

1. Einleitung

Das Sitnikov System stellt einen der einfachsten Fälle des elliptischen eingeschränkten 3-Körperproblems dar. Zwei gleich schwere Punktmassen bewegen sich, aufgrund des Newtonschen Gravitationsgesetzes, auf zwei Keplerellipsen, deren gemeinsamer Fokus mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt. Ein dritter, massenloser Körper bewegt sich entlang der z-Achse normal zu der Ebene der Primärkörper und durchstößt diese im Massenmittelpunkt des Systems. Die Exzentrizität der Bahnellipsen kann alle Werte zwischen $0 \leq e < 1$ annehmen. Die Bewegung des dritten Körpers (m) ist eindimensional. Er erfährt nur eine Kraft entlang der Bewegungslinie, da die lateralen Kräfte, die von den Primärkörpern her rühren, sich exakt an der Stelle des Probekörpers aufheben.

Für den Fall verschwindender Exzentrizität der Bahnellipsen (kreisförmige Bewegung der Primärkörper) hängt die Kraft, die auf den dritten Körper wirkt, nur von der Position z ab. Der Fall ist daher integrabel und eine geschlossene Form der Lösung existiert in Form von elliptischen Jacobischen Funktionen und elliptischen Integralen. Jener Fall wurde ausführlich von MacMillan (1913) untersucht und wurde daher nach ihm benannt: Das MacMillan - Problem. Für $e > 0$ hängt die Kraft jedoch nichtlinear von der Position z und zusätzlich von der Zeit t ab. In diesem Fall wird die Hamiltonfunktion, die das System beschreibt, zeitabhängig und stellt daher nicht mehr ein Integral der Bewegung dar. Wie Moser (1973) gezeigt hat, ist das System für diesen Fall nicht mehr integrabel und chaotische Orbits existieren für ein bestimmtes Intervall von Anfangsbedingungen für den dritten Körper. Eine neue Formulierung des Problems wurde von Wodnar (1990) gefunden, wo er eine geschlossene Form der Bewegungsgleichung herleitet, indem er die unabhängige Variable des Systems, die Zeit t durch die wahre Anomalie der Primärkörper ersetzt, wodurch die Differentialgleichung in eine geschlossene Form gebracht werden kann. Die erste Herleitung einer analytischen Approximation bezüglich der Lösung des Problems wurde im gleichen Jahr von Jie Liu und Yi-Sui Sun (1990) eingeführt, indem sie die periodische Differentialgleichung durch ein autonomes Mapping ersetzt haben und somit eine Surface of Section für das System für kleine Systemparameter aufstellen konnten. Später leitete Hagel (1992) zum ersten Mal eine explizite Näherungslösung für die Differentialgleichung her, indem er die Hamiltonformulierung in den Action & Angle - Variablen J und φ benützte: Für diese zeitabhängige Hamiltonfunktion wurden anhand einer neuen Methode der Störungsrechnung zwei Quasi-Integrale gefunden, die das System für moderate Systemgrößen beschreibt. Etwa 10 Jahre darauf entwickelte Faruque (2003), basierend auf den Ergebnissen von Hagel, eine weitere Störungslösung niedriger Ordnung, die eine brauchbare Approximation einer analytischen Lösung des Sitnikovproblems für kleine Exzentrizitäten und Anfangsamplituden des dritten Körpers darstellt.

In dieser Arbeit wird ein durchgehend systematischer Weg geschaffen, mit dessen Hilfe die Resultate der Methode von Poincaré-Lindstedt (zusammen mit den Ausdrücken für die

nichtlinearen Frequenzverschiebungen) zu beliebiger Ordnung in den Systemparametern entwickelt werden können. Dies wurde möglich aufgrund der extensiven Nutzung des Computer Algebra Systems (CAS) *Mathematica* (Wolfram, 2004), welches durchgehend für alle Herleitungen und Zwischenschritte in dieser Arbeit verwendet wurde. Um die vielen Terme und Ausdrücke verarbeiten zu können, die von den Entwicklungen her rühren, war es notwendig, automatisierte und hoch modulare Algorithmen zu implementieren, um das daraus entstehende Komplexitätsproblem bewältigen zu können. Das Ergebnis ist ein vollständiges Herleitungssystem (*Sitnikov Derivation System*), welches dieser Arbeit beigelegt und im Kapitel 5 detailliert beschrieben wird. Durch die Verwendung von CAS ist es notwendig, die Ergebnisse immer wieder auf ihre Sinnhaftigkeit zu überprüfen; Leserlichkeit, Reproduktionsfähigkeit und Schnelligkeit waren daher wesentliche Kriterien für die Entwicklung der durchwegs in *Mathematica* implementierten Funktionen. Unter Verwendung dieser automatisierten Algorithmen wurde es möglich, analytische Ausdrücke für den linearisierten Fall bis zur 17. Ordnung und bis zur 7. Ordnung für den nichtlinearen Fall der Bewegungsgleichung zu entwickeln. Die dadurch erreichte Genauigkeit der Lösung $z(t)$, die sowohl von der Anfangsposition z_0 als auch von der Anfangsgeschwindigkeit z'_0 sowie der Exzentrizität e der Bahnellipsen der Primärkörper abhängt, ist die bis dato am höchsten erreichte für das oben dargestellte System.

