

3. Nichtlineare Analyse des Systems

3.1. Die Courant & Snyder Transformation

Die Courant & Snyder Transformation wurde von E.B. Courant und H.S. Snyder im Jahr 1952 entwickelt. Die Transformation verwendet die Ergebnisse der Floquet - Theorie, um polynomische Differentialgleichungen auf eine einfachere Form zu bringen. Ursprünglich wurde sie für die Berechnung von Orbits von Partikeln in Teilchenbeschleunigern verwendet (Courant & Snyder, 1952). Im Jahre 1992 hat sie Johannes Hagel das erste Mal erfolgreich an einem himmelsmechanischen Problem angewendet (Hagel 1992). Es handelt sich bei ihr im wesentlichen um eine Transformation der abhängigen und unabhängigen Variable unter Zuhilfenahme der aus der Floquet - Theorie gewonnenen Amplituden- und Phasenfunktion. Führt man sie an einer polynomischen, gewöhnlichen Differentialgleichung durch, so wird der lineare Teil auf die Form des gewöhnlichen harmonischen Oszillators gebracht, und die nichtlineare Wirkung auf die verbleibenden Glieder transformiert.

Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen ist die nichtlineare polynomische Bewegungsgleichung (16), hergeleitet in Kapitel 2. Wir behandeln sie und alle darauf folgenden Herleitungen in diesem Kapitel bis zur 5. Ordnung in z und e , die Ergebnisse der Herleitungen bis zur 7. Ordnung können im Anhang gefunden werden. Für Ordnungen $O(e^j z^k)$ mit $j+k \leq 5$ ergab sie sich zu:

$$\begin{aligned} z'' + (8 + 24 \cos(t) e + (36 \cos(2 t) + 12) e^2 \\ + (27 \cos(t) + 53 \cos(3 t)) e^3 \\ + (28 \cos(2 t) + 77 \cos(4 t) + 15) e^4) z + \\ (-48 - 240 \cos(t) e + (-480 \cos(2 t) - 240) e^2) z^3 + 240 z^5 = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Es handelt sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren inhomogener Teil durch ein Polynom in den Variablen z und e gegeben ist. Sehen wir uns die Form von (59) genauer an, so bemerken wir, dass sie von folgender Gestalt ist:

$$z'' + g(t) z + F(z, t, e) = 0 \quad (60)$$

Die lineare Koeffizientenfunktion g in (60) ist periodisch mit $g(t) = g(t+2\pi)$. Im vorigen Abschnitt haben wir die Amplituden- und Phasenfunktion (w, ψ) des linearen Teils bestimmt. Definieren wir die neue abhängige Variable y durch die Transformationsvorschrift

$$y = \frac{z}{w(t)}, \quad (61)$$

und setzen ψ als neue unabhängige Variable für t anhand der Beziehung

$$\psi' = \frac{1}{w(t)^2} \quad (62)$$

so erfüllt $y(\psi)$ aufgrund dieser Konstruktion die Gleichung des gewöhnlichen harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2 y}{d\psi^2} + y = 0 \quad (63)$$

Wenden wir (61) und (62) an unserer Ausgangsgleichung (60) an; aus der Transformation für die abhängige Variable folgt für die Ableitungen der Zusammenhang zwischen y und z :

$$z(t) = y(t) w(t) \quad (64.1)$$

$$z'(t) = y(t) w'(t) + w(t) y'(t) \quad (64.2)$$

$$z''(t) = w(t) y''(t) + 2 w'(t) y'(t) + y(t) w''(t) \quad (64.3)$$

wobei $'$ die Ableitung nach der Variablen t meint. Setzen wir die Beziehungen (64.1) und (64.3) in (60) ein, so erhalten wir:

$$w(t) y'' + 2 w'(t) y' + g(t) w(t) y + y w''(t) + F(w(t) y(t), e) = 0 \quad (65)$$

Im nächsten Schritt müssen wir die Ableitungen von y nach der Zeit durch die Ableitungen nach der Variablen ψ ausdrücken. Unter Verwendung von Beziehung (62) erhalten wir folgende Relationen zwischen der alten und neuen Zeit:

$$y(t) = y(\psi) \quad (66.1)$$

$$y'(t) = y'(\psi) \psi'(t) = \frac{y'(\psi)}{w(t)^2} \quad (66.2)$$

$$y''(t) = y''(\psi) - 2 y'(\psi) w(t) w'(t) \quad (66.3)$$

wobei hier $'$ die Ableitung nach der im Argument stehenden Variablen bezeichnet. Wir ersetzen die zeitabhängige Amplitude anhand (66.1) und (66.3) und erhalten folgende Form:

$$\frac{y''(\psi)}{w(t)^3} + g(t) w(t) y(\psi) + y(\psi) w''(t) + F(w(t) y(\psi), e) = 0 \quad (67)$$

