

4. Physikalische Darstellung der Lösung

Dieses Kapitel widmet sich ausschließlich der physikalischen Interpretation dieser Arbeit. Während im ersten Abschnitt die Lösung mit den in der Literatur bestehenden Ergebnissen verglichen wird, werden im zweiten Abschnitt Grundfrequenz und Phase des Sitnikov Problems hergeleitet. In Abschnitt 4.3. wird der Grenzfall des MacMillan Problems untersucht und in Anschluss der limitierende Fall der Störungslösung für $e \rightarrow 1$ kurz dargestellt. Die im vorherigen Kapitel konstruierte Störungslösung macht es möglich, die Abhängigkeit der Lösung von den Systemparametern zu erkennen und im Unterschied zu numerischen Simulationen für eine unendliche Klasse von Systemkonfigurationen zu studieren. Im Anschluss an dieses Kapitel sind ausgewählte Orbits des Sitnikov Problems für verschiedene Exzentrizitäten dargestellt und ermöglichen somit einen Einblick in die Struktur der quasiperiodischen und oszillierenden Orbits des Sitnikov Problems.

4.1. Vergleich mit bestehenden Lösungen aus der Literatur

Die Idee, die hinter dieser Arbeit steckt, basiert im wesentlichen auf den Ergebnissen von Hagel (1992) und Faruque (2003). Während Hagel das erste Mal die Floquet Theorie und die Courant und Snyder Transformation dazu benützt, um ein himmelsmechanisches Problem zu lösen, greift Faruque 10 Jahre später diesen Faden wieder auf, um das Sitnikov Problem ein weiteres Mal zu studieren. In beiden Arbeiten wird die Bewegungsgleichung zunächst auf polynomische Form in z und e gebracht, um sie weiteren Analysen zugänglich zu machen. Im Unterschied zur vorliegenden Lösung beschränken sich beide auf eine Approximation in z und e der Ordnung 4, während in dieser Arbeit bis zur 13. Ordnung, für die linearisierte Form sogar teilweise bis zur 17. Ordnung in e gegangen wird. Anhand der zur Verfügung gestellten Algorithmen ist es ohne weiteres möglich, die Ordnungszahl noch weiter zu erhöhen, jedoch scheint dies vom physikalischen Standpunkt aus nichts Neues mehr zu bringen, wie nachfolgend gezeigt werden wird.

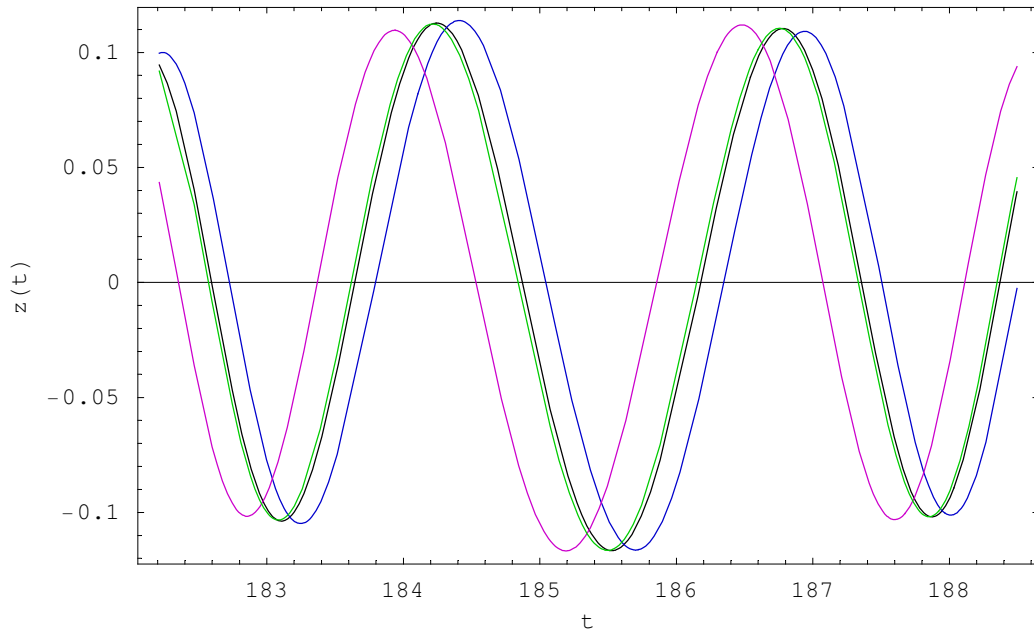
Die Analyse der linearisierten Gleichungen der verschiedenen Arbeiten zu vergleichen, ergäbe keinen Sinn, da es klar ist, mit einer Erhöhung der Ordnung genauere Ergebnisse zu erzielen. Die Wege in den drei Arbeiten (Hagel, Faruque & Lhotka) folgen der selben Idee, die linearisierte Form gemäß der Floquet - Theorie zu bearbeiten und ein Stabilitätskriterium anhand der Spur der Abbildungsmatrix R zu gewinnen. Die Ausdrücke, die in dieser Arbeit konstruiert wurden, insbesondere jene der mittleren Frequenz (43) des dritten Körpers, sowie die Spur von R (46) wurden im Vergleich zu den anderen Arbeiten genauer bestimmt und dienen somit einer besseren Vorhersagbarkeit der qualitativen Entwicklung des Systems. Eine physikalische Interpretation der Ergebnisse findet sich dort (Kapitel 2) und liefert Aussagen über die Stabilität der Bahn, mittlere Periode und Phasenverschiebung der einzelnen Orbits in Abhängigkeit der Exzentrizität e .

Interessant wird es, wenn es darum geht die verschiedenen Ansätze bezüglich der nichtlinearen polynomischen Form zu studieren und zu vergleichen. In allen drei Arbeiten wird wie bei Hagel die Courant & Snyder - Transformation dazu verwendet, die gestörte Hill'sche Differentialgleichung auf die Form eines nichtlinear gestörten harmonischen Oszillators zu bringen. Während Hagel über die Hamiltonfunktion des Systems zwei Quasi - Integrale der Wirkungsvariablen (J und φ) bestimmt und aus diesen über einfache Iteration explizite Ausdrücke für die Bewegung des dritten Körpers herleitet, verwendet Faruque einen direkten Störansatz, eine weitere Courant & Snyder Transformation, sowie die Methode von Poincaré - Lindstedt, um das Problem zu lösen. Die Problematik, die aus diesem Ansatz resultiert, ist das Auftreten von Gleichungen, die schwieriger zu lösen sind, als die Ausgangsgleichung des Systems. Ihm bleibt in seiner Arbeit daher nichts anderes übrig, als zusätzliche Vereinfachungen anzunehmen, was unweigerlich dazu führt, dass es ihm nicht möglich ist, alle Terme in den Verlauf der Rechnungen einzubeziehen und somit eine exakte Störungsrechnung durchzuführen.

Die vorliegende Arbeit hält an dem Prinzip, alle Terme in die Berechnungen bis zum Schluss mitzunehmen fest, und bietet die Möglichkeit, die Courant & Snyder - transformierte Gleichung bis zu beliebiger Ordnung auf zu stellen und zu lösen. Die Anwendung der Methode der gedehnten Koordinaten auf eine nichtlineare, explizit von der Zeit abhängige Differentialgleichung führt zwar auf komplex verschachtelte Gleichungen, die jedoch elementar durch das Auffinden von Integralen gelöst werden können. Der Trick, warum die Methode funktioniert, steckt in der richtigen Anordnung der Terme der Ausgangsgleichung, wie wir es durch das Einführen des Parameters λ erreicht haben. Geschieht dies nicht, führt die Methode zu unbrauchbaren Ergebnissen.

Außer Konkurrenz steht die Tatsache, dass unsere Störungslösung, im Gegensatz zu jenen von Hagel und Faruque, für beliebige Anfangsbedingungen $z(0)$, $z'(0) \neq 0$ verwendet werden kann und nicht von vorneherein von der Vereinfachung $z'(0) = 0$ ausgeht. Die Bestimmung der Konstanten C_2 erweist sich jedoch als trickreich, da sie gemäß ihrer Definition in (149) nur anhand einer transzendenten Gleichung gegeben ist. Für den praktischen Gebrauch erweist es sich als sinnvoll, sie rein numerisch zu bestimmen.

Zunächst werden die drei analytischen Lösungen miteinander und zusätzlich mit Ergebnissen der numerischen Integration verglichen. Diese wurden im wesentlichen mittels des Integrators *NDSolve* (*Mathematica*) erzeugt und für Testzwecke mit dem Runge Kutta Verfahren 7. Ordnung und adaptiver Schrittweite, sowie der Lie-Integrations Methode (Hanslmeier & Dvorak, 1984 oder Lichtenegger 1984) verglichen. Sehen wir uns zunächst die drei Störungslösungen im Vergleich mit der numerisch gewonnen für kleine Systemparameter ($\epsilon = z(0) = 0.1$, $z'(0) = 0$) an:



Grafik 12: Vergleich zwischen den analytisch gefundenen Lösungen des Sitnikov Problems und der "exakten" numerischen Lösung. Die Systemkonfiguration ist $e = 0.1$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$, die schwarze Kurve gibt den numerisch gefundenen Orbit, die violette jenen von Faruque, die blaue jenen der Lösung von Hagel wieder. Die grüne Kurve (unterhalb der schwarzen) stellt das Ergebnis dieser Arbeit dar und ist mit der numerisch gefundenen ident. Alle drei Störungslösungen geben in jedem Fall die qualitative Struktur der Lösung wieder.

Die Verbesserung der Genauigkeit der Störungslösung ist deutlich erkennbar. Während es bei Hagel (blauer Orbit) und Faruque (violetter Orbit) zu einer Verschiebung aufgrund des Approximationsfehlers in der Phasenfunktion kommt, stimmt die Lösung dieser Arbeit (grüner Orbit) exakt mit jener der numerisch gefundenen Lösung (schwarzer Orbit) auch nach der 29. Umlaufperiode der Primärkörper überein. Es hat sich im Laufe der Entwicklungen in dieser Arbeit gezeigt, dass besonderes Augenmerk auf die Genauigkeit der nichtlinearen Phasenfunktion gelegt werden muss. Obwohl in allen drei Versuchen der Störungstheorie, die qualitative Struktur der Lösung reproduziert wird, ist es nur mit höheren Ordnungen möglich, die numerisch gefundenen Lösungen für einen längeren Zeitraum exakt wiederzugeben.

Im folgenden werden die Ergebnisse von Hagel und Faruque der Lösung dieser Arbeit, sowie der "exakten", numerischen gegenüber gestellt und auf ihre Verwendbarkeit im Parameterraum ($e \times z_0$) überprüft.