Bemerkung zu den mathematischen Ausdrücken dieser Arbeit: Automatisierte Herleitungen und die Verwendung von CAS erzeugen oft Ausdrücke, die nicht der herkömmlichen mathematischen Notation entsprechen. Um die Lesbarkeit der Gleichungen und Formeln in dieser Arbeit zu gewährleisten, wurden die Ergebnisse mit Hilfe der in *Mathematica* bereitgestellten Funktion *TraditionalForm* in die übliche mathematische Schreibweise transformiert und zusätzlich händisch nachbearbeitet. So sollte dem Leser die Notation geläufig sein und sich nicht von herkömmlichen Textbüchern unterscheiden. Die Darstellung der Zahlen wird manchen Leser jedoch verwundern, so wird er Brüche der Form

$$(I): (187553953798498979 \cos(7 t)) / (475048202304428160 \cdot 2^{3/4})$$

finden (Bsp.: Kapitel 2, lineare Amplitudenfunktion, Anteil 7. Ordnung in e). Bei einer derartigen Darstellung scheiden sich die Geister, denn wäre es nicht lesbarer, eine numerische Approximation von (I) in der Form

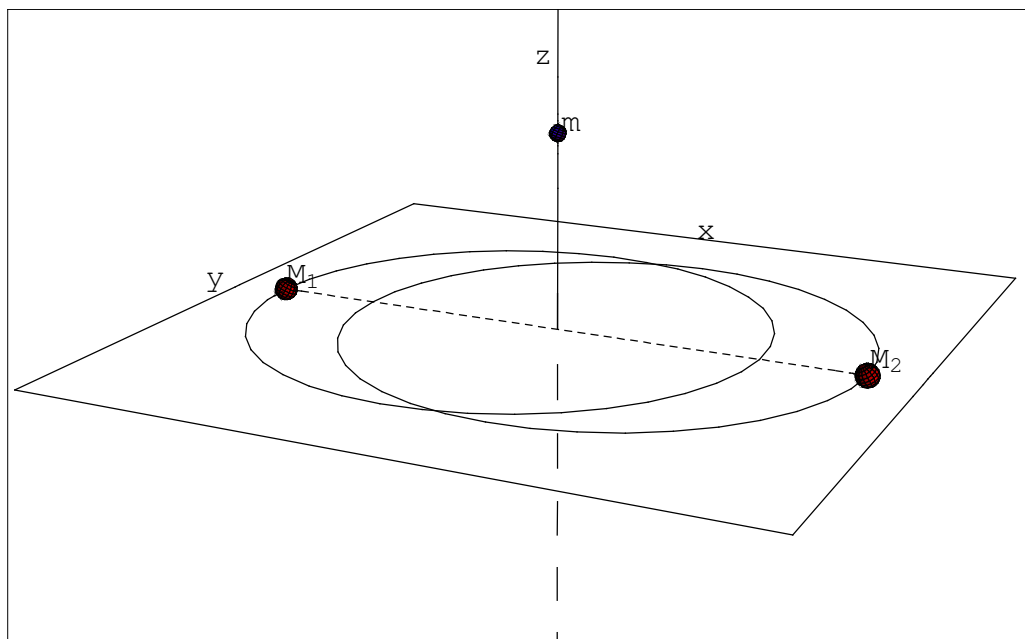
$$(II): 0.234756 \cos(7 t)$$

zu verwenden, sodass auf den ersten Blick die Größenordnung der Zahl klar ersichtlich ist? Ja und nein. Dafür spricht auf jeden Fall die Lesbarkeit, dies steht außer Frage. Es handelt sich bei der ganzzahligen Darstellung jedoch um ein mathematisch exaktes Ergebnis. Dieses ist eine aufgrund der verwendeten Störungstheorie exakt nachvollziehbare Größe, die aus den vorherigen Schritten folgt und mit voller Genauigkeit in die folgenden Schritte eingehen wird (s.d.). Durch eine zusätzliche numerische Approximation wird dieses Ergebnis verfälscht: Es wird ungenau gemacht, obwohl es das nicht ist! Zusätzlich zu dem Abbruchfehler, der aufgrund der Störungstheorie zustande kommt, würden sich numerische Fehler in der Zahlendarstellung "einschleichen", was vom mathematischen Standpunkt aus auf jeden Fall zu unterbinden ist. Möchte ich nur einen ungefähren Wert für eine Größe, einen Überblick über

die Wirkung des Terms auf die darin vorkommenden Größen, so werde ich die zweite, einfachere Darstellung wählen. Möchte ich jedoch die Mathematik dahinter verstehen, wie zum Beispiel den Einfluss der Grundfrequenz $2\sqrt{2}$ auf die einzelnen Terme der verschiedenen Ordnungen, so ist es unumgänglich Ganzzahl - Arithmetik anzuwenden. Um dennoch einen Kompromiss zu finden und beide Gruppen von Lesern zufrieden zu stellen, wurden alle Ergebnisse, die für weitere Herleitungen benötigt werden, in exakter Form (I) wiedergegeben, die rein physikalischen Resultate in die Form (II) gebracht. Mit dem bereitgestellten Herleitungssystem, welches im Anhang ausführlich beschrieben wird, sollte es einfach sein, die Ergebnisse genau in dieser Form zu reproduzieren, wie es der Leser wünscht.

1.1. Das Sitnikov Problem

Zwei gleich schwere Massen M_1 und M_2 bewegen sich auf zwei Keplerellipsen in einer Ebene um den gemeinsamen Masseschwerpunkt. Ein dritter, masseloser Körper m bewegt sich normal zu dieser Ebene auf einer Geraden und durchstößt diese im Baryzentrum. Legen wir ein kartesisches Koordinatensystem derart in das System, sodass dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt des Modellfalls zusammenfällt und sich der dritte Körper entlang der z - Achse bewegt, erkennen wir, dass sich die Bewegung der Primärkörper nur in der (x,y) - Ebene abspielt (Grafik 1).



