgleichung: Nicht lineare Effekte, sowie der Abbruchfehler aufgrund endlicher Reihendarstellungen sind dafür verantwortlich.

2.5. Mittlere Frequenz und Stabilitätsanalyse

Wenn die Lösung einer Hill'schen Gleichung beschränkt ist, so ist sie auch oszillatorisch, sie ist im allgemeinen Fall aber nicht periodisch, was aufgrund der zeitabhängigen Phasenfunktion ersichtlich ist. Für den semiperiodischen Fall kann trotzdem eine mittlere Frequenz des dritten Körpers abgeleitet und mit dem Fourierkoeffizienten niedrigster Ordnung identifiziert werden. Diese gibt die Hälfte der Anzahl der Durchgänge des dritten Körpers durch das Massenzentrum während eines Umlaufs der Primärmasse an. Schreibt man (25.2) in der Form

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{w(s)^2} ds \quad (41)$$

und integriert über eine Umlaufperiode $(0-2\pi)$, so ergibt sich als Ausdruck für die mittlere Frequenz \tilde{Q} :

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{w(s)^2} ds = \frac{\psi(2\pi)}{2\pi} \quad (42)$$

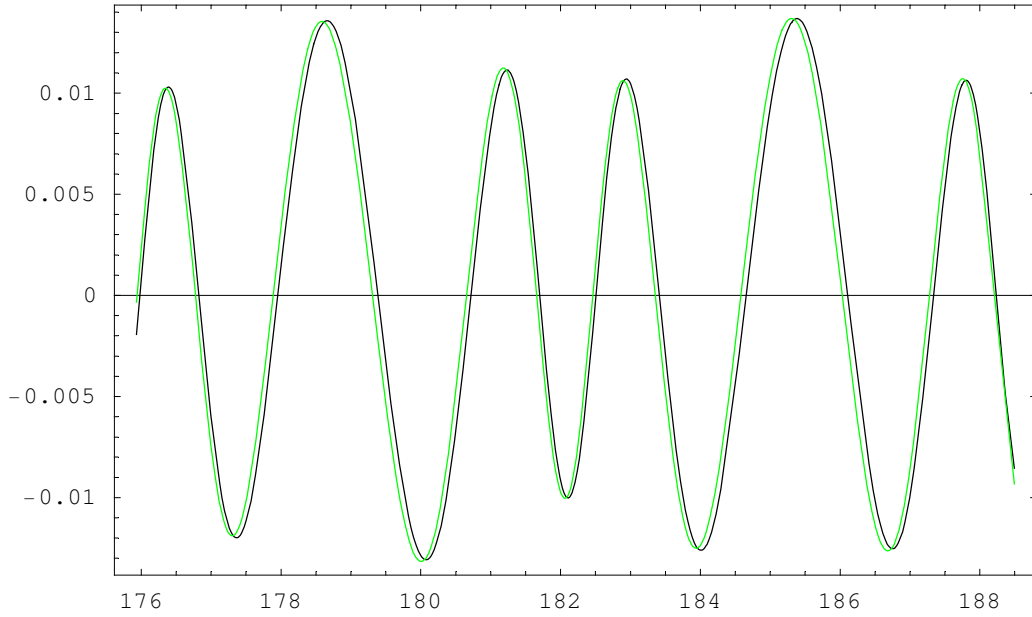
Dies führt in unserem Fall durch Einsetzen von (40) in (42) zu folgendem Resultat: Die mittlere Frequenz \tilde{Q} ist eine wachsende symmetrische Funktion bezüglich der Exzentrizität der Ellipsen der Primärkörper und ist durch den nachstehenden Ausdruck wiedergegeben (Die Ordnungen >7 ergeben sich analog den obigen Überlegungen):

$$\tilde{Q} = \sqrt{2} \left(2 + \frac{21 e^2}{62} + \frac{89607 e^4}{476656} + \frac{5468897217 e^6}{42142110272} \right) + O(e^8) \quad (43)$$

bzw. in Maschinengenauigkeit bis zur 17. Ordnung in e :

$$\tilde{Q} = \sqrt{2} (2 + 0.33871 e^2 + 0.187991 e^4 + 0.129773 e^6 + 0.0990389 e^8 + 0.0800622 e^{10} + 0.0671837 e^{12} + 0.0578724 e^{14} + 0.050827 e^{16}) + O(e^{18}) \quad (44)$$