Diese kann nun noch weiter vereinfacht werden. Wir wissen aus der Definitionsgleichung der Amplitudenfunktion (24.1) durch Auflösen nach $w''(t)$:

$$w''(t) = \frac{1}{w(t)^3} - g(t) w(t) \quad (68)$$

Benützen wir diese Relation und setzen wir diese in (67) ein. Wir ordnen nach der unabhängigen Variablen y und erreichen die Darstellung in Normalform:

$$y''(\psi) + y(\psi) + F(w(t(\psi)) y(\psi), e) w(t(\psi))^3 = 0 \quad (69)$$

Es ist uns somit gelungen (60) auf (69) insofern zu vereinfachen, indem wir den linearen Teil auf die einfache Form des gewöhnlichen harmonischen Oszillators gebracht haben. Die notwendige Beziehung $t(\psi)$ ergibt sich aus der Umkehrfunktion der Phasenfunktion. Wir werden ihre Herleitung im Anschluss an dieses Kapitel durchführen.

Benützen wir unsere Ergebnisse der letzten Schritte, um unsere Bewegungsgleichung (59) entsprechend umzuschreiben. In unserem Fall hängt die Koeffizientenfunktion g , die Amplitudenfunktion w und die Phasenfunktion ψ selbst vom Störparameter e ab. Im ersten Schritt ergibt sich somit für die noch nicht eingesetzte Amplitudenfunktion w ($'$ entspricht hier dem Operator $d/d\psi$) :

$$y'' + y + (-48 - 240 \cos(t(\psi))) e + (-480 \cos(2 t(\psi)) - 240) e^2 y^3 w^6 + 240 y^5 w^8 = 0 \quad (70)$$

Setzen wir nun für w die aus Kapitel 2 gewonnene Amplitudenfunktion (27) ein und führen die Potenzen w^6 und w^8 aus, wobei wir Potenzen in e vernachlässigen wollen, für die $y^m e^n$ und $m+n > 5$ sind:

$$y'' + y + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{33 \cos(t(\psi)) e}{31 \sqrt{2}} + \frac{(-2784 \sqrt{2} \cos(2 t(\psi)) - 825 \sqrt{2}) e^2}{7688} \right) y^3 + \frac{15 y^5}{4} = 0 \quad (71)$$

Dem Weg von (Hagel, 1992) folgend, führen wir eine weitere Transformation an Gleichung (71) durch: Setzen wir τ als neue unabhängige Variable, definiert durch die Transformationsvorschrift:

$$\tau = \frac{\psi}{\sqrt{8}} \quad (72)$$

Es folgt daher für die Ableitungen nach τ :

$$y(\psi) = y(\tau) \quad (73.1)$$

$$y'(\psi) = \frac{y'(\tau)}{2 \sqrt{2}} \quad (73.2)$$

$$y''(\psi) = \frac{y''(\tau)}{8} \quad (73.3)$$

Wir setzen (73.1) und (73.3) in (71) ein und erhalten in der neuen Zeit τ folgende neue Form der Bewegungsgleichung:

$$y'' + 8 y - \lambda^3 12 \sqrt{2} y^3 - \lambda^4 \frac{132}{31} \sqrt{2} e \cos(t) y^3 + \lambda^5 \left(30 y^5 + e^2 \left(-\frac{2784}{961} \sqrt{2} \cos(2 t) - \frac{825 \sqrt{2}}{961} \right) y^3 \right) = 0 \quad (74)$$

Im Unterschied zur Sortierung der auftretenden Potenzen in y und e von (71) haben wir in (74) alle Produkte von e und y gleicher Potenz zusammengefasst. Diese kennzeichnen wir, indem wir einen künstlichen Störparameter λ einführen: Hierbei gilt für λ^N , dass $N = m+n$ überall dort, wo $y^m e^n$ ist. λ selbst ist 1 und wird nach Durchführung des Störansatzes wieder durch die Identität ersetzt.

3.2. Bestimmung der inversen Phasenfunktion

Damit (74) vollständig bestimmt ist, benötigen wir die Variablenbeziehung t in Abhängigkeit von τ über ψ . Hierfür müssen wir die Phasenfunktion (40) nach t auflösen und dann über die inverse Beziehung zu (72) bestimmen. Da es sich bei (40) um eine Störreihe handelt, setzen wir für die Umkehrfunktion ebenfalls eine Reihenentwicklung um e an. Die Phasenfunktion ergab sich im vorigen Abschnitt bis zur 5. Ordnung in e zu:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \left(2\sqrt{2} + \frac{21 e^2}{31\sqrt{2}} + \frac{89607 e^4}{238328\sqrt{2}} \right) t + \\ & \left(\frac{96\sqrt{2} e}{31} + \frac{5076\sqrt{2} e^3}{29791} + \frac{417688347 e^5}{658470473\sqrt{2}} \right) \sin(t) + \\ & \left(\frac{1710\sqrt{2} e^2}{961} - \frac{13377241 e^4}{21240983\sqrt{2}} \right) \sin(2t) + \\ & \left(\frac{3007436\sqrt{2} e^3}{2055579} - \frac{37775255721 e^5}{30289641758\sqrt{2}} \right) \sin(3t) + \\ & \frac{474025501 e^4 \sin(4t)}{169927864\sqrt{2}} + \frac{18990343371 e^5 \sin(5t)}{6584704730\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (75)$$