Grafik 1: Spezielle Konfiguration des Sitnikov Problems: Zwei gleich schwere Massen $M_1 = M_2$ bewegen sich auf Keplerellipsen (im Bild mit numerischer Exzentrizität $e = 0.2$) um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems. Ein dritter, masseloser Körper m oszilliert entlang der z -Achse und durchstößt die Ebene der Primärkörper im Kräftezentrum des Systems.

Wenn nun die Exzentrizität der Bahnellipsen der schweren Massen null wird, so gelangen wir zum MacMillan System. Dieses ist, wie er schon vor fast 50 Jahren gefunden hat, integrierbar

und zeigt - abhängig von der Energie des Systems - gebundene oder nicht gebundene Lösungen.

Mit steigender Exzentrizität nimmt der Einfluss der nichtlinearen Effekte zu, der Orbit des dritten Körpers wird, obwohl er auf eine lineare Geometrie beschränkt ist, zunehmend chaotischer. Abhängig vom Abstand von der Ebene und der Position der Primärkörper während des Durchstoßes wird Energie in den dritten Körper gepumpt oder ihm im anderen Fall entzogen. Kleine Änderungen in der Ausgangssituation führen zu unvorhersagbaren Effekten, wie zum Beispiel der Stabilität der Bahn oder der Durchgangsperiode der Probemasse. Es finden sich neben ungebundenen und chaotischen Bahnen ebenso periodische und quasiperiodische. Das wichtige Resultat, das uns Sitnikov zu seiner damaligen Zeit geliefert hat, war der Beweis der Existenz einer weiteren Klasse von Lösungen im Dreikörperproblem: Nichtperiodische aber an das System gebundene Orbits. So konnte die von Chazy gestellte Frage, ob es oszillierende Lösungen im Dreikörperproblem gibt, mit ja beantwortet, und ein erster theoretische Beweis dafür gefunden werden (Sitnikov, 1962).

Die Bewegung und die Periode, sowie die Stabilität der Bahn setzt sich in erster Näherung im Wesentlichen aus einem Interferenzphänomen der Primärkörper und des dritten Körpers zusammen. In dieser Arbeit habe ich mir die Aufgabe gestellt, die periodischen und quasiperiodischen Bahnen des Systems zu finden und zu beschreiben. Dies ist keinesfalls trivial. Die Gleichung, die wir im nächsten Abschnitt aus dem Gravitationsgesetz und der speziellen Geometrie des Systems herleiten werden, scheint zwar in ihrer Form sehr einfach, ist aber eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung und zudem explizit von der Zeit abhängig. Noch hat sie keine geschlossene Form und es bedarf weiterer Überlegungen, um aus ihr die in ihr verborgene Information über die Bewegung des dritten Körpers zu gewinnen. Numerische Analysen haben in den letzten Jahren gute Resultate geliefert und viele verschiedene Facetten von nichtlinearen dynamischen Systemen aufgezeigt. Verwiesen sei auf die sehr guten Klassifikationen der einzelnen Bahnen im Phasenraum des Systems (Dvorak, 1993).

1.2. Überblick über diese Arbeit

Im nächsten Abschnitt (1.3.) wird die Bewegungsgleichung des Systems dargestellt und aus jener des allgemeinen 3-Körperproblems hergeleitet. Es wird auf die spezielle Konfiguration und ihre Auswirkungen auf die mathematische Formulierung eingegangen und daraus die nicht autonome, nicht lineare Differentialgleichung, die das Sitnikovproblem beschreibt, bestimmt. Der Abstand der Primärkörper vom Massenschwerpunkt wird durch einen klassischen Störansatz approximiert, um die Gleichung in expliziter Form darzustellen. Sie ist die Ausgangsgleichung für diese Arbeit: Eine polynomische Differentialgleichung in zwei Variablen, explizit zeitabhängig und nichtlinear in zwei Variablen z und e . Die allgemeinen Eigenschaften dieser Art von Gleichungen werden dargestellt und zwei integrable Grenzfälle des Systems werden kurz angesprochen: Zunächst der Fall für $e = 0$, für den Integrabilität garantiert ist, und dann jener für den $|z(t)| \ll r(t)$ ist. In diesem Fall können nichtlineare Terme vernachlässigt werden, und es muss nur eine einfache periodische Differentialgleichung, die nur linear von der Zeit abhängt, betrachtet werden.

Diese wird, es handelt sich um eine periodische Differentialgleichung vom Hill'schen Typus, im zweiten Kapitel anhand der Floquet Theorie behandelt, und es wird eine erste Lösung des Problems für $|z(t)| < r(t)$ präsentiert. Die verwendete Theorie wird kurz erläutert, ihre Ergebnisse und Resultate dazu benützt, die lineare Amplituden- und Phasenfunktion der Lösung des Systems zu bestimmen. Zusätzlich wird der Fall linearer Stabilität behandelt, und es werden durch einen Störungsansatz analytische Ausdrücke als Funktion der Exzentrizität e bestimmt, u.zw. indem die Elemente der Monodromen - Matrix über eine Periode der Koeffizientenfunktionen entwickelt werden. Aus der Spur dieser Matrix können allgemeine Aussagen über die Stabilität des Systems formuliert werden, und aus der Konfiguration des Systems kann sofort festgestellt werden, ob der Probekörper, in Abhängigkeit der Exzentrizität, an das System gebunden bleibt oder nicht.