Betrachten wir den Bereich jenseits der hundertsten Umlaufperiode der Primärkörper ein wenig genauer, so sieht man, dass der Unterschied zwischen numerischer und analytischer Näherung weniger in Differenzen zwischen den Amplituden, als vielmehr in einem Aus-der-Phase-Geraten des Orbits der analytischen Näherung zu suchen ist:



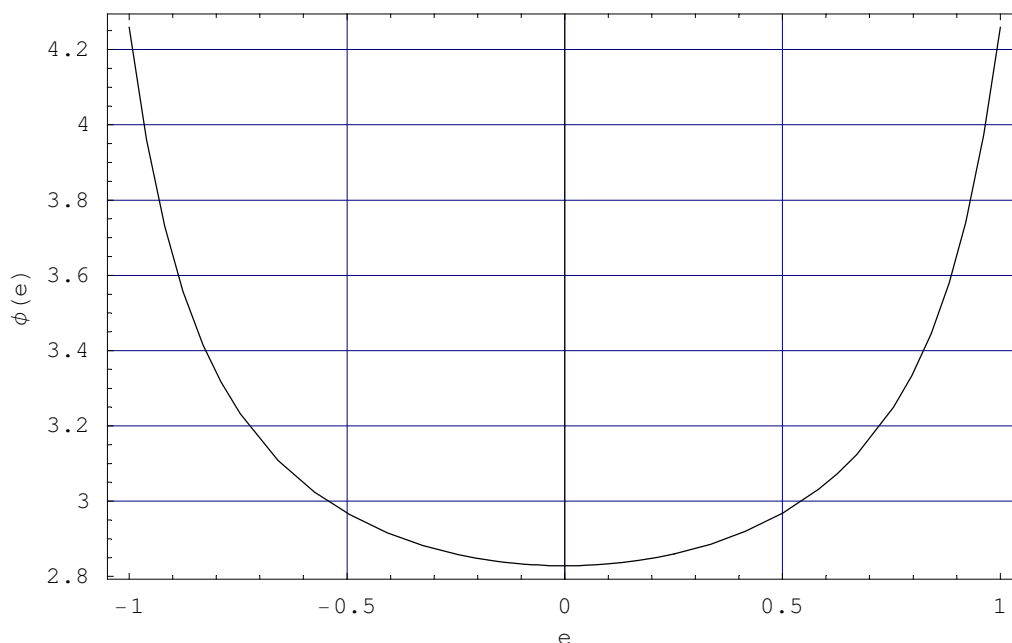
Grafik 4: Vergleich der Orbits zwischen analytisch (schwarz) und numerisch (grün) gewonnener Lösung des Sitnikovproblems für die Exzentrizität $e = 0.2$, Anfangsamplitude $z(0) = 10^{-2}$ und $z'(0) = 0$ zwischen der 28. und 30. Umlaufperiode der Primärkörper. Trotz einer leichten Phasenverschiebung zwischen den Orbits bleibt die qualitative Struktur der Lösung auch für größere Umlaufperioden erhalten.

Die Störungslösung leistet immer noch gute Dienste, ist aber um eine Größe $\Delta\phi$ gegen die numerische Lösung verschoben. Die Gesamtverschiebung über die Zeit setzt sich aus einer mittels Floquet-Theorie abgeleiteten Phasenverschiebung ϕ und dem Approximationsfehler $\Delta\phi$ zusammen. Betrachten wir den analytischen Teil: Dieser besteht, wie man aus (39.0) - (39.7) sehen kann, aus oszillatorischen und säkularen Komponenten. Fassen wir den zeitproportionalen Teil zusammen, so ergibt er sich in Abhängigkeit der Exzentrizität e bis zur 7. Ordnung:

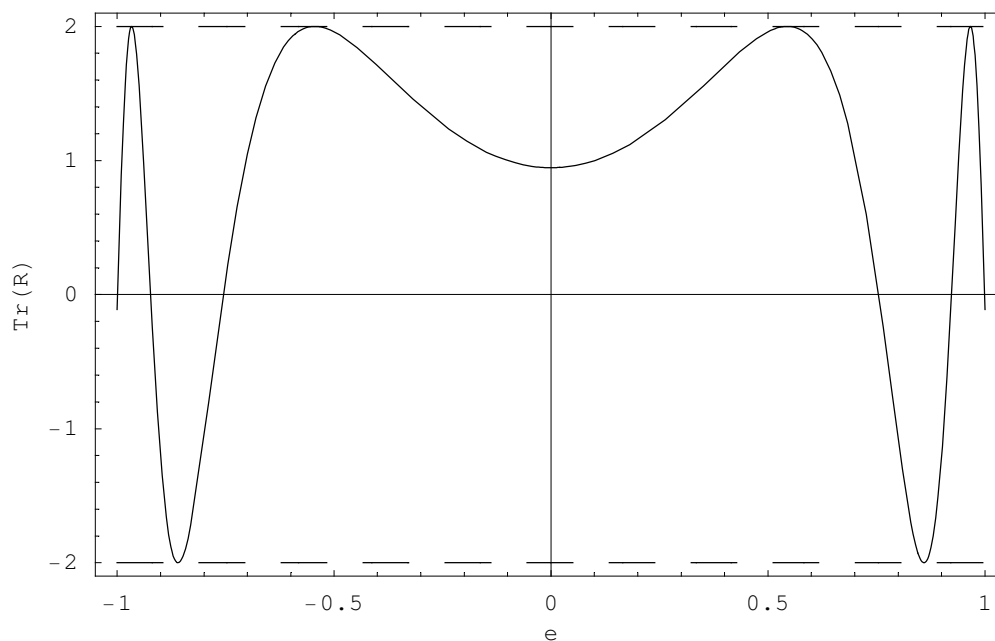
$$\phi(e) = \sqrt{2} \left(2 + \frac{21 e^2}{62} + \frac{89607 e^4}{476656} + \frac{5468897217 e^6}{42142110272} \right) + O(e^7) \quad (45)$$

Was nichts anderes heißt, als dass neben dem oszillierenden Anteil der Phasenverschiebung sich eine Gesamtphasenverschiebung der Größenordnung $\phi < 4$ (für $e < 1$) ergibt. Plottet man diese in Abhängigkeit von e , ist die steigende Phasenverschiebung ϕ mit wachsendem e (Grafik 5) deutlich zu sehen.

Mit der Phasenverschiebung eng verbunden ist die Stabilität des Systems. Definieren wir gemäß der Floquet - Theorie diese anhand der Bedingung, dass der Betrag der Spur der Transfermatrix kleiner 2 ist, so ergibt sich daraus folgendes Bild für die Stabilität des Systems:



Grafik 5: Direkt proportionaler Anteil der Phasenverschiebung der Lösung des Sitnikov Problems in Abhängigkeit der Parametergröße e . Mit steigender Exzentrizität nimmt auch der Wert der Phasenverschiebung zu und übersteigt mit $e \rightarrow 1$ den Wert 4. Für die Darstellung wurde die Phasenverschiebung 17. Ordnung in e verwendet.



Grafik 6: Spur der Monodromenmatrix R für den linearisierten Fall des Sitnikovproblems. Übersteigt diese den Wert $|2|$, bleibt der Probekörper nicht mehr an das System gebunden (gekennzeichnet durch die gestrichelte Linie). Schwach stabile Konfigurationen finden sich bei $e_c = \pm 0.54..$ und $e_c = \pm 0.859..$. Mit e gegen 1 werden diese immer häufiger und erreichen im Grenzfall $e \rightarrow 1$ unendlich viele Überschreitungen. Die Abbildung zeigt das Ergebnis der Entwicklungen bis zur 17. Ordnung des Parameters e .