4.1.1. Die Störungslösung von Hagel (1992)

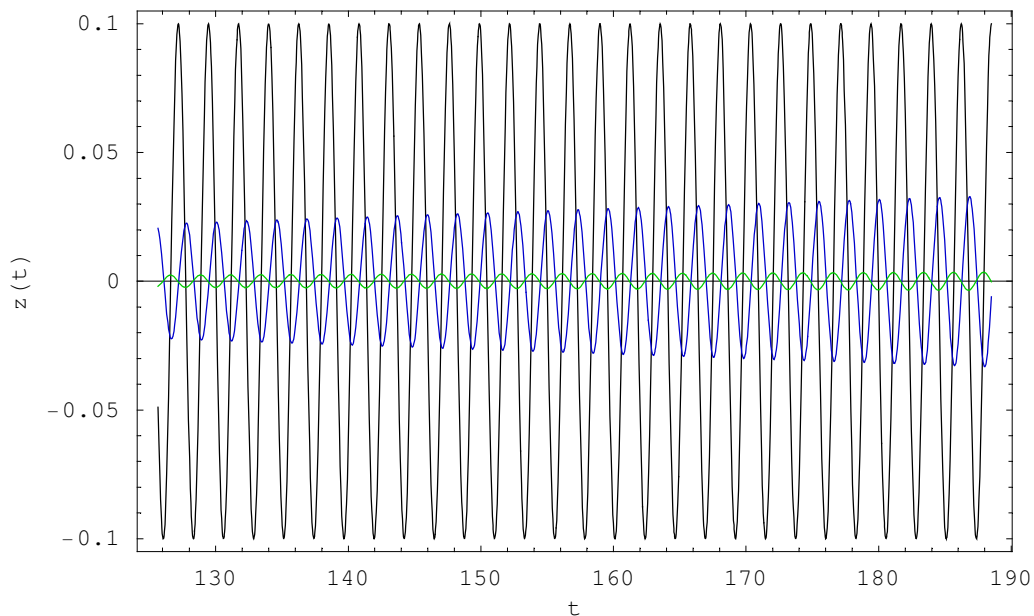
Die Störungslösung von Hagel wurde für moderate Exzentrizitäten $|e| < 0.4$, sowie Anfangsbedingungen $|z(0)| < 0.2$ entwickelt und liefert gute Ergebnisse über das gesamte Intervall. Die Lösung erfordert die Berechnung von ~ 800 elementaren Operationen und kann daher mittels Computer in annehmbarer Zeit erfolgen.

Die Lösung stimmt mit den numerisch gewonnenen (Grafik 13) für große Zeiten in einem kleinen aber zuverlässigen Bereich der Parameterebene ($e \times z_0$) überein und liefert gute und genaue Ergebnisse. Die Differenz zwischen numerischer und analytischer Lösung oszilliert um

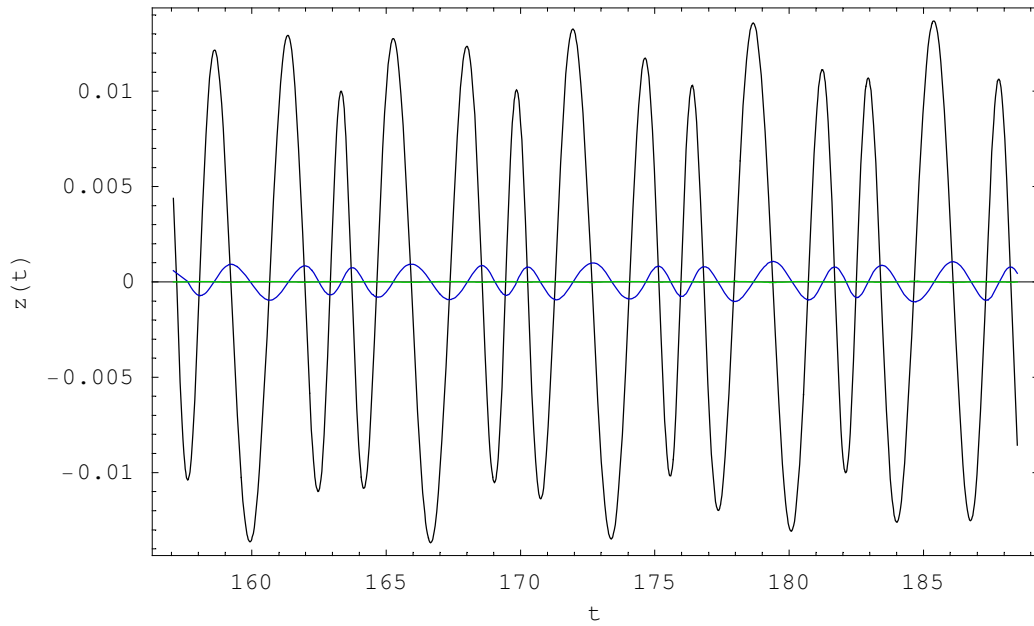
einen konstanten Mittelwert, dessen Amplitude linear mit der Zeit anwächst, und stellt somit ein aussagekräftiges Werkzeug für die Voraussage der Entwicklung des Systems in Abhängigkeit der Systemparameter dar.

Selbst größere Exzentrizitäten (Grafik 14) können mit der analytisch gefundenen Lösung gut dargestellt werden, die Amplitude darf jedoch Werte größer 0.1 hierfür nicht überschreiten. Außerhalb dieses Bereichs kommt es zu geringen Abweichungen, was nach kurzer Zeit eine Verschiebung der Lösung gegenüber der numerisch gewonnenen zur Folge hat.

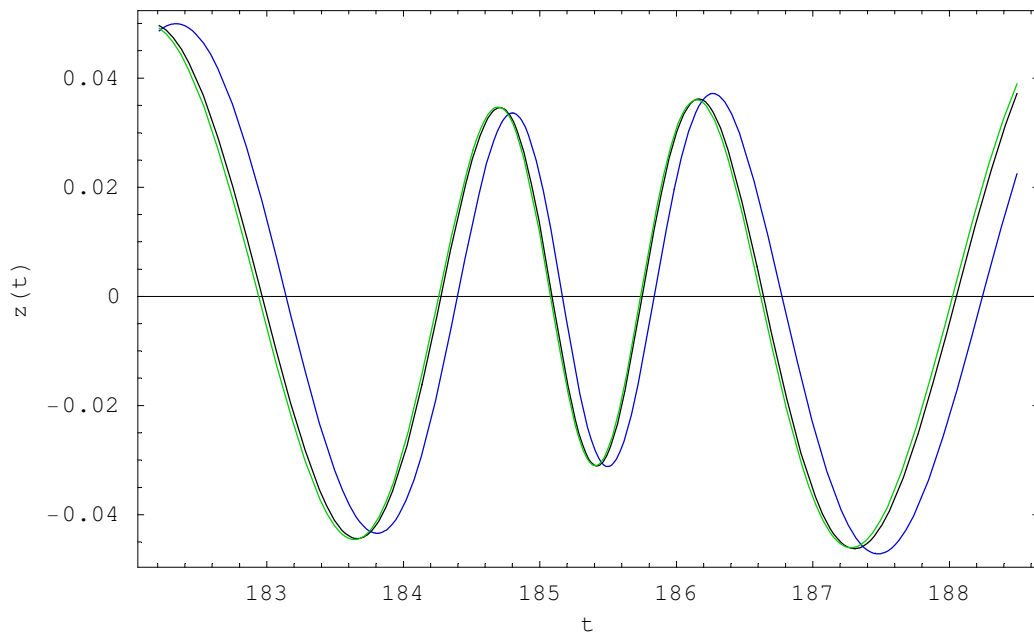
In der Detailaufnahme (Grafik 15) wird die Lösung von Hagel und Lhotka zwischen der 59. und 60. Umlaufperiode der Primärkörper verglichen. Während die in dieser Arbeit konstruierte Lösung noch immer exakt mit der numerisch gefundenen übereinstimmt, zeigen sich bei der Störungslösung von Hagel Abweichungen in der Phase, was wiederum auf den Abbruchfehler der Entwicklungen zurück zu führen ist. Obwohl die qualitative Struktur der Lösung einwandfrei wiedergegeben wird, führt die Abweichung in der Phase dazu, dass die Differenz zwischen der exakten Lösung und der analytischen nicht mehr linear sondern exponentiell anwächst.



Grafik 13: Abweichung von der numerischen Lösung der von Hagel (1992) gefundenen Lösung und der Lösung von Lhotka (2004) zwischen der 20. und 30. Umlaufperiode der Primärkörper. Die schwarze Kurve gibt das numerisch gefundene ("exakte") Signal wieder, die Abweichung von der Störungslösung von Hagel ist durch die blaue Kurve, jene von Lhotka durch die grüne Kurve gegeben. Deutlich ist die Verbesserung in der Darstellung zu sehen. Es handelt sich bei den Plot um die MacMillan - Konfiguration ($e = 0$), mit $z(0) = 0.1$, $z'(0) = 0$.



Grafik 14: Abweichung von der numerischen Lösung der von Hagel (1992) gefundenen Lösung und der Lösung von Lhotka (2004) zwischen der 20. und 30. Umlaufperiode der Primärkörper für $e = 0.2$ und $z(0) = 0.01$. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt Null. Die schwarze Kurve gibt das numerisch gefundene ("exakte") Signal wieder, die Abweichung von der Störungslösung von Hagel ist durch die blaue Kurve, jene von Lhotka durch die grüne Kurve gegeben.

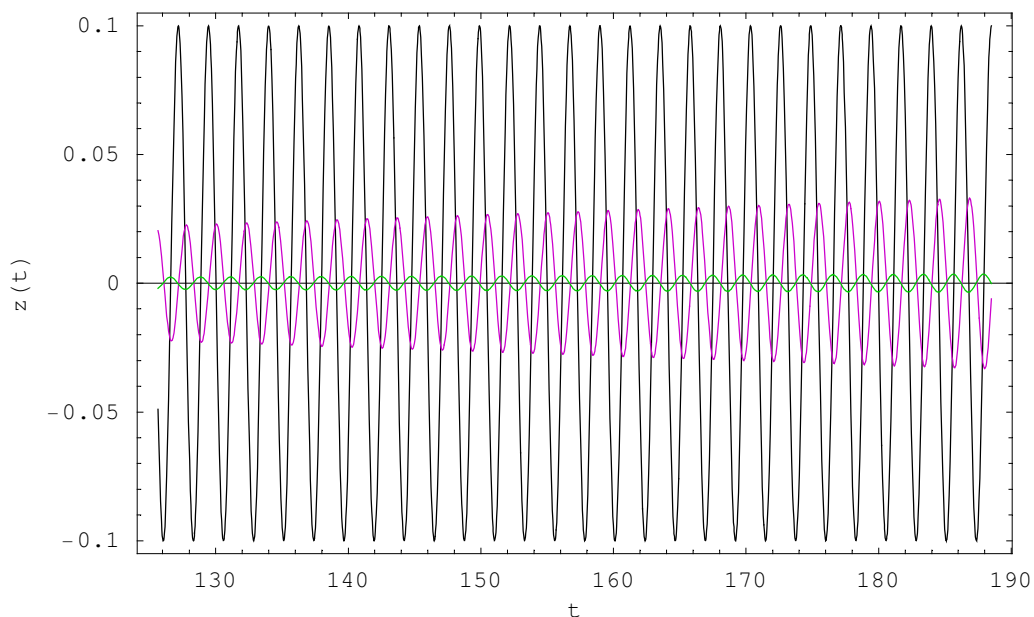


Grafik 15: Detailaufnahme der numerisch (schwarz) gefundenen und der Lösung von Hagel (blau) und Lhotka (grün). Die Abweichung ist im Abbruchfehler der Bestimmung der Phasenfunktion zu suchen und wächst entweder linear mit der Zeit an oder oszilliert um einen Mittelwert $\tilde{\Delta}$. Für die Darstellung wurde $e = -0.3$, $z(0) = 0.05$ und $z'(0) = 0$ gewählt.

4.1.2. Die Lösung von Faruque (2004)

Die Lösung von Faruque zeigt für das MacMillan Problem (Grafik 16) ein ähnliches Verhalten, wie jene von Hagel. Der Fehler oszilliert um einen konstanten Mittelwert, die Amplitude des Fehlers wächst jedoch linear an und beschränkt daher die Störungslösung auf ein kleines Zeitintervall. Im Unterschied dazu bleibt die Differenz zwischen der vorliegenden Arbeit gefundenen und der numerischen Lösung im Mittel konstant und lässt eine Anwendung für sehr große Zeitintervalle zu. Ein Zusammenbruch der Lösung für das MacMillan Problem ist daher nicht zu erwarten.