Im ersten Teil des dritten Kapitels (3.1. und 3.2.) werden die Ergebnisse der linearen Theorie dazu verwendet, die nichtlineare Bewegungsgleichung des Sitnikovsystems in Form eines zweidimensionalen Polynoms in e und z der Poincaré - Lindstedt Methode zugänglich zu machen. Eine Eigenschaft der polynomen Form ist, dass sie in einen nicht linear gestörten harmonischen Oszillator unter Verwendung der "Courant & Snyder Transformation" transformiert werden kann, in der die neue unabhängige Variable die Phasenfunktion der assoziierten Hill'schen Gleichung aus dem vorigen Kapitel ist. Die Theorie hierfür wurde von Courant & Snyder (1952) entwickelt und wurde das erste Mal verwendet, um die Orbits von Partikeln in Teilchenbeschleunigern zu bestimmen. Die wesentlichen Merkmale der Methode werden erläutert und ihre Ergebnisse dazu verwendet, die Transformation an der Sitnikov'schen Bewegungsgleichung durchzuführen.

Der zweite Teil des dritten Kapitels (3.3. und 3.4.) widmet sich ausschließlich der Methode von Poincaré - Lindstedt oder auch "Methode der gedehnten Koordinaten", wie sie ebenfalls genannt wird. In diesem Kapitel wird das aufgrund der Methode gewonnene Gleichungssystem sukzessive gelöst und ein Schema erarbeitet, mit dessen Hilfe beliebige weitere Ordnungen

gewonnen werden können. Im darauf folgenden Teil des dritten Kapitels werden die erhaltenen Lösungen der einzelnen Ordnungen geschickt kombiniert und in eine Form gebracht, in der es auf einfache Weise möglich ist, die physikalischen Informationen aus den algebraischen Termen zu extrahieren. Die Lösung wird in Form einer Potenzreihe, bestehend aus 11 (im Anhang II, 24) trigonometrischen Termen gebracht und nach ihrem Einfluss auf die Gesamtlösung geordnet. Der Aufwand hierfür ist enorm und nur mit Computeralgebrasystemen durchführbar. Zum Schluss des Kapitels wird es möglich sein, die zeitabhängigen Amplituden und Phasenfunktionen der einzelnen Terme der nichtlinearen Gleichungen in einfacher Weise zu bestimmen und weiteren physikalischen Betrachtungen zu unterziehen.

Im dritten und letzten Abschnitt des 3. Kapitels (3.5.) wird die Genauigkeit und der zulässige Bereich der gewonnenen Störungslösung herausgearbeitet. Dies geschieht anhand theoretischer Überlegungen und wird mit Hilfe numerischer Experimente überprüft. Es ist möglich, einen Parameterraum der Systemgrößen zu definieren, in dem die Lösung und die davon abgeleiteten Relationen exakt sind und somit die Zuverlässigkeit des verwendeten Verfahrens angeben.

Die gefundene Lösung des Sitnikov Problems wird im ersten Abschnitt des vierten Kapitels (4.1.) mit bestehenden Lösungen aus der Literatur verglichen (Hagel, Faruque), und es zeigt sich eine hervorragende Verbesserung in der Approximationsfähigkeit der neuen Lösung dieser Arbeit. Die Lösung liefert in einem Parameterbereich $0 \leq e \leq 0.6627$ und $|z(t)| \leq 0.256$ aussagekräftige und sehr genaue Ergebnisse, und es zeigt sich, dass sie in diesem Bereich mit numerischen Untersuchungen besser übereinstimmt als in den vorangegangenen Versuchen.

Schwerpunkt des vierten Kapitels ist eine detaillierte Analyse der einzelnen Terme auf die Gesamtlösung. Die Abhängigkeit der Systemparameter bezüglich der unterschiedlichen Frequenzanteile und Amplituden wird herausgearbeitet und in Grenzfällen (4.2.) betrachtet. So ist es mit dieser Arbeit gelungen, eine neue Reihendarstellung für die Lösung des MacMillan Problems zu finden und noch nie da gewesene Analysen der Wirkung der nichtlinearen Effekte auf den Orbit des Systems durchzuführen. Es ist möglich, die dominierenden Terme von den vernachlässigbaren zu trennen und einen Einblick in die Abhängigkeit der Systemparameter in die Art und Stabilität der Lösung zu gewinnen. Es wird von den 11 Termen gerade der beherrschende untersucht, die Ergebnisse dieser Arbeit ermöglichen eine Vielzahl von weiteren Untersuchungen, um die Struktur des Sitnikovproblems zu verstehen. Im Abschluss an das vierte Kapitel (4.4.) wird auf phänomenologische Art und Weise die qualitative Struktur der Lösung untersucht und anhand ausgewählter Orbits des dritten Körpers dargestellt.