Die Spur der Matrix in Grafik 6 wurde mittels Floquet - Theorie bestimmt, es wird auf sie gleich im Anschluss eingegangen. Um den Detailreichtum der Stabilitätsanalyse zu gewinnen und die Instabilitätsgebiete genau zu bestimmen, wurden die obigen Ableitungen bis zur 17. Ordnung in e durchgeführt. Das Ergebnis beschreibt die Stabilität des dritten Körpers in Abhängigkeit der Exzentrizität der Primärkörper und ergibt sich in Maschinengenauigkeit zu:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R) = & 2 \cos(\sqrt{2} \pi (4. + 0.677419 e^2 + 0.375982 e^4 + 0.259545 e^6 + 0.198078 e^8 + \\ & 0.160124 e^{10} + 0.134367 e^{12} + 0.115745 e^{14} + 0.101654 e^{16} + O(e^{18}))) \end{aligned} \quad (46)$$

Die Spur der Transfermatrix R erreicht ± 2 . dort, wo das Argument des Kosinus $\pi \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) wird. Setzen wir das Argument des Kosinus in (46), was nichts anderes ist, als ein Polynom in e gleich $\pi \cdot k$ und lösen dieses für $k \in (-10, 10)$, so ist es ein leichtes, die instabilen Bahnen des dritten Körpers in Abhängigkeit von e zu bestimmen: Folgende Tabelle stellt die nicht komplexen Lösungen für $|e| < 1$ zusammen, welche gleichbedeutend mit den kritischen Werten für die Exzentrizität e_c sind:

Tr R	e_c
+2.	-0.9664671984174468705
-2.	-0.8596125484399608219
+2.	-0.544470907815098188
+2.	+0.544470907815098188
-2.	+0.8596125484399608219
+2.	+0.9664671984174468705

Tabelle 1: Kritische Werte für die Exzentrizität e des Sitnikov Problems. Die Spur der Mondoromen Matrix R der linearisierten Bewegungsgleichung erreicht den kritischen Wert bei $|\text{Tr } R| = 2$. Der dritte Körper ist hier nur schwach an das System gebunden.

2.5.1. Bestimmung der Transfermatrix R des linearisierten Falls

Im folgenden soll der Rechenweg, um die Transfermatrix der Lösung des Sitnikov Systems aufzustellen behandelt werden. Hierfür benötigen wir weitere Resultate der Floquet - Theorie. Eine Transfermatrix zu Gleichung (23) hat die folgende Form:

$$R = \begin{pmatrix} c(T) & s(T) \\ c'(T) & s'(T) \end{pmatrix} \quad (47.1)$$

wobei c die kosinusartigen und s die sinusartigen Lösungen von (23) sind. Diese sind durch eine spezielle Wahl der Anfangsbedingungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} c(0) &= 1, & c'(0) &= 0 \\ s(0) &= 0, & s'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (47.2)$$

Ihr Name rührt daher, dass ihre Anfangsbedingungen jenen der trigonometrischen Funktionen entsprechen. Die Matrix R ist zeitunabhängig mit der Determinante $\det(R) = 1$ und bildet einen Phasen - Vektor \vec{Z} mit Komponenten aus Ort und Geschwindigkeit $\vec{Z} = (z(t), z'(t))$ auf jenen nach der Periode T ab. Es gilt folgende rekursive Beziehung:

$$\vec{Z}_{n+1} = R \vec{Z}_n \quad (48)$$

Vektorgleichungen dieser Art haben bekanntlich die Lösung:

$$\vec{Z}_n = \vec{A}_1 \lambda_1^n + \lambda_2^n \vec{A}_2 \quad (49)$$

wobei die \vec{A}_i die Eigenvektoren und λ_i die Eigenwerte der Matrix R darstellen. Eine Lösung kann daher nur für alle Punkte beschränkt sein, wenn der Absolutbetrag von λ_1 und λ_2 kleiner 1 ist. Dies stellt sicher, dass Ort und Phase für alle Zeiten an das System gebunden bleiben und nicht gegen unendlich anwachsen. Aus der Tatsache $\det R = 1$ ergibt sich für das charakteristische Polynom von R und dessen Lösungen:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(R) \lambda + 1 = 0 \quad (50.1)$$

und

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(R)}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Tr}(R)^2}{4} - 1} \quad (50.2)$$