Die Lösung von Faruque liefert zwischen $|e| < 0.3$ und $|z_0| < 0.2$ gute Ergebnisse und approximiert die numerisch gefundenen Lösungen gut. Es kommt jedoch bei speziellen Konfigurationen (siehe Grafik 17) zu größeren Abweichungen von der eigentlichen Lösung, die sich dadurch äußert, dass die Differenz zwischen numerisch gewonnener und analytisch gefundener Lösung mit der Zeit größer als das eigentliche Signal wird. So stellt Grafik 17 den Fall für $e = 0.2$ und $z(0) = 0.01$ dar, was in den "sicheren" Bereich der Lösung von Faruque fallen müsste. Dennoch kommt es zu Schwierigkeiten, die möglicherweise aus einem Resonanzeffekt der Systemparameter e und z resultieren.

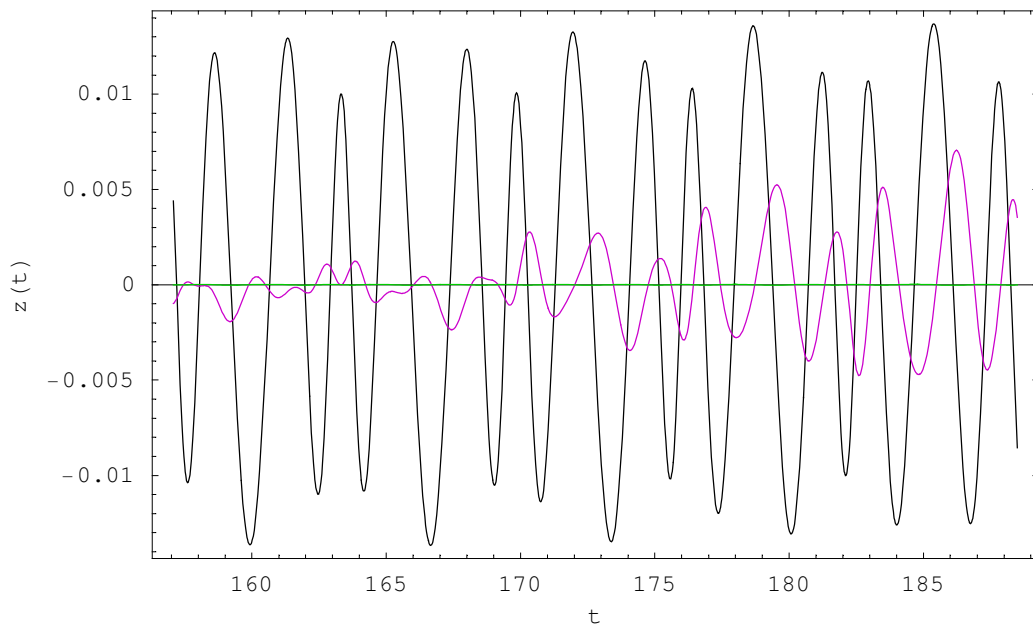


Grafik 16: Abweichung von der numerischen Lösung der von Faruque (2004) gefundenen Lösung und der Lösung von Lhotka (2004) zwischen der 20. und 30. Umlaufperiode der Primärkörper. Die schwarze Kurve gibt das numerisch gefundene ("exakte") Signal wieder, die Abweichung von der Störungslösung von Faruque ist durch die violette Kurve, jene von Lhotka durch die grüne Kurve gegeben. Deutlich ist die Verbesserung in der Darstellung zu sehen. Es handelt sich bei dem Plot um die MacMillan - Konfiguration ($e = 0$), mit $z(0) = 0.1$, $z'(0) = 0$.

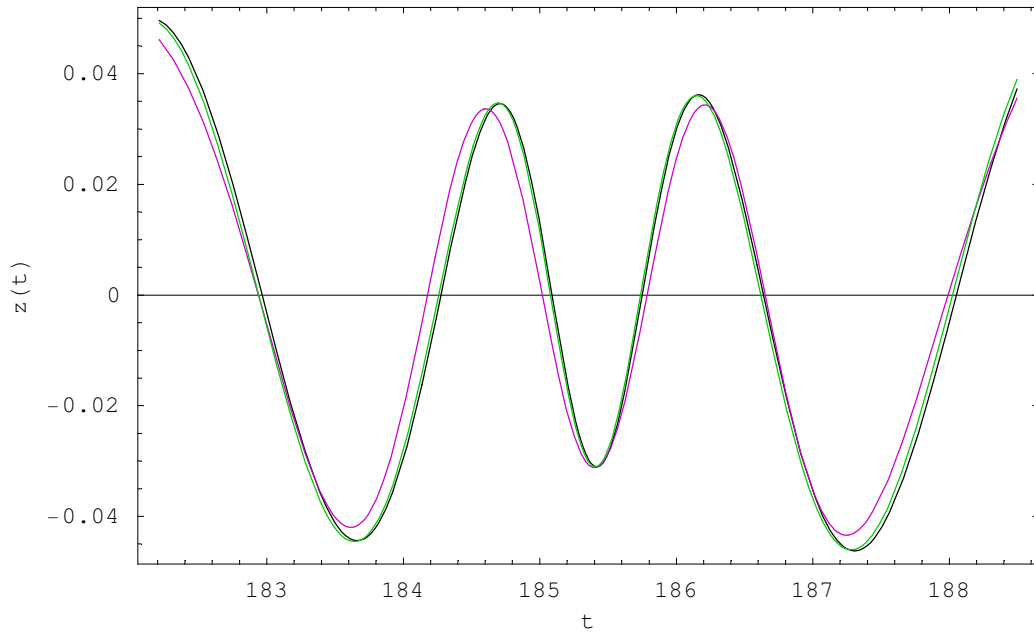
Die Detailaufnahme in Grafik 18 zeigt die Ursache für die Abweichungen der vorangehenden Grafik. Für große Zeiten gerät die Lösung außer Phase. Die Lösung von Faruque stimmt

prinzipiell mit der numerischen Lösung überein, ist aber entweder nach vorne oder nach hinten verschoben.

Alles in allem stellt der Versuch von Faruque einen interessanten neuen Versuch dar, Störungstheorie an einem nichtlinearen dynamischen System zu betreiben. Es werden allerdings auch die Probleme sichtbar, die entstehen können, wenn zusätzlich zum Abbruchfehler der endlichen Störreihen weitere Approximationen gemacht werden müssen.

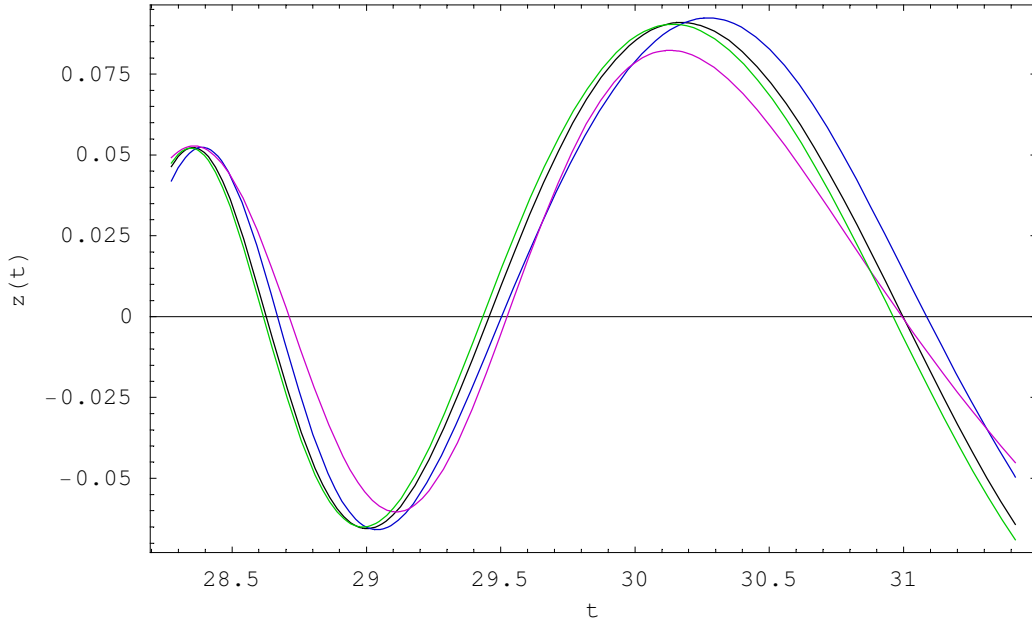


Grafik 17: Abweichung von der numerischen Lösung der von Faruque (1992) gefundenen Lösung und der Lösung von Lhotka (2004) zwischen der 20. und 30. Umlaufperiode der Primärkörper für $e = 0.2$ und $z(0) = 0.01$. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt Null. Die schwarze Kurve gibt das numerisch gefundene ("exakte") Signal wieder, die Abweichung von der Störungslösung von Faruque ist durch die violette Kurve, jene von Lhotka durch die grüne Kurve gegeben. Deutlich ist der Zusammenbruch der von Faruque verwendeten Methode zu sehen (die Abweichung wird schnell größer, als das eigentliche Signal).



Grafik 18: Detailaufnahme der numerisch (schwarz) gefundenen und der Lösung von Faruque (violett) und Lhotka (grün) zwischen der 29. und 30. Umlaufperiode der Primärkörper. Die Konfiguration : ($e = -0.3$, $z(0) = 0.05$, $z'(0) = 0$)

Zusammenfassend ist zu sagen, dass es einfach ist, bessere Ergebnisse zu erzielen, wenn man auf Arbeiten aufbauen kann, die einem bereits eine Einsicht in die Struktur des Problems liefern und zudem Lösungen verschiedener Ordnungen (Hagel ~ 4 , Faruque ~ 4 , Lhotka ~ 7) verglichen werden. Nichts desto trotz soll dieser Abschnitt vor allem eines zeigen: Es ist möglich mit Methoden der Störungstheorie, in sehr guter Übereinstimmung numerische Ergebnisse zu reproduzieren. Es ist nicht notwendig dort aufzuhören, wo Lehrbücher diese Methoden darstellen. Das Ergebnis kann aufschlussreiche Resultate liefern, die mit numerischen Mitteln nicht erreichbar sind. Grafik 19 zeigt einen "fairen" Vergleich der Lösungen für die Ordnung 4 in der Exzentrizität e und z , mit den Anfangsbedingungen $z(0) = 0.1$ und $e = -0.3$. Die in dieser Arbeit verwendete Methode zeigt daher im Vergleich ein gutes und stabiles Verhalten und erzeugt analytische Ausdrücke, die die exakten Orbits zufrieden stellend wieder geben.



Grafik 19: Vergleich der Störungslösungen von Hagel (blau), Faruque (violett) und Lhotka (grün) mit der numerisch gefundenen (schwarz) für $e = -0.4$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$ zwischen der 9. und 10. Umlaufperiode der Primärkörper. Die Ordnungen der drei Störungslösungen sind in dieser Darstellung gleich: $O(z, e)^4$

4.2. Grundfrequenz und Phase des Sitnikov Problems

Mit der gefundenen Störungslösung kann man die Entwicklung des Orbits des dritten Körpers über einen längeren Zeitraum studieren ohne die einzelnen Orbits numerisch berechnen zu müssen. Wir können Formeln für den Einfluss der Systemparameter auf die Amplitude, Frequenz und Phase der Lösung einfach aufstellen und somit einen analytischen Einblick in die Entwicklung des Sitnikov Systems in der Zeit gewinnen.

In diesem Abschnitt wollen wir sehen, wie sich die Grundfrequenz und die Phase der Lösung des Sitnikov Problems unter dem Einfluss von den nichtlinearen Effekten verändern. Da es bei dieser Betrachtung um den quantitativen Einfluss der Größen geht, werden die Resultate in Maschinengenauigkeit (16 Byte) angegeben, wie in der Einleitung besprochen. Die exakten ganzzahligen Darstellungen sind leicht mit dem im nächsten Kapitel beschriebenen *Sitnikov Derivation System* zu reproduzieren.