Das 5. Kapitel widmet sich der Beschreibung der Algorithmen, mit denen die Herleitungen in dieser Arbeit gemacht wurden. Die durchgehend in *Mathematica* implementierten Funktionen werden nach einer kurzen Einführung in die derzeit handelsüblichen CAS definiert, ihr mathematischer Hintergrund dargestellt und ihr Code abgedruckt. Zudem werden charakteristische Angaben über die Berechnungszeit und die Komplexität der Ausgabe der einzelnen Funktionen gemacht und weiterführende Analysen der komplexeren Algorithmen durchgeführt. Alle zusammen stellen ein komplettes Herleitungssystem dar, mit dem jede Rechnung in dieser Arbeit reproduziert werden kann: Die Darstellung wissenschaftlicher Inhalte anhand der eigenen Erfahrung durch Computer-Experimente soll dem Leser die

langwierigen Berechnungen und Herleitungen "schmackhaft" machen. Die Machbarkeit hängt nur vom verwendeten Computersystem ab und ist aus theoretischer Sicht bis zu beliebiger Ordnung durchführbar. Diese Arbeit stellt somit mehr als nur eine physikalische Abhandlung des Sitnikov Problems dar. Sie beinhaltet ein Werkzeug in sich selbst, um ihre Ergebnisse zu reproduzieren, und bietet somit dem interessierten Leser die Möglichkeit, mit den Resultaten zu experimentieren und ihre Eigenschaften auf spielerische Weise zu erlernen. Die Implementation des Herleitungs - Systems (*Sitnikov Derivation System*) in der Sprache von *Mathematica* kann auf der beiliegenden CD gefunden werden.

Der Anhang beschreibt das im Zuge der Arbeit entstandene Package *Sitnikov Derivation System*, mit dem es möglich ist, alle Ergebnisse, die in dieser Arbeit beschrieben sind, am Computer selbst zu reproduzieren. Im Anschluss werden die wesentlichen Ergebnisse der Herleitungen in kompakter Form noch einmal zusammengestellt. Alle Reihendarstellungen, die während der Kapitel nur für moderate Ordnungen ausgeführt wurden, finden sich hier für große Ordnungen wieder und ermöglichen somit die Reproduktion der Grafiken und Aussagen dieser Arbeit.

1.3. Mathematische Formulierung des Systems

Ausgangspunkt für das System ist das allgemeine Dreikörperproblem. Wir verwenden nicht relativistische Mechanik und legen daher die Newtonschen Gesetze und Formalismen zu Grunde.

1.3.1. Herleitung der Bewegungsgleichungen

Das Sitnikovsystem ist ein spezieller Fall des eingeschränkten Dreikörperproblems. Mit Hilfe der Symmetrien, die es aufgrund der speziellen Konfiguration gibt, werden wir jedoch die notwendigen 9 vektoriellen Differentialgleichungen auf 3 zurückführen können. Wir verwenden die klassische, nicht relativistische Beschreibung des Systems. Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz ergibt sich im Dreikörperproblem die Kraft bezüglich des i -ten Körpers zu:

$$K_i = -G \sum_{k \neq i, k=1}^3 m_i m_k \frac{(r_i - r_k)}{\Delta_{i,k}^3} \quad (1)$$

wobei r_i der Abstand der i -ten Masse vom Ursprung ist und $\Delta_{i,j}$ den relativen Abstand zwischen den Massen i und j bezeichnet. Dieser ist in kartesischen Koordinaten über die Beziehung des euklidischen Abstands gegeben durch:

$$\Delta_{i,k} = \sqrt{((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2)} \quad (2)$$

Für die drei Körper ergeben sich anhand (1) in vektorieller Form nach Kürzen der i -ten Masse aus der i -ten Gleichung die Bewegungsgleichungen in vektorieller Form:

$$r_1'' = -G \left(\frac{m_2 (r_1 - r_2)}{\Delta_{1,2}^3} + \frac{m_3 (r_1 - r_3)}{\Delta_{1,3}^3} \right) \quad (3.1)$$

$$r_2'' = -G \left(\frac{m_1 (r_2 - r_1)}{\Delta_{2,1}^3} - \frac{m_3 (r_2 - r_3)}{\Delta_{2,3}^3} \right) \quad (3.2)$$

$$r_3'' = -G \left(\frac{m_1 (r_3 - r_1)}{\Delta_{3,1}^3} + \frac{m_2 (r_3 - r_2)}{\Delta_{3,2}^3} \right) \quad (3.3)$$

Aus der speziellen Konfiguration wissen wir, dass $r_1 = -r_2$ ist. Es reicht daher aus, nur eine der beiden ersten Vektorgleichungen (3.1 oder 3.2) zu lösen. Da $m_3 = 0$ ist, fällt zusätzlich überall der zweite Term, der die Kraftwirkung zwischen dem dritten auf die Primärkörper beschreibt, weg. Wir wissen, dass die z-Komponente von r_1 und r_2 für alle Zeiten null bleibt, ebenso die x- und y-Koordinate des dritten Körpers. Somit reduziert sich das System um weitere 3 Bewegungsgleichungen. Es bleiben daher 3 von den 9 Komponenten des Systems übrig. Eine für die x-Komponente des ersten Körpers, eine zweite für die y-Komponente von diesem, sowie eine einzige für die z-Richtung des dritten Körpers. Setzt man die Gravitationskonstante G in den verbleibenden Gleichungen gleich 1, so erhalten wir nach Einsetzen von (2) in (3.1), (3.2) und (3.3) die verbleibenden Komponenten des Gleichungssystems:

$$x_1'' = - \frac{2 m_2 x_1}{(4 x_1^2 + 4 y_1^2)^{3/2}} \quad (4.1)$$

$$y_1'' = - \frac{2 m_2 y_1}{(4 x_1^2 + 4 y_1^2)^{3/2}} \quad (4.2)$$

$$z_3'' = - \frac{m_1 z_3}{(x_1^2 + y_1^2 + z_3^2)^{3/2}} - \frac{m_2 z_3}{(x_1^2 + y_1^2 + z_3^2)^{3/2}} \quad (4.3)$$