Die Bedingung für lineare Stabilität $|\lambda_{1,2}| < 1$ geht somit für beschränkte Lösungen direkt in die oben definierte Bedingung für die Spur der Matrix $|\text{Tr}(R)| < 2$ über.

Wie ist es nun möglich, aus der im vorigen Abschnitt gewonnenen Amplituden- und Phasenfunktion die Transfermatrix zu gewinnen ? Hierfür setzen wir die, durch Linearisierung gewonnene Lösung in die Differentialgleichung (23) ein und bestimmen die freien Koeffizienten derart, dass (47.2) erfüllt wird. Aus den speziellen Lösungen ist es einfach die Transfermatrix R gemäß (47.1) aufzustellen. Die Herleitungen für höhere Ordnungen füllen Seiten. Zum Verständnis sei hier die Herleitung bis zur 3. Ordnung skizziert. Die notwendigen Zwischenschritte, um $R + O(e^{13})$ zu bestimmen, befinden sich, wie alle weiteren Herleitungen höherer Ordnung, in Anhang II und wurden mit Hilfe der Funktion *TransferMatrix* (siehe Kapitel 5) gewonnen. Zunächst empfiehlt es sich, die Lösung (23) in folgende Form zu bringen:

$$z(t) = A \cos(\psi) + B \sin(\psi) \quad (51.1)$$

wobei

$$A = a \cos(b), \quad B = -a \sin(b) \quad (51.2)$$

In unserem Fall bis zur 3. Ordnung ergibt sich daher aus der Lösung (23) folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
z(t) = & \left(\frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12}{31} \sqrt[4]{2} \cos(t) e + \left(\frac{2805}{7688 2^{3/4}} - \frac{423 \cos(2t)}{961 2^{3/4}} \right) e^2 + \right. \\
& \left. \left(\frac{4725 \sqrt[4]{2} \cos(t)}{29791} - \frac{242639 \cos(3t)}{685193 2^{3/4}} \right) e^3 \right) \cdot A \cdot \\
& \cos \left(2 \sqrt{2} t + \frac{1}{31} \sqrt{2} 96 \sin(t) e + \frac{3 (217 \sqrt{2} t + 1140 \sqrt{2} \sin(2t)) e^2}{1922} + \right. \\
& \left. \frac{188 (1863 \sqrt{2} \sin(t) + 15997 \sqrt{2} \sin(3t)) e^3}{2055579} \right) + \\
& \left(\frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12}{31} \sqrt[4]{2} \cos(t) e + \left(\frac{2805}{7688 2^{3/4}} - \frac{423 \cos(2t)}{961 2^{3/4}} \right) e^2 + \right. \\
& \left. \left(\frac{4725 \sqrt[4]{2} \cos(t)}{29791} - \frac{242639 \cos(3t)}{685193 2^{3/4}} \right) e^3 \right) \cdot B \cdot \\
& \sin \left(2 \sqrt{2} t + \frac{1}{31} \sqrt{2} 96 \sin(t) e + \frac{3 (217 \sqrt{2} t + 1140 \sqrt{2} \sin(2t)) e^2}{1922} + \right. \\
& \left. \frac{188 (1863 \sqrt{2} \sin(t) + 15997 \sqrt{2} \sin(3t)) e^3}{2055579} \right) + O(e)^4
\end{aligned}$$