Die Lösung lässt sich gemäß Kapitel 3 für $z'(0) = 0$ schreiben:

$$z(t, e, z_0) = \sum_{k=1}^N A_k(t, e, z_0) \cos(f_k(\omega_s t + \varphi_s(t, e, z_0))) \quad (161)$$

Was uns interessiert ist die Kreisfrequenz der Lösung des Sitnikov Problems ω_s sowie der oszillierende Anteil der Phasenverschiebung φ_s . Diese bleiben invariant für die einzelnen Distributionen bezüglich der steigenden Ordnungen und verlangen daher nach einer

gesonderten Betrachtung. Die hier eingeführten Größen f_k sind eng mit den in Kapitel 3 definierten Phasenfunktionen verbunden und ergeben sich als k-tes Element der Reihe:

$$\begin{aligned} &2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 10\sqrt{2}, 1-6\sqrt{2}, 2-6\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2}, \\ &2-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}, 1+6\sqrt{2}, 2+6\sqrt{2}, \dots \end{aligned} \quad (162)$$

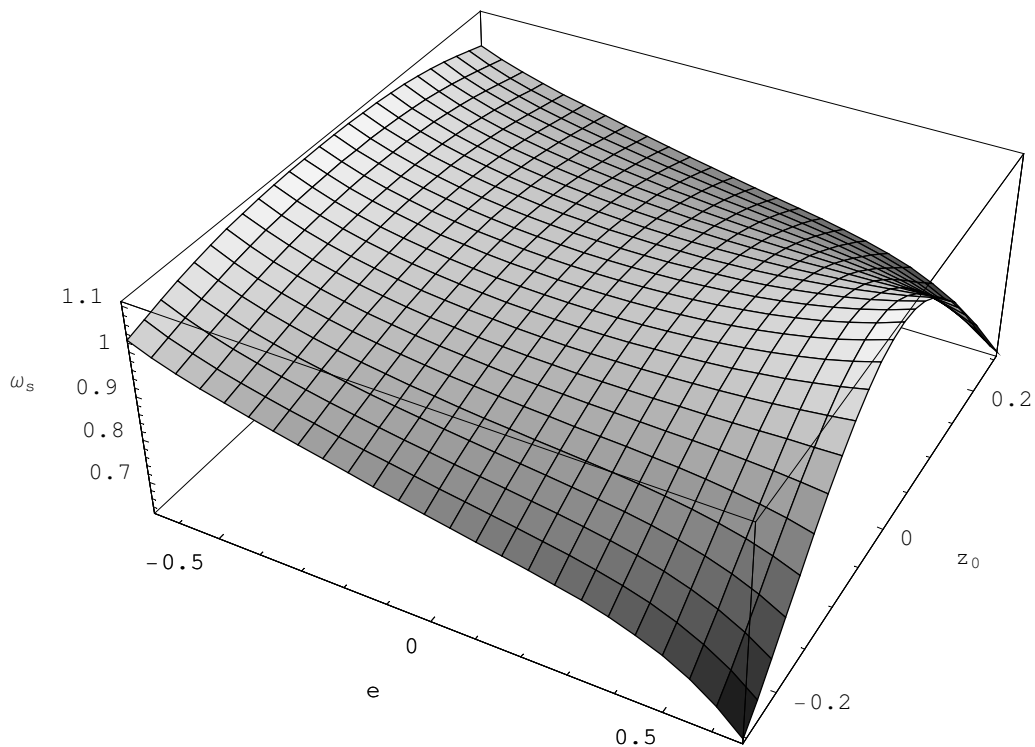
Um die Grundfrequenz des Sitnikov Problems zu bestimmen, trennen wir den nicht oszillierenden Teil von $\sigma(t)$ in (128) ab und identifizieren ihn mit ω_s . Wir ersetzen die auftretende Konstante C_1 durch z_0/w_0 , wobei w_0 die linearisierte Amplitudenfunktion aus Kapitel 2 zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Es ist notwendig ein weiteres Mal nach der Exzentrizität e zu entwickeln; unter Vernachlässigung der Terme $e^i z_0^j$ für die $i+j > 7$ erhalten wir die Grundfrequenz des Sitnikov Problems:

$$\begin{aligned} \omega_s(e, z_0) = & (1 + 0.169355 e^2 + 0.0939955 e^4 + 0.0648864 e^6 + \\ & (-2.25 - 3.48387 e - 4.9267 e^2 - 5.96876 e^3 - 7.08085 e^4 - \\ & 7.97871 e^5) z_0^2 + (7.26563 + 22.5 e + 48.2114 e^2 + \\ & 84.6373 e^3) z_0^4 + (-38.2813 - 177.823 e) z_0^6) \end{aligned} \quad (163)$$

Um die zeitabhängige Phase der Lösung zu bestimmen, schreiben wir den verbleibenden Rest von σ (den oszillierenden Anteil von (128) und finden:

$$\begin{aligned} \varphi_s(t, e, z_0) = & \sin(t) (1.54839 e + 0.0851935 e^3 + 0.158583 e^5 + 0.111659 e^7 - 3.48387 e z_0^2 - \\ & 5.39438 e^2 z_0^2 - 7.23012 e^3 z_0^2 - 8.62519 e^4 z_0^2 - 10.1885 e^5 z_0^2 + \\ & 11.25 e z_0^4 + 34.8387 e^2 z_0^4 + 73.3637 e^3 z_0^4 - 59.2742 e z_0^6) + \\ & \sin(2t) (0.889698 e^2 - 0.157446 e^4 + 0.0955413 e^6 - \\ & 2.00182 e^2 z_0^2 - 3.09959 e^3 z_0^2 - 3.69001 e^4 z_0^2 - \\ & 4.23694 e^5 z_0^2 + 6.46421 e^2 z_0^4 + 20.0182 e^3 z_0^4) + \\ & \sin(3t) (0.73153 e^3 - 0.311784 e^5 + 0.119078 e^7 - \\ & 1.64594 e^3 z_0^2 - 2.54856 e^4 z_0^2 - \\ & 2.62377 e^5 z_0^2 + 5.31502 e^3 z_0^4) + \\ & \sin(4t) (0.697392 e^4 - 0.474333 e^6 - \\ & 1.56913 e^4 z_0^2 - 2.42962 e^5 z_0^2) + \\ & \sin(5t) (0.721002 e^5 - 0.674487 e^7 - 1.62225 e^5 z_0^2) + \\ & 0.784555 e^6 \sin(6t) + 0.884313 e^7 \sin(7t) \end{aligned} \quad (164)$$

Die Darstellungen in Grafik 20 und Abbildung 21 zeigen die Geometrie der einzelnen Größen des Systems. Die Sitnikov Frequenz ω_s ist symmetrisch bezüglich der Anfangsamplitude z_0 zeigt jedoch für negatives e ein glatteres Verhalten als für den positiven Fall. Erinnern wir uns an die Asymmetrie in Grafik 11, so wird klar, wo die Ursache für die unterschiedliche Approximationsfähigkeit der Lösung zwischen dem Starten der Primärkörper im Aphel, im anderen Fall im Perihel liegt: Die Exzentrizität beeinflusst die Frequenz im positiven Fall viel stärker, der Abbruchfehler der Reihenentwicklung wirkt sich daher für diesen Fall auch stärker auf den Orbit aus.

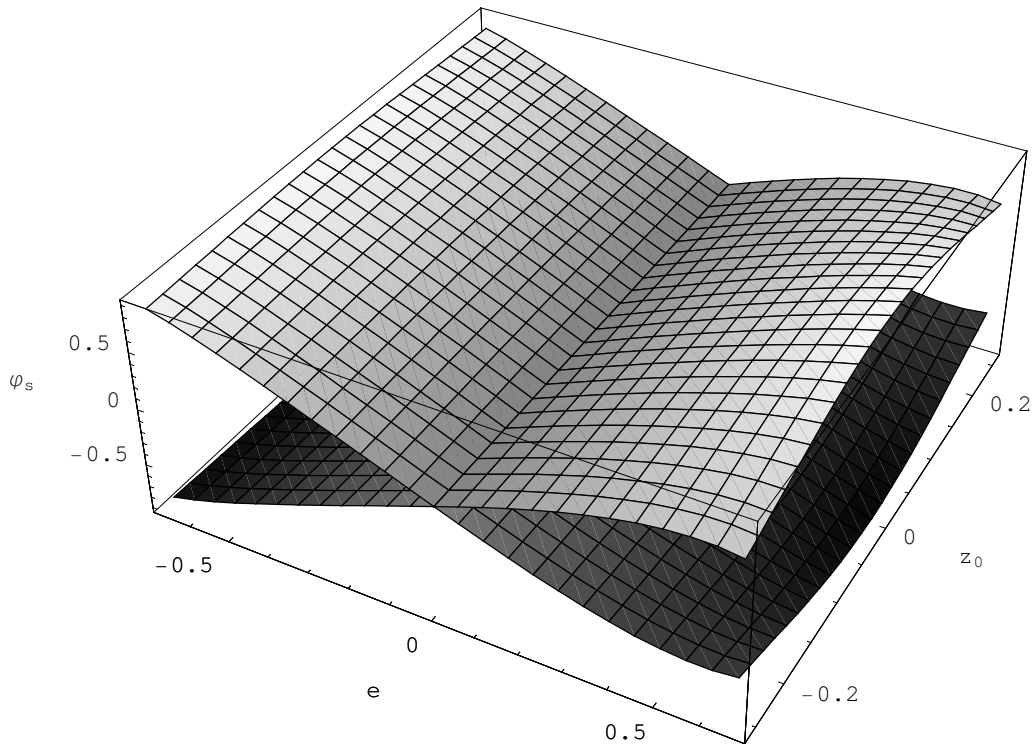


Grafik 20: Einfluss der Systemparameter e und z_0 auf die Kreisfrequenz der Lösung des Sitnikov Problems ω_s . Der Unterschied in der Geometrie zwischen positiver und negativer Exzentrizität ist die Ursache für die Asymmetrie in Grafik 11.

Der oszillierende Anteil φ_s von σ ist mit der zeitabhängigen Phasenverschiebung zu identifizieren. Diese Verschiebung wird innerhalb einer Umlaufperiode der Primärkörper maximal für $t = \pi/2$ und minimal bei $t = 3\pi/2$. Grafik 21 zeigt den Effekt der Deformierung der harmonischen Schwingung in Abhängigkeit der Systemparameter e und z_0 . Die Ebene, die im negativen Bereich für negative Exzentrizität beginnt, stellt den Fall der maximalen positiven Verzerrung, die andere Ebene den anderen Fall dar.

Es kann daher zusammenfassend festgestellt werden, dass die Entwicklung der Amplitude des dritten Körpers sehr eng mit dem Abstand der Primärkörper, daher dem Parameter e , die Frequenz und Periodendauer der Lösung mehr mit der anfänglichen Auslenkung z_0

zusammenhängt. Nichts desto trotz führen nichtlineare Effekte mit steigender Exzentrizität zu einer Durchmischung der Effekte der beiden Größen und schließlich zu einer komplexen Verbindung der im integrablen Fall trennbaren Effekte auf die Lösung des Problems.



Grafik 21: Dominierender Einfluss der Systemparameter e und z_0 auf die zeitabhängige Phase der Lösung des Sitnikov Problems. Die maximale Wirkung befindet sich an den Intervallgrenzen, sie ist in der Zeit 2π -periodisch.

Wir haben in diesem Abschnitt gerade einen von 11 Termen auf den Einfluss der Systemparameter untersucht, weitere physikalische Analysen sind analog anhand der in Abschnitt 3.4. definierten Amplituden- und Phasenfunktionen durchzuführen. Wir lenken unser Augenmerk nun auf phänomenologische Betrachtungen und versuchen damit ein Gefühl für die Entwicklung des Orbits des dritten Körpers in Abhängigkeit der Systemgrößen zu bekommen.