und die zusätzlichen Bedingungen für die verbleibenden Koordinaten:

$$z_1 = z_2 = x_3 = y_3 = 0 \quad (5.1)$$

$$x_2 = -x_1 \quad (5.2)$$

$$y_2 = -y_1 \quad (5.3)$$

Es ist uns daher möglich, mit Hilfe der Beziehungen (5.1) - (5.3), sowie den Gleichungen (4.1) - (4.3) die zeitliche Entwicklung des System vollständig zu beschreiben. Für den Fall des klassischen Sitnikovproblems wählen wir die Zeit derart, dass ein Umlauf der Primärkörper 2π beträgt und normieren die Einheitsmasse, damit $m_1 = m_2 = 1/2$ wird. Ersetzen wir in den Bewegungsgleichungen zusätzlich $x_1^2 + y_1^2$ durch $r(t)^2$ und berücksichtigen wir die Tatsache, dass $r(t) > 0 \forall t$ bleibt, so ergibt sich das System (4.1 - 4.3) zu:

$$x_1'' = - \frac{x_1}{8 r(t)^3} \quad (6.1)$$

$$y_1'' = -\frac{y_1}{8 r(t)^3} \quad (6.2)$$

$$z_3'' = -\frac{z_3}{(r(t)^2 + z_3^2)^{3/2}} \quad (6.3)$$

Da der dritte Körper masselos ist, spüren die Primärkörper seine Wirkung nicht. Die Gleichungen für x_1 und y_1 beschreiben daher den klassischen Fall des ungestörten Zweikörperproblems (Stumpff 1959) und sind leicht zu lösen. Lenken wir unser Augenmerk auf die letzte der drei Gleichungen. Wir setzen $z = z_3$ und erhalten die Bewegungsgleichung des klassischen Sitnikov Problems:

$$z'' + \frac{z}{(r(t)^2 + z^2)^{3/2}} = 0 \quad (7)$$

mit der zeitabhängigen Hamiltonfunktion ($v=z'$):

$$H(z, v, t) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r(t)^2}} \quad (8)$$

Das System ist nichtlinear und explizit von der Zeit abhängig. Es kann daher nicht integrabel sein und zeigt chaotisches Verhalten für entsprechende Anfangsbedingungen (Moser, 1973). Betrachten wir jedoch nur die an das System gebundenen Lösungen, so ist es, unter der Voraussetzung $|z(t)/r(t)| < 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$ möglich, diese nach der abhängigen Variablen z zu entwickeln. Das Ergebnis ist eine Taylorreihe um die Amplitude z . Wir erhalten somit eine polynomische Darstellung der Bewegungsgleichung (7) des dritten Körpers:

$$z'' + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{z^{2k+1}}{r(t)^{2k+3}} = 0 \quad (9)$$

Der explizit zeitabhängige Abstand der Primärkörper $r(t)$ vom gemeinsamen Massenschwerpunkt ergibt sich aus der Lösung des Keplerproblems. Dies lässt sich durch folgende Differentialgleichung formulieren:

$$r'' = \frac{1 - e^2}{16 r^3} - \frac{1}{8 r^2} \quad (10)$$

Der Parameter e kennzeichnet die numerische Exzentrizität der Ellipsenbahnen, für welche $0 \leq e < 1$ gilt. Sie ergibt sich aus dem Verhältnis der großen zur kleinen Halbachse und kann frei gewählt werden. Die Lösung des elliptischen Keplerproblems (10) ist bekanntlich:

$$r(t) = \frac{1}{2} (1 - e \cos(u(t))) \quad (11.1)$$

wobei $u(t)$ durch die Lösung der transzendenten Keplergleichung gegeben ist:

$$u(t) = e \sin(u(t)) + (t - t_0) \quad (11.2)$$

Wir setzen die Periheldurchgangszeit $t_0 = 0$. Die Primärkörper befinden sich daher zum Zeitpunkt $t = 0$ im Aphel, somit bei r_{\max} . Im Fall von negativer Exzentrizität im Perihel, daher bei r_{\min} . Wir erweitern nun die Klasse der möglichen Bahnen im Sitnikovproblem auf das Doppelte, indem wir negative Exzentrizitäten formal zulassen und damit in Zukunft ein Starten der Primärkörper in ihrer nahesten Position meinen.

Die implizite Form von (11.2) verhindert, dass wir unsere Bewegungsgleichung explizit niederschreiben können. Dieses Problem kann beseitigt werden, indem man eine neue unabhängige Variable einführt: Transformiert man die Zeit auf die wahre, mittlere oder exzentrische Anomalie, so kann eine geschlossene Form der Ausgangsgleichung gefunden werden. Die Herleitung bezüglich der wahren Anomalie ist in der Arbeit (Wodnar, 1990) zu finden. Wir wollen jedoch einen anderen Weg gehen und die Exzentrizität als Störparameter ansehen. Es ist möglich, approximativ eine explizite Form der Keplergleichung zu finden, indem wir uns auf einen eingeschränkten Parameterbereich in e beschränken. Im Wesentlichen werden wir eine Taylorreihe der iterierten Form von (11.2) konstruieren und in die Lösung für den Abstand (11.1) einsetzen. Verschiedene Lösungsansätze hierfür können in der Literatur (Stumpff 1965) gefunden werden. Tatsache ist, dass $r(t)$ in Form einer Taylorreihe um den Parameter e entwickelt werden kann:

$$r(t, e) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^k + 1 \right) \quad (12)$$