Wir erfüllen zunächst die Anfangsbedingung für die kosinusartige Lösung ($z(0) = 1$, $z'(0) = 0$) und erhalten folgendes Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten A und B:

$$A \left(\frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12 \sqrt[4]{2} e}{31} - \frac{579 e^2}{7688 2^{3/4}} + \left(-\frac{242639}{685193 2^{3/4}} + \frac{4725 \sqrt[4]{2}}{29791} \right) e^3 \right) = 1 \quad (53.1)$$

und

$$\begin{aligned}
B \left(2 \sqrt{2} + \frac{96 \sqrt{2} e}{31} + \frac{7491 e^2}{961 \sqrt{2}} + \frac{3124184 \sqrt{2} e^3}{685193} \right) \\
\left(\frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12 \sqrt[4]{2} e}{31} - \frac{579 e^2}{7688 2^{3/4}} + \left(-\frac{242639}{685193 2^{3/4}} + \frac{4725 \sqrt[4]{2}}{29791} \right) e^3 \right) = 0
\end{aligned} \quad (53.2)$$

Dieses bestimmt die Koeffizienten zu:

$$A = -\frac{5481544 2^{3/4}}{202312 e^3 + 412827 e^2 + 4243776 e - 5481544} \quad (54.1)$$

$$B = 0 \quad (54.2)$$

Wir verfahren analog für die sinusartige Lösung ($z(0) = 0, z'(0) = 1$). Das sich daraus ergebende Gleichungssystem lautet:

$$A \left(\frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12 \sqrt[4]{2} e}{31} - \frac{579 e^2}{7688 2^{3/4}} + \left(-\frac{242639}{685193 2^{3/4}} + \frac{4725 \sqrt[4]{2}}{29791} \right) e^3 \right) = 0 \quad (55.1)$$

und

$$B \left(2 \sqrt{2} + \frac{96 \sqrt{2} e}{31} + \frac{7491 e^2}{961 \sqrt{2}} + \frac{3124184 \sqrt{2} e^3}{685193} \right) \left(\frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12 \sqrt[4]{2} e}{31} - \frac{579 e^2}{7688 2^{3/4}} + \left(-\frac{242639}{685193 2^{3/4}} + \frac{4725 \sqrt[4]{2}}{29791} \right) e^3 \right) = 1 \quad (55.2)$$

Das Gleichungssystem besitzt folgende Lösung:

$$A = 0 \quad (56.1)$$

$$B = -\left(7511831155984 \sqrt[4]{2}\right) / ((202312 e^3 + 412827 e^2 + 4243776 e - 5481544) (6248368 e^3 + 5341083 e^2 + 4243776 e + 2740772)) \quad (56.2)$$

Schließlich stellen wir die Transfermatrix R auf. Hierfür setzen wir für die kosinusartige Lösung die Koeffizienten (54.1) bzw. (54.2) und für die sinusartige Lösung (56.1) und (56.2) in (52) bzw. deren Ableitung ein. Die Periode entspricht einem Umlauf der Primärkörper und beträgt in unseren Systemeinheiten $T = 2\pi$, daher exakt einem Umlauf der beiden schweren Massen. Die Matrix R kann gemäß ihrer Definition in (51.1) aufgestellt werden. Die Spur von R ergibt dann den Ausdruck (46) bis zur 3. Ordnung. Die notwendigen Ergebnisse höherer Ordnung finden sich in Anhang II wieder. Der Detailreichtum und die Genauigkeit von Abbildung 6 kann jedoch nur mit höherer Ordnung (>10) erreicht werden.