4.3. Grenzfälle

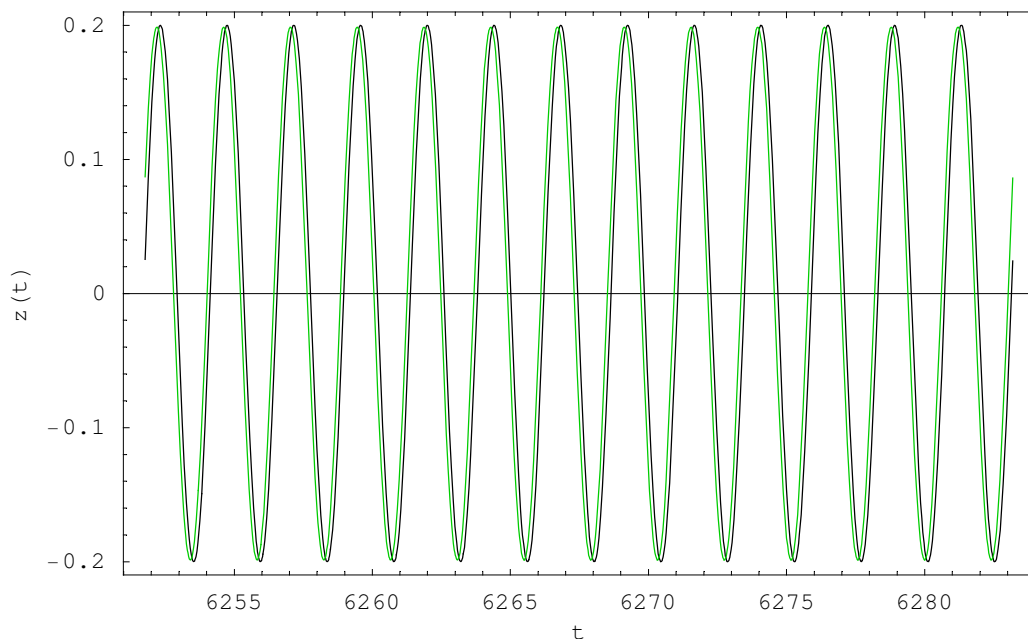
In diesem Abschnitt wird die Lösung in extremalen Parameterbereichen untersucht. Sie sind aus der Literatur bereits bekannt. Relationen für limitierende Fälle werden von der Störungslösung hergeleitet und in Zusammenhang mit den Systemparametern gebracht.

Von physikalischem Interesse ist weniger eine explizite Lösung, wie sie in der Form (135) gegeben ist. Was interessiert, ist mehr ein Einblick in den Zusammenhang und den Einfluss der Systemparameter in das System. Vor allem wichtig sind hier die Bereiche, in denen Systemparameter extremal und daher vernachlässigbar oder dominierend werden. Wie äußert

sich eine Veränderung der Exzentrizität in der Lösung, wann bleibt sie stabil und in welchen Parameterbereichen sind welche Zeitentwicklungen zu erwarten? Diese und viele andere Fragen können zwar mit einer Unzahl von numerischen Simulationen gefunden werden, können aber immer nur einen endlichen Bereich von Lösungen überdecken. Der unschlagbare Vorteil von Störungstheorie liegt vor allem darin, dass eine ganze Klasse von Lösungen auf einen Schlag behandelt werden kann. Es ist daher nicht notwendig hunderte von Lösungen zu rechnen um eine statistische Aussage über die Parameter zu gewinnen, ein mathematischer Ausdruck allein beschreibt die Struktur des Systems für unendlich viele. Da zahlt es sich aus, ein wenig mehr Mathematik zu investieren, erhält man doch dafür viel mehr: unendlich viel!

4.3.1. Das MacMillan Problem

Die Störungslösung für das MacMillan Problem liefert sehr gute Approximationen für sehr lange Zeiten. Die Differenz zwischen numerischer und analytischer Lösung oszilliert um einen in der Zeit konstanten Mittelwert und schränkt die Lösung daher nicht auf ein endliches Zeitintervall ein.



Grafik 22: Vergleich zwischen numerischer (schwarz) und analytischer (grün) Lösung für $e = 0$ und $z(0) = 0.2$ zwischen der 999. und 1000. Umlaufperiode der Primärkörper. Der Orbit wird nach wie vor übereinstimmend wiedergegeben!

Das MacMillan Problem stellt das Urproblem des Sitnikov Problems dar und ist zugleich ein Unterfall des von Euler aufgestellten Zweizentrenproblems. Es handelt sich hierbei um den einzig bekannten integrablen Fall des Sitnikovproblems, seine Lösung ist anhand elliptischer Integrale und Jacobischer Funktionen darstellbar. Sehen wir uns an, was unsere Störungslösung für den Fall verschwindender Exzentrizität liefern kann:

$$z_m(t) = z_c(t) + z_s(t) \quad (165)$$

wobei (wir setzen in den Konstanten definiert in (131.1-131.5) $i = 1$ und $j = 2$):

$$\begin{aligned} z_c(t) = & \frac{C_1}{2^{3/4}} \cos(2 \sqrt{2} \sigma_m) + \\ & \left(-\frac{735 C_1 M_1 K_2^2}{4096 \sqrt[4]{2}} + \frac{111 C_1 M_1 K_2}{2048 2^{3/4}} - \frac{3 C_1 M_1}{64 \sqrt[4]{2}} \right) \cos(6 \sqrt{2} \sigma_m) + \\ & \left(\frac{29 C_1 M_2}{2048 2^{3/4}} - \frac{245 C_1 K_2 M_2}{12288 \sqrt[4]{2}} \right) \cos(10 \sqrt{2} \sigma_m) - \frac{35 M_3}{24576 \sqrt[4]{2}} \cos(14 \sqrt{2} \sigma_m) \end{aligned} \quad (166)$$

und setzen ($i = 2, j = 1$) für die Sinusterme:

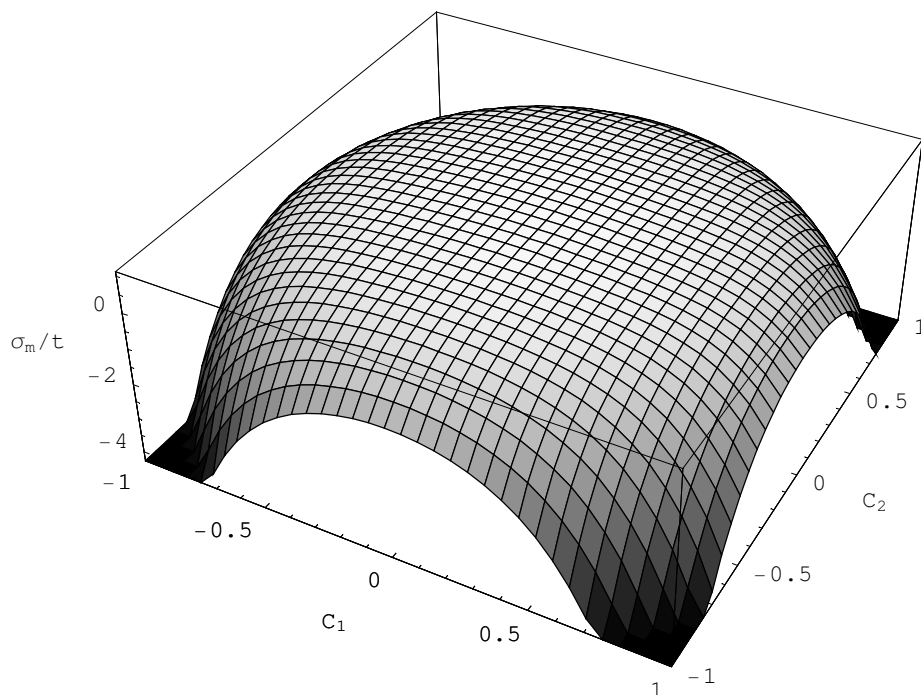
$$\begin{aligned} z_s(t) = & \frac{C_2}{2^{3/4}} \sin(2 \sqrt{2} \sigma_m) + \\ & \left(\frac{735 C_2 M_1 K_2^2}{4096 \sqrt[4]{2}} - \frac{111 C_2 M_1 K_2}{2048 2^{3/4}} + \frac{3 C_2 M_1}{64 \sqrt[4]{2}} \right) \sin(6 \sqrt{2} \sigma_m) + \\ & \left(\frac{29 C_2 M_2}{2048 2^{3/4}} - \frac{245 C_2 K_2 M_2}{12288 \sqrt[4]{2}} \right) \sin(10 \sqrt{2} \sigma_m) + \frac{35 M_3}{24576 \sqrt[4]{2}} \sin(14 \sqrt{2} \sigma_m) \end{aligned} \quad (167)$$

mit der konstanten Phasenfunktion:

$$\sigma_m = t \left(1 - \frac{3675 (C_2^2 C_1^4 + C_2^4 C_1^2)}{512 \sqrt{2}} + \frac{465 K_4}{512} + \frac{465 L_2}{256} - \frac{9 K_2}{8 \sqrt{2}} - \frac{1225 K_6}{512 \sqrt{2}} \right) \quad (168)$$

Die Lösung (165) beschreibt eine periodische Bahn mit konstanter Amplitude und Frequenz und ist nichts anderes als eine Fourierdarstellung der Lösung des integrablen Falls.

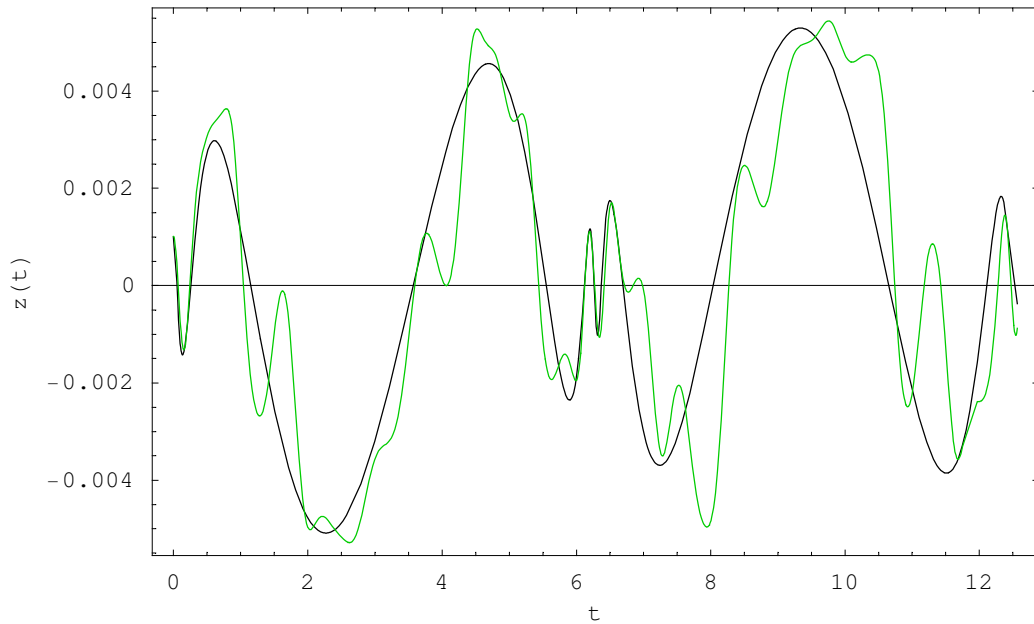
Die Darstellung in Grafik 23 zeigt die Abhängigkeit der Parameter $C_1 \propto z(0)$ und $C_2 \propto z'(0)$ auf die MacMillan Frequenz σ_m . Diese oszilliert im Unterschied zu der Frequenz des Sitnikov Problems nicht und bleibt konstant in der Zeit. Deutlich ist die Verstärkung für wachsende Anfangsamplituden und -geschwindigkeiten zu erkennen. Für verschwindend kleine Auslenkungen des Probekörpers am Anfang erhalten wir den in Kapitel 1 gefundenen Fall mit Grundfrequenz $2 \sqrt{2}$.