Die Konvergenz der Reihe ist gesichert, wenn wir $|e| < 1$ verlangen. Die Näherung ist jedoch nicht auf dem ganzen Intervall perfekt, eine ausführliche Analyse hierzu kann in der Arbeit (Plummer, 1960) gefunden werden. Wie gut die genäherte Form ist, wird ebenfalls ausführlich in Abschnitt 3.5. diskutiert. Ein einfacher Algorithmus, die zunächst unbekannten Koeffizientenfunktionen r_k zu bestimmen, sieht wie folgt aus: Entwickle die n -fach iterierte Gleichung (11.1) nach dem Parameter e bis zur n -ten Ordnung und ordne die dabei auftretenden Produkte und Summen von trigonometrischen Termen nach ihren Argumenten.

Gehen wir von der 7-fach iterierten Form der Keplergleichung aus und betrachten den e -abhängigen Teil:

$$r(t, e) = \frac{1}{2} (1 - e \cos(t + e \sin(t + e \sin(t + \dots)))) \quad (13)$$

Die Taylorreihe einer Funktion $r(t, e)$ nach der Variablen e ergibt sich bekanntlich bis zur 7-ten Ordnung zu:

$$r(t, e) = r(0) + r'(0) e + \frac{1}{2} r''(0) e^2 + \frac{1}{6} r^{(3)}(0) e^3 + \frac{1}{24} r^{(4)}(0) e^4 + \frac{1}{120} r^{(5)}(0) e^5 + \frac{1}{720} r^{(6)}(0) e^6 + \frac{r^{(7)}(0) e^7}{5040} + O(e^8) \quad (14)$$

Es ist daher notwendig, die Ableitungen von r nach dem Parameter e zu bilden. Die dabei auftretenden Potenzen und Produkte der trigonometrischen Funktionen werden ausgeführt und durch ihre äquivalenten Darstellungen in Form kombinierter Argumente umgeschrieben.

Der Algorithmus *PrimariesDistance* automatisiert die Herleitungen und Umformungen bis zu beliebiger Ordnung. Dieser wird in Kapitel 5 beschrieben. Die Koeffizientenfunktionen r_i für $i = 1..7$ ergeben sich anhand (13) und (14) zu:

$$r_0(t) = \frac{1}{2} \quad (15.0)$$

$$r_1(t) = -\cos(t) \quad (15.1)$$

$$r_2(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)) \quad (15.2)$$

$$r_3(t) = \frac{3}{8} (\cos(t) - \cos(3t)) \quad (15.3)$$

$$r_4(t) = \frac{1}{3} (\cos(2t) - \cos(4t)) \quad (15.4)$$

$$r_5(t) = \frac{1}{384} (-5) (2 \cos(t) - 27 \cos(3t) + 25 \cos(5t)) \quad (15.5)$$

$$r_6(t) = \frac{1}{80} (-5 \cos(2t) + 32 \cos(4t) - 27 \cos(6t)) \quad (15.6)$$

$$r_7(t) = (7 (5 \cos(t) - 729 \cos(3t) + 3125 \cos(5t) - 2401 \cos(7t))) / 46080 \quad (15.7)$$

Brechen wir zusätzlich die Summe in der Bewegungsgleichung (7) bei $k = 7$ ab und setzen für den Abstand der Primärkörper (12) gegeben durch (15.0)-(15.7) ein, so erhalten wir nach einer weiteren Entwicklung nach e eine polynomische Differentialgleichung in der Amplitude z und der Exzentrizität e . Vernachlässigen wir Terme $e^n z^m$, für die $n+m \geq 7$ sind, so ergibt sich daraus die approximierte Bewegungsgleichung des Sitnikovproblems:

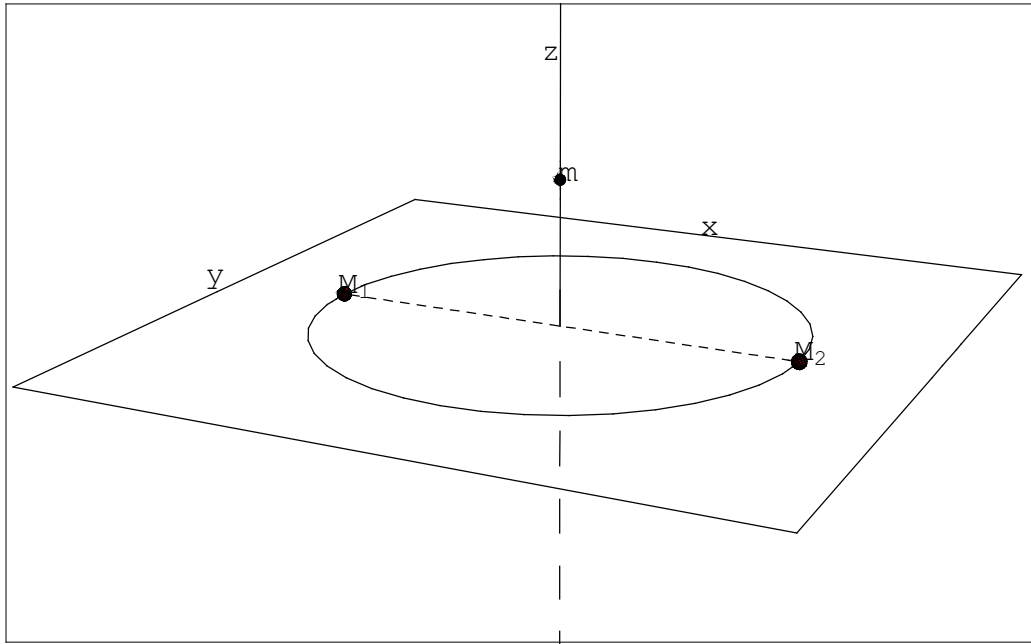
$$\begin{aligned} z'' + z & \left(8 + 24 \cos(t) e + (36 \cos(2t) + 12) e^2 + \right. \\ & (27 \cos(t) + 53 \cos(3t)) e^3 + (28 \cos(2t) + 77 \cos(4t) + 15) e^4 + \\ & \left(\frac{261 \cos(t)}{8} + \frac{393}{16} \cos(3t) + \frac{1773}{16} \cos(5t) \right) e^5 + \\ & \left(\frac{141}{4} \cos(2t) + \frac{129}{10} \cos(4t) + \frac{3167}{20} \cos(6t) + \frac{35}{2} \right) e^6 \Big) + \\ & z^3 (-48 - 240 \cos(t) e + (-480 \cos(2t) - 240) e^2 + \\ & (-810 \cos(t) - 870 \cos(3t)) e^3 + (-1240 \cos(2t) - 1490 \cos(4t) - 630) e^4) + \\ & z^5 (240 + 1680 \cos(t) e + (4200 \cos(2t) + 2520) e^2) \\ & - 1120 z^7 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Gleichung (16) stellt die Basis für die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit dar. Sie approximiert die Bewegung des dritten Körpers für Exzentrizitäten und einem

Amplituden/Abstand - Verhältnis kleiner 1 bis zur 7-ten Ordnung bezüglich dem Produkt der Störparameter, der Exzentrizität e und der Amplitude z . Die Approximation 13. Ordnung findet sich im Anhang, für beliebige weitere Ordnungen kann der Algorithmus *PolynomialEquation* (beschrieben in Kapitel 5) verwendet werden.

1.3.2. Ein integrierbarer Fall - Das MacMillan Problem

Das MacMillan Problem stellt den einfachsten Fall des Sitnikov Systems dar.



Grafik 2: Das MacMillan Problem stellt den einfachsten Fall des Sitnikovproblems dar. Die Exzentrizität der Bahnellipsen der Primärkörper ist Null, die Körper bewegen sich auf einer Kreisbahn um das gemeinsame Baryzentrum.

Die Lösung 0-ter Ordnung ($e = 0$ und $m = 1$) entspricht dem Fall des harmonischen Oszillators und ergibt sich daher zu:

$$z_0(t) = z_0 \cos(2\sqrt{2} t) + \frac{v_0 \sin(2\sqrt{2} t)}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

Hierbei stellt z_0 die Anfangsamplitude und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des dritten Teilchens dar. Dieser einfachste Fall beschreibt die Lösung des Sitnikov Problems für den Fall von Kreisbahnen der Primärkörper (der gemeinsame Schwerpunkt fällt mit dem Mittelpunkt zusammen) und kleinsten Auslenkungen des dritten Körpers $|z(t)| \ll 1$.

Die Lösung für größere Amplituden liegt in Form elliptischer Integrale vor und wurde erstmals von MacMillan (1913) hergeleitet. Dieser einfachste Fall des Sitnikovproblems ist nach ihm benannt. Die Grundfrequenz der Lösung $2\sqrt{2}$ ist charakteristisch für das System und wird sich in den weiteren Berechnungen häufig wieder finden. Verwiesen sei hier auch auf das Kapitel 4, wo eine alternative Methode dargestellt wird, die Lösung des zirkularen Problems

zu finden und anhand einer kompakten und aussagekräftigen Potenzreihe um die Störparameter zu approximieren.

Die Hamiltonfunktion des ungestörten Falls ist eine Konstante. Für $e = 0$ ist das System daher integrabel. Die periodischen Lösungen sind von invarianten Tori umgeben, die durch die Phasenraumlinien der konstanten Hamiltonfunktion definiert sind:

$$H(z, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}} \quad (18)$$

Für kleine Exzentrizitäten folgt aus dem KAM - Theorem, dass die meisten Tori erhalten bleiben. Die Aufgabe dieser Arbeit soll sein, diese durch Störungsentwicklung zu finden sowie deren Stabilität in Abhängigkeit der Exzentrizität, der Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit des dritten Körpers zu bestimmen. Des weiteren sollen Zusammenhänge zwischen den Systemparametern hergeleitet werden und für ein tieferes physikalisches Verständnis für nicht integrable Systeme der Form (1) sorgen. Für die Stabilitätsanalyse werden wir im nächsten Kapitel den linearen Teil von Gleichung (16) genauer untersuchen. Dieser entspricht in Form einer Gleichung vom Hill'schen Typus und kann daher mittels Floquet - Theorie behandelt werden. Sie eignet sich ausgezeichnet dazu, Stabilitätskriterien für das System herzuleiten und eine erste Lösung 1. Ordnung für die spätere nichtlineare Analyse zu gewinnen. In dieser Arbeit werden wir nur jene theoretischen Aspekte der Theorie herleiten, die für unsere Berechnungen notwendig sind. Eine weiterführende und kompakte Darstellung hierfür kann z.B. in Zwillinger (1957) gefunden werden.