2.6. Diskussion des verwendeten Verfahrens

In Alfaro & Chiralt (1993) werden die kritischen Exzentrizitäten auf ähnliche Weise gewonnen. Die linearisierte Abbildungsmatrix wird jedoch anhand der Variationsgleichungen des Systems bestimmt. Vergleicht man die kritischen Werte für die Exzentrizität mit denen dieser Arbeit, so zeigt sich eine Übereinstimmung für $e_{\text{crit}} = 0.544..$. Die weiteren Werte $e_{\text{crit}} = \pm 0.859..$ und $e_{\text{crit}} = \pm 0.966..$ fehlen. Dafür werden weitere kritische Werte für $e \rightarrow 1$ bestimmt. Vergleicht man das verwendete Verfahren mit dem in dieser Arbeit, so kann ein deutlicher Unterschied in der verwendeten Ausgangsgleichung für das linearisierte Problem festgestellt werden. Der Abstand der Primärkörper wird in (Alfaro et. al) nur bis zur 1. Ordnung entwickelt und in die Ausgangsgleichung eingesetzt. Um dennoch Resultate von großer Präzision zu erlangen, wird die unabhängige Variable durch die exzentrische Anomalie ersetzt. Wir fragen uns daher, welche der beiden Methoden die genaueren Resultate liefern kann. Ein Argument gegen unsere Herleitungen wäre die Tatsache, dass wir die transzendente Keplergleichung nach dem Störparameter e entwickelt haben und daher für große Exzentrizitäten keine guten Resultate finden können. Die vielen instabilen Systembereiche liegen bei uns eben bei $|e| > 1$, was einer nicht elliptischen Bahn der Primärkörper entsprechen würde. Ergo, kann unser Verfahren nur gute Ergebnisse für moderate Exzentrizitäten liefern. Warum fehlen aber die Werte $e_{\text{crit}} = 0.859..$ und $e_{\text{crit}} = 0.966..$? Welcher Effekt führt in den Herleitungen von (Alfaro & Chiralt) dazu, dass diese nicht dargestellt werden können?

Werden die Herleitungen in diesem Kapitel auf analoge Weise für die T-Gleichung von Hagel & Trenkler (1993) durchgeführt, so kann wie in der Vorgehensweise von Alfaro & Chiralt, (1993) eine Entwicklung der Keplergleichung nach dem Störparameter e umgangen werden, da es möglich ist die Bewegungsgleichung in geschlossener und expliziter Form niederzuschreiben. Die T-Gleichung (Wodnar) lautet (' bedeutet hier die Ableitung nach der Variablen φ):

$$T'' + \frac{\left(e \cos(\varphi) + \frac{1}{(T^2 + \frac{1}{4})^{3/2}}\right) T}{e \cos(\varphi) + 1} = 0 \quad (57)$$

Entwickelt man (57) nach der abhängigen Variable T, so erhalten wir die linearisierte Form:

$$T'' + \frac{(e \cos(\varphi) + 8) T}{e \cos(\varphi) + 1} = 0 \quad (58)$$

Verfährt man analog der Vorgehensweise in diesem Abschnitt, so erhalten wir eine äquivalente Darstellung der Spur der Transfermatrix (46) und können daher ebenso die kritischen Werte für die Exzentrizität, wie sie in der Tabelle 1 gegeben sind, finden. Zwei verschiedene Ausgangsgleichungen und voneinander unabhängige Rechenwege führen jedoch auf ein und das selbe Ergebnis! Die Methode der Amplituden und Phasenfunktion hat sich in der Literatur bewährt und stellt inzwischen ein Standardverfahren der Störungstheorie dar. Das mögliche Gegenargument bezüglich der Entwicklung nach der Exzentrizität scheint daher nicht gültig. Dennoch wird (58) im nächsten Schritt wiederum nach dem Parameter e

entwickelt, unsere Aussagen beschränken sich daher auf jeden Fall auf ein eingeschränktes Intervall von Werten in ϵ . Wie groß dieses ist hängt wiederum von der Ordnung, daher der Güte der Terme ab. Sehen wir die Übereinstimmung und sehr genaue Bestimmung der kleinen Werte als Erfolg und behalten im Hinterkopf, dass es uns nicht möglich sein kann, mit dieser Methode kritische Werte für $\epsilon \rightarrow 1$ zu finden.

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns mit der eigentlichen Problemstellung, der nichtlinearen Gleichung (9) befassen. Wir wollen unsere bisherigen Ergebnisse dafür verwenden, den linearen Teil der polynomischen Bewegungsgleichung durch die Courant & Snyder Transformation auf einen nichtlinear gestörten harmonischen Oszillator zurückzuführen. Wir erhalten somit eine Form der Differentialgleichung, die den Methoden der Störungstheorie zugänglich wird.