Grafik 23: Parameterebene $C_1 \times C_2$, wobei $C_1 \propto z(0)$ und $C_2 \propto z'(0)$. Deutlich ist die Abhängigkeit anhand der Geometrie der Ebene zu erkennen.

4.3.2. Der Fall für sehr große Exzentrizitäten

In Abschnitt 3.5. haben wir die Parameter Ebene ($e \times z_0$) definiert, innerhalb derer die gefundene Lösung (135) zuverlässige Ergebnisse reproduziert. Dieser Abschnitt zeigt, was mit der Störungslösung außerhalb dieses Bereichs geschieht und gibt so einen Überblick über die fehlerhaften Ergebnisse, die Störungstheorie liefern kann.

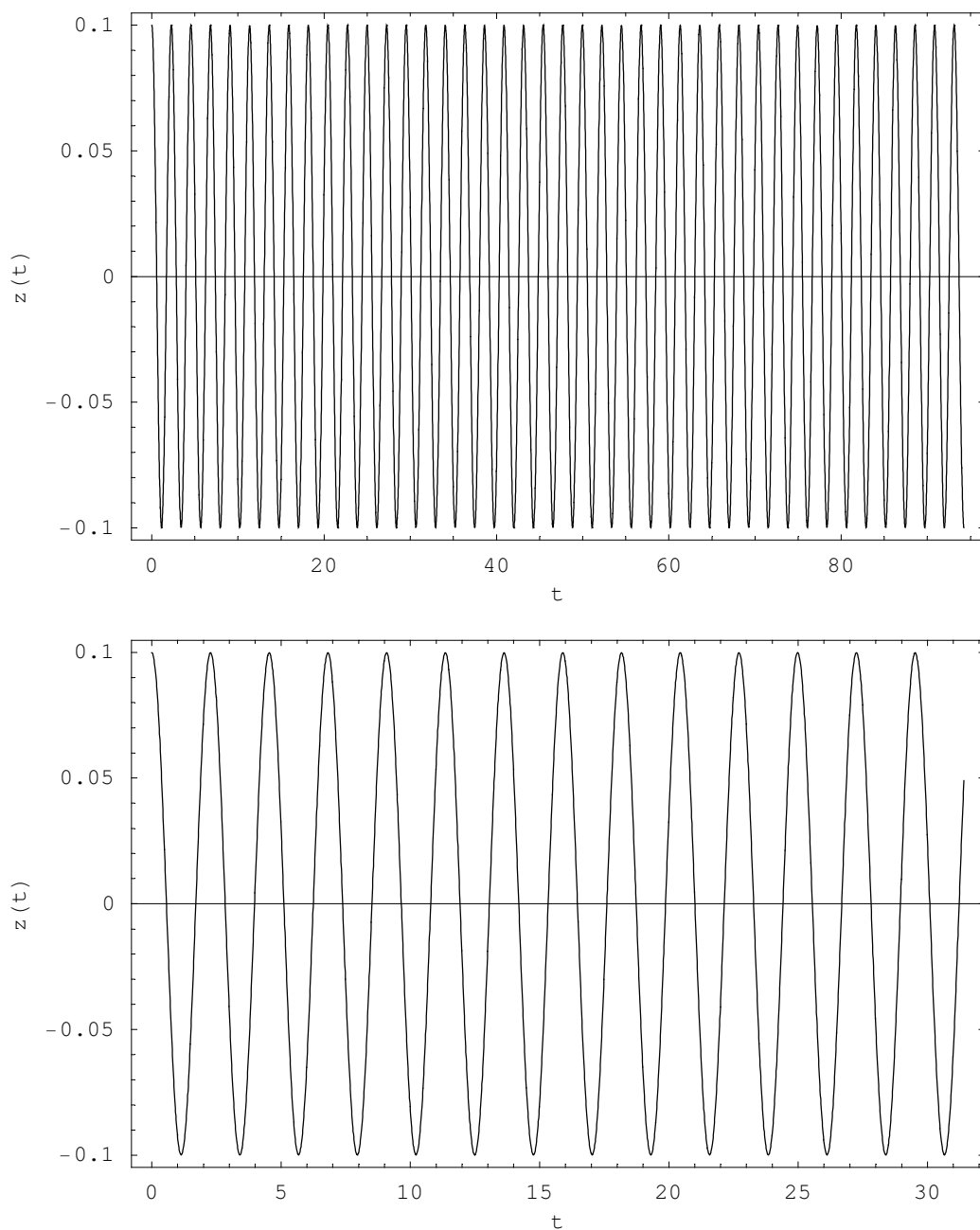


Grafik 24: Die Grenzen der Methode: Darstellung der Störungslösung 7. Ordnung (grün) gegen die numerisch gewonnene (schwarz). Weitere trigonometrische Terme wären notwendig, um den exakten Orbit wieder zu geben. Für die Grafik wurde $e = 0.8$ und $z(0) = 10^{-3}$, mit $z'(0) = 0$ gewählt.

Die Störungslösung weicht von der numerischen ab. Trotzdem erhalten wir noch immer ein Bild über die Struktur des Systems. Die analytische Lösung oszilliert um die numerisch gefundene (Grafik 24), weitere trigonometrische Terme könnten die Lösung vielleicht verbessern. Ein Ausblick in eine neue Version der Störungstheorie ?

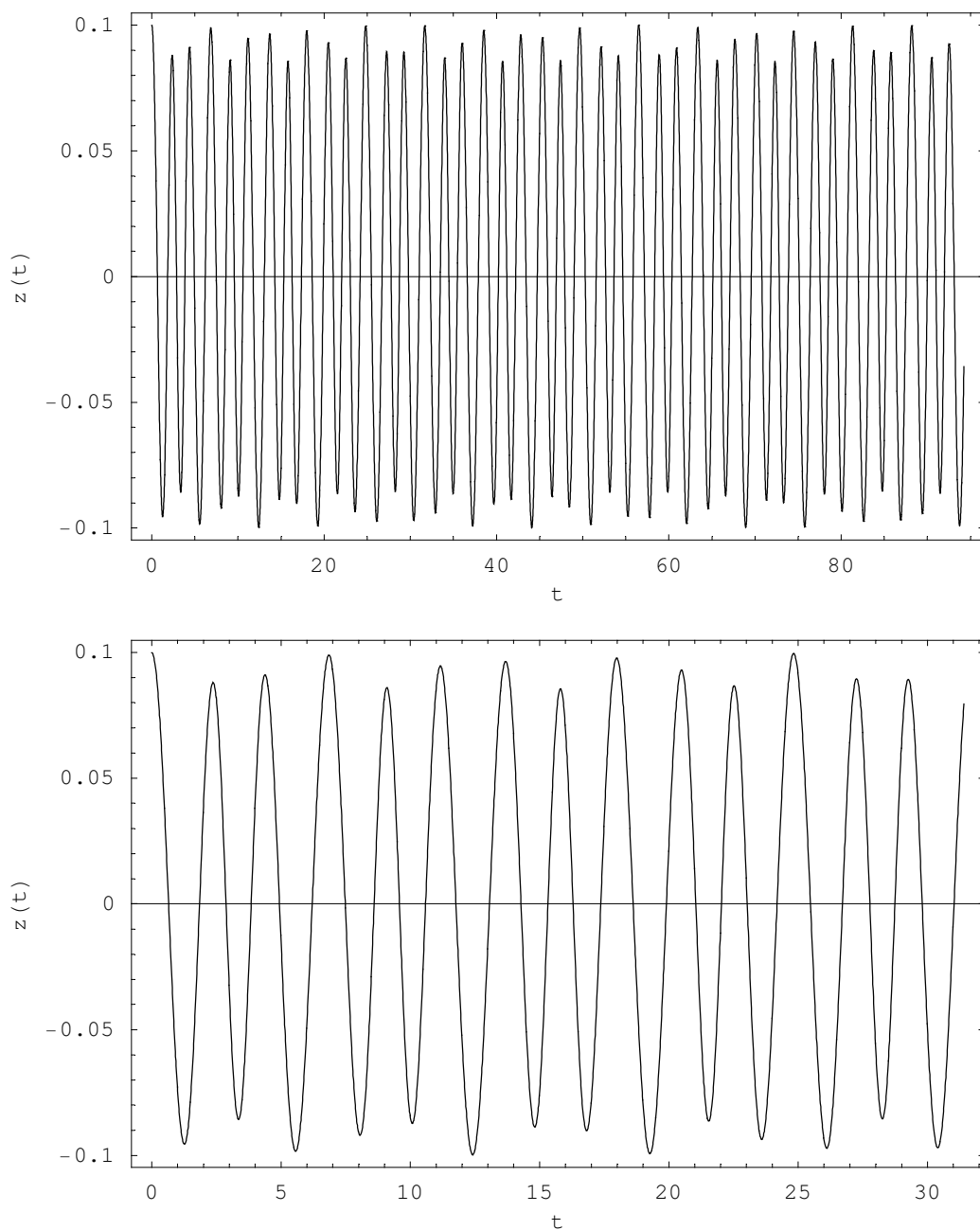
4.4. Ausgewählte Orbits des Sitnikov Problems

Das MacMillan Problem ($e = 0$) lässt sich durch elliptische Integrale und Jacobische Funktionen darstellen. In Abschnitt 4.2.1. konnte aus der Störungslösung eine einfache trigonometrische Reihe hergeleitet werden, welche die Ergebnisse zuverlässig approximiert.



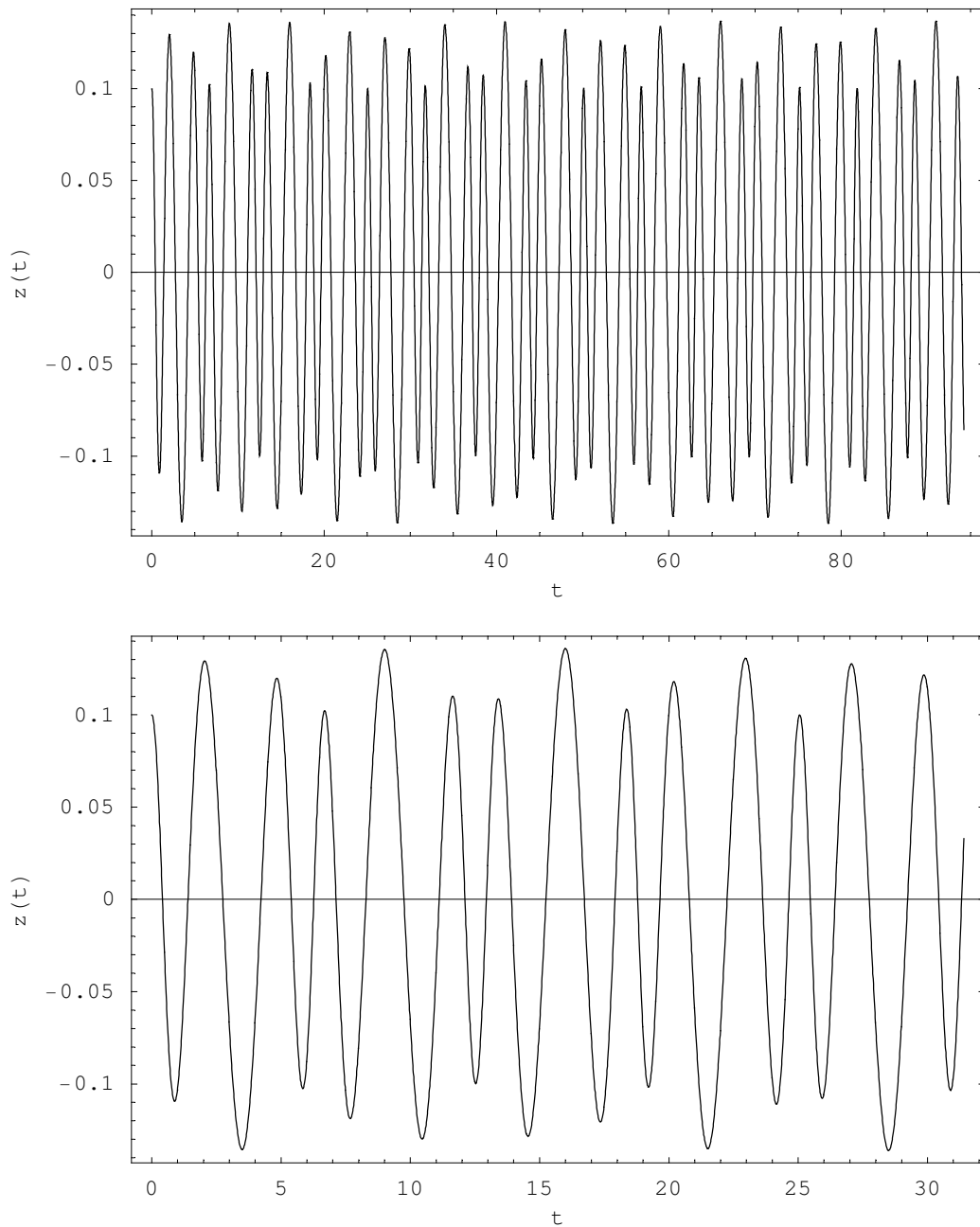
Grafik 25 & 26: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = 0$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Mit steigender Exzentrizität ($|e| = 0.1$) sind weitere Terme notwendig, um das Problem zu beschreiben:



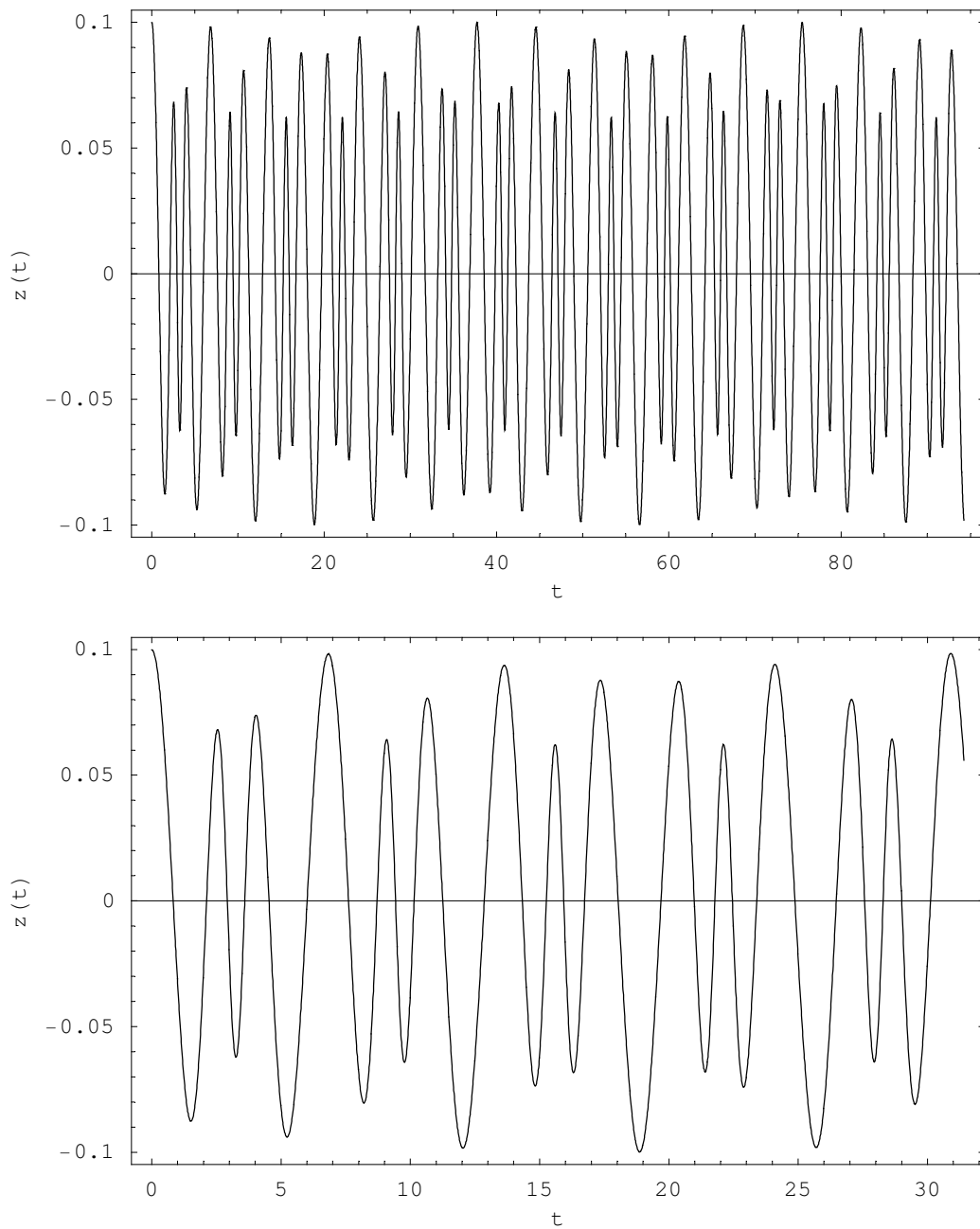
Grafik 27 & 28: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = -0.1$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Nichtlineare Effekte führen für $|e| = 0.2$ zu einer Überlagerung von nichtlinearen Frequenzanteilen und führen dazu, dass die Amplitude und Frequenz der Lösung ebenfalls zeitabhängig wird.



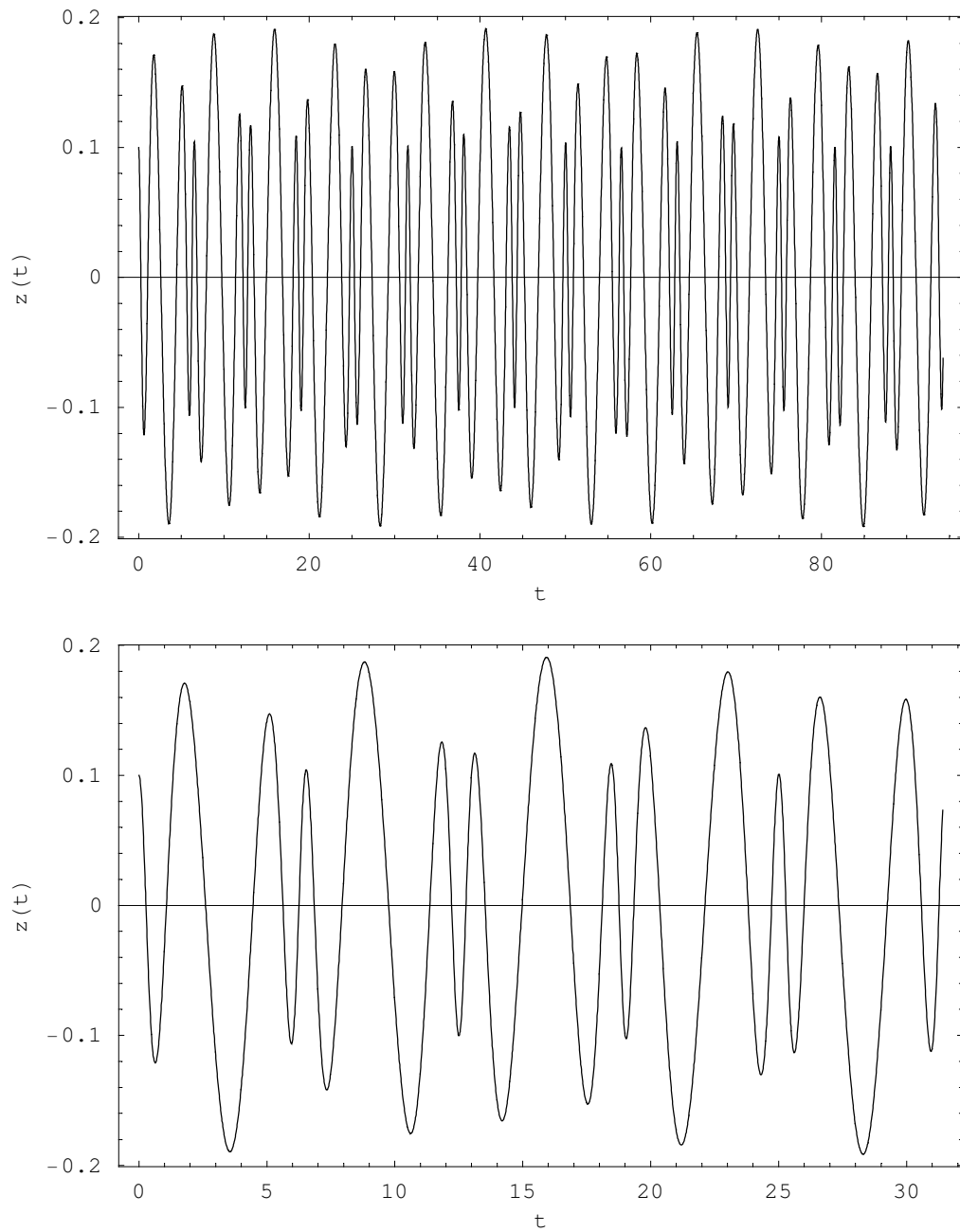
Grafik 29 & 30: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = 0.2$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Die Startposition der Primärkörper beeinflusst die qualitative Struktur der Lösung wenig, verschiebt und staucht jedoch Amplitude und Frequenz der Bahn:



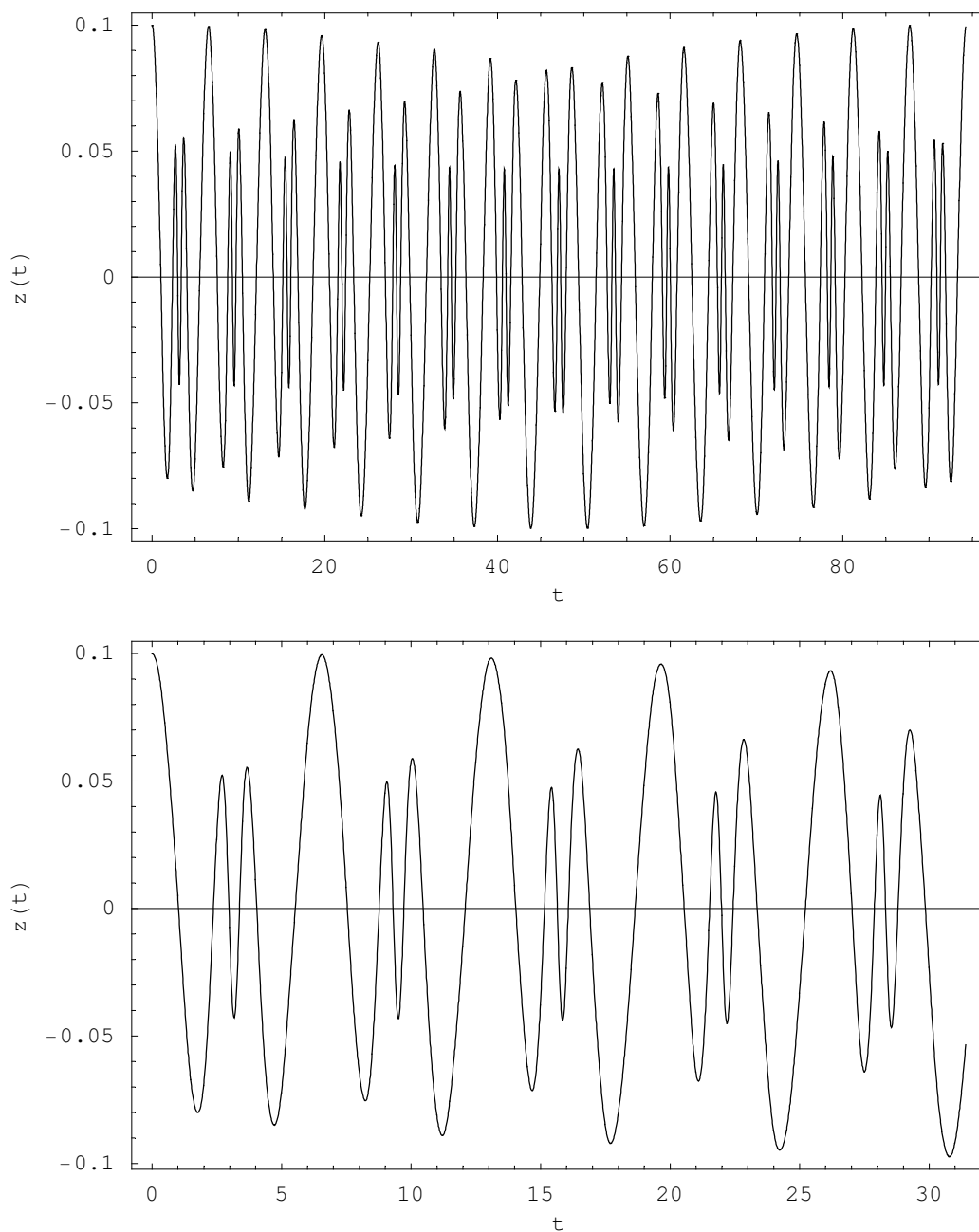
Grafik 31 & 32: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = -0.3$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Wird die Exzentrizität größer, dominieren nichtlineare Effekte und überlagern die MacMillan Frequenz völlig.



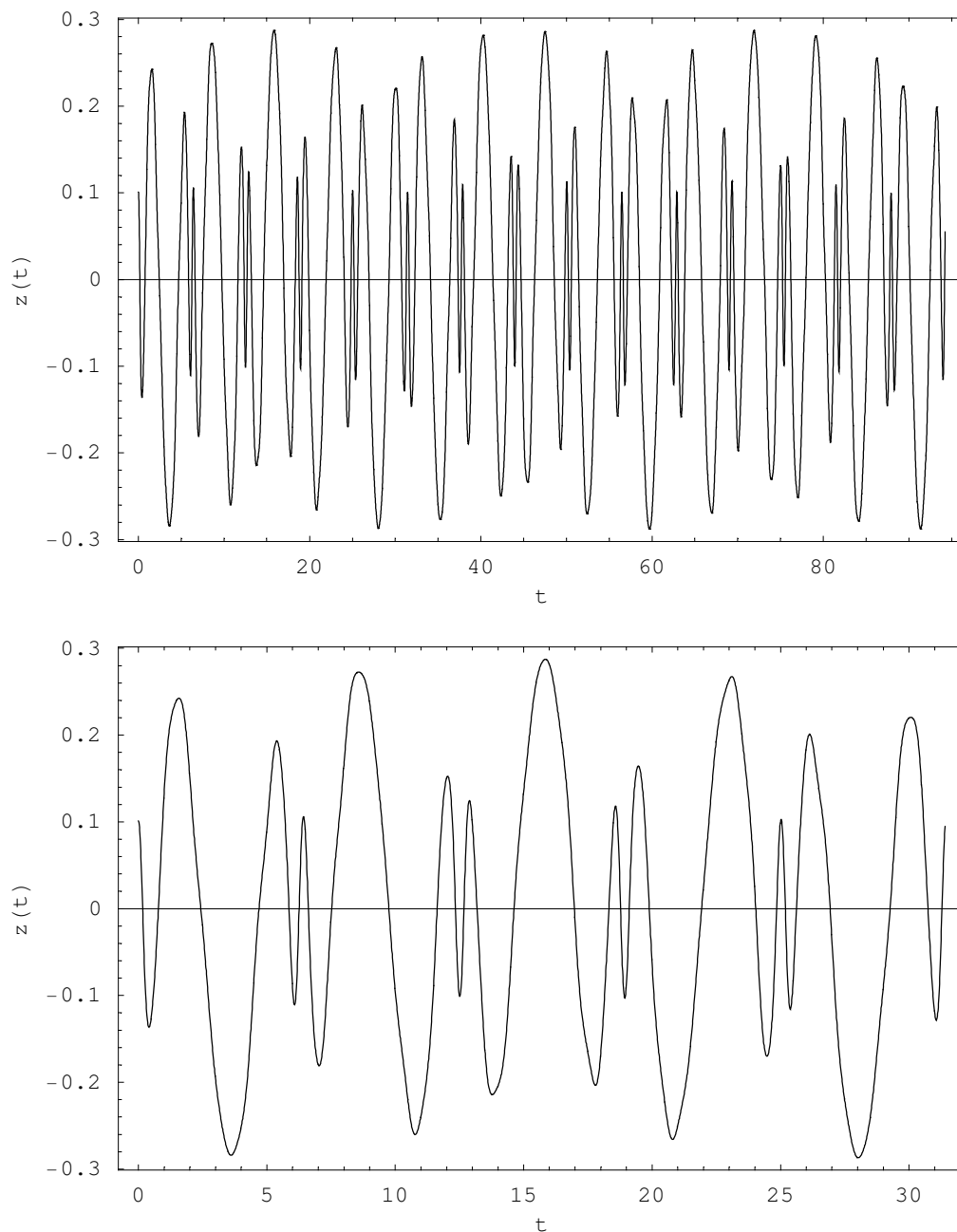
Grafik 33 & 34: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = 0.4$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Die Periodizität der Lösung wird durch den Einfluss der Nichtlinearität der Systemparameter völlig aufgehoben:



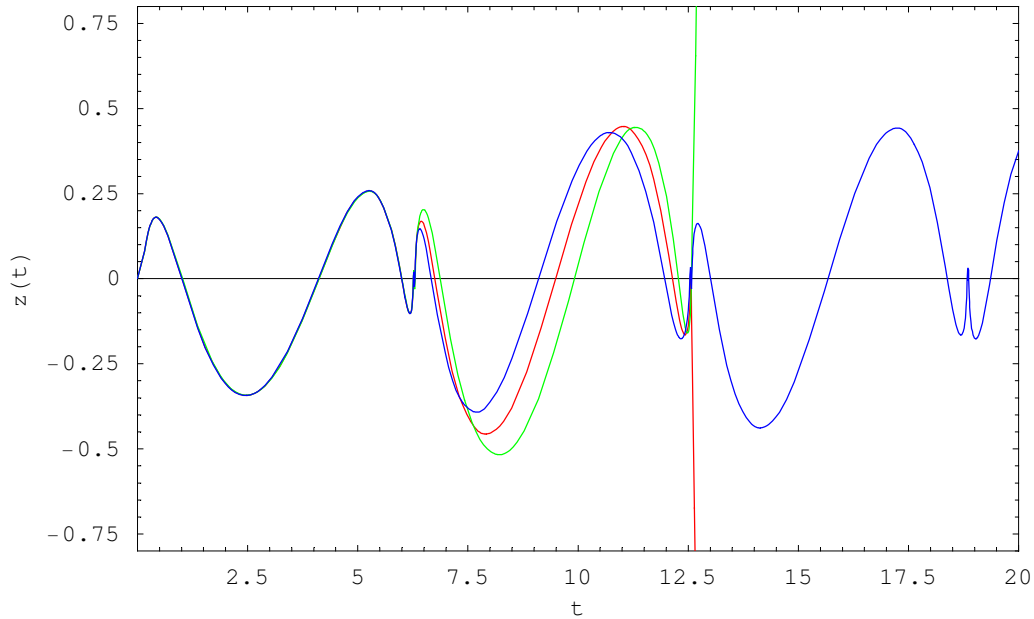
Grafik 35 & 36: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = -0.5$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Eine Fourierentwicklung ist aufgrund der nicht konstanten Frequenzen und Amplituden nicht mehr möglich, die Lösung erfordert eine komplexere Beschreibung, die nichtlinearen Effekte und die Zeitabhängigkeit durchmischen die einzelnen Perioden:



Grafik 37 & 38: Darstellung des Orbits der dritten Masse für $e = 0.6$, $z(0) = 0.1$ und $z'(0) = 0$. Gezeigt wird die Lösung zwischen der 1. und 15. sowie der 1. und 5. Umlaufperiode der Primärkörper (von oben nach unten).

Für sehr große Exzentrizitäten bricht Chaos ein, eine Beschreibung durch klassische Störungstheorie ist nicht mehr möglich. Eine kleinste Veränderung in den Anfangsbedingungen führt zu unvorhersehbaren Effekten auf die Lösung. Numerische Hilfsmittel sind notwendig, um das Problem zu beschreiben:



Grafik 39: Chaotische Zustände im Sitnikov System. Die Anfangsbedingungen der drei dargestellten Lösungen variieren nur um 1 Promille. Für $z(0) = 10^{-3}$ verlässt der Körper das System bereits nach der 2. Umlaufperiode (rot) entlang der negativen z -Achse, für $z(0) = 10^{-3} + 10^{-6}$ verlässt der Körper das System in die komplementäre Richtung (grün). Wider Erwarten bleibt der Körper für $z(0) = 10^{-3} - 10^{-6}$ an das System gebunden. Die Sensibilität in der Wahl der Anfangsbedingung führt zu unvorhersehbaren Wirkungen, wie es generisch für chaotische Systeme ist.

Mit Hilfe der analytischen Lösung ist es nun leicht möglich, die qualitative Struktur des Orbits der dritten Masse zu studieren. Während für $e = 0$ der Körper mit der in Relation (168) gefundenen MacMillan - Frequenz und konstanter Periode um die Hauptebene der Primärkörper schwingt, kommt es für wachsende Exzentrizitäten zu einer Überlagerung der Fundamentalschwingungen des dritten Körpers und der beiden Körper der Hauptebene. Wird die Exzentrizität noch größer, führt der Einfluss der nichtlinearen Effekte dazu, dass die Struktur der Lösung komplexer wird: Zusätzlich zu dem Interferenzproblem der beiden aneinander gekoppelten Oszillatoren kommt es zu einer Zeitabhängigkeit der Amplituden und Frequenzen, was zu einer Verschiebung der Phase über die Zeit führt. Für $e \rightarrow 1$ dominieren die nichtlinearen Effekte und führen zu einer vollständigen Deformierung der periodischen Struktur der Lösung, es kommt zu unvorhersehbaren Effekten, wie sie aus der Chaostheorie bekannt sind. Hier versagt eine Beschreibung durch analytische Ausdrücke, numerische Experimente sind notwendig, um die Orbits des Sitnikov Problems zu beschreiben. Während die gefundene Störungslösung dargestellt in den Grafiken (25-38) die Lösung exakt wiedergibt, muss für Grafik (39) bereits ein aufwendiger Integrator mit genauer Schrittweitenkontrolle eingesetzt werden. Unbefriedigend bleibt bei numerischen Experimenten die Tatsache, dass immer nur ein Orbit nach dem anderen gelöst werden kann und immer unendlich viele dazwischen liegen können. Geht man von dem Prinzip der Sensibilität der Anfangsbedingungen auf die qualitative Struktur der Gesamtlösung aus, so kann nie mit Sicherheit gesagt werden, welche Eigenschaften die Systemparameter auf den Ausgang der Lösung haben werden.