Wir erhalten die Summe aus einem treibenden Term ($\propto t$) und oszillierenden Termen mit Periode 2π . Was wir suchen, ist die Funktion $t(\psi)$. Wir machen somit folgenden Ansatz für die noch unbekannten Koeffizientenfunktionen t_i :

$$t = t_0(\psi) + t_1(\psi) e + t_2(\psi) e^2 + t_3(\psi) e^3 + t_4(\psi) e^4 + t_5(\psi) e^5 + O(e^6) \quad (76)$$

Wir setzen (76) in (75) ein und entwickeln die trigonometrischen Funktionen nach dem Parameter e . Geordnet nach den Potenzen in der Exzentrizität ergibt sich somit das Gleichungssystem:

$$2\sqrt{2} t_0 = \psi \quad (77.0)$$

$$\frac{1}{31} \sqrt{2} 96 \sin(t_0) + 2\sqrt{2} t_1 = 0 \quad (77.1)$$

$$3420 \sin(2t_0) + 651 t_0 + 5952 \cos(t_0) t_1 + 3844 t_2 = 0 \quad (77.2)$$

$$\begin{aligned} 6365664 \sin(t_0) t_1^2 = & 700488 \sin(t_0) + 6014872 \sin(3t_0) + \\ & 6417 (2280 \cos(2t_0) + 217) t_1 + 12731328 \cos(t_0) t_2 + 8222316 t_3 \end{aligned} \quad (77.3)$$

$$\begin{aligned}
& 16 \cos(t_0) (10963088 t_1^3 + 151184520 \sin(t_0) t_1^2 + 13377241 \sin(t_0)) = \\
& 474025501 \sin(4 t_0) + 63889791 t_0 + 1209476160 \cos(2 t_0) t_2 + 115112424 t_2 + \\
& 1984 t_1 (29187 \cos(t_0) + 751859 \cos(3 t_0) - 530472 \sin(t_0) t_2) + \\
& 1052456448 \cos(t_0) t_3 + 679711456 t_4
\end{aligned} \tag{77.4}$$

$$\begin{aligned}
& (384273279240 \sin(t_0) - 755505114420 \sin(3 t_0) + 1747111590132 \sin(5 t_0) + \\
& 3565 (-214035856 \cos(2 t_0) + 1896102004 \cos(4 t_0) + 63889791) t_1 - \\
& 166214560 ((621 \sin(t_0) + 47991 \sin(3 t_0)) t_1^2 - \\
& 2 (621 \cos(t_0) + 15997 \cos(3 t_0)) t_2) + 1891132680 \\
& (-1520 \cos(2 t_0) t_1^3 - 4560 \sin(2 t_0) t_2 t_1 + (2280 \cos(2 t_0) + 217) t_3) + \\
& 156333634880 (\sin(t_0) t_1^4 - 12 \cos(t_0) t_2 t_1^2 - \\
& 24 \sin(t_0) t_3 t_1 - 12 \sin(t_0) t_2^2 + 24 \cos(t_0) t_4) + \\
& 2423171340640 t_5) / (605792835160 \sqrt{2}) = 0
\end{aligned} \tag{77.5}$$

Dieses ist nun rekursiv in den Funktionen t_i ($i = 0, \dots, 5$) zu lösen. Der Algorithmus *InversePhaseFunction* aus Kapitel 5 implementiert ein Verfahren, um auf Lösungen beliebiger Ordnung zu kommen. In unserem Fall finden wir die Lösung des obigen Systems und bestimmen es zu:

$$t_0(\psi) = \frac{\psi}{2\sqrt{2}} \tag{78.0}$$

$$t_1(\psi) = \frac{1}{31} (-48) \sin\left(\frac{\psi}{2\sqrt{2}}\right) \tag{78.1}$$

$$t_2(\psi) = \frac{297}{961} \sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right) - \frac{21\psi}{248\sqrt{2}} \tag{78.2}$$

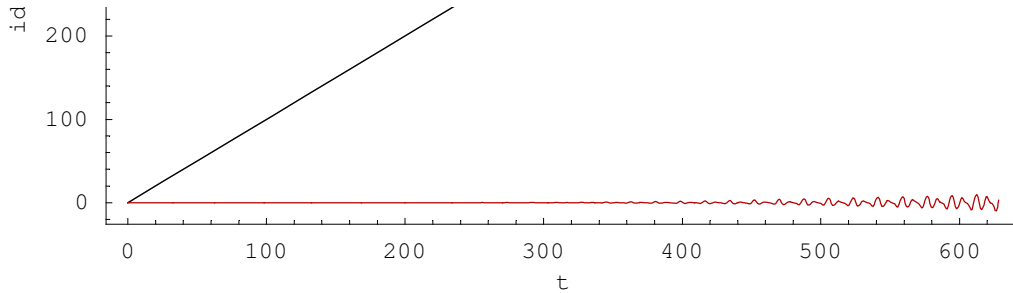
$$t_3(\psi) = \frac{1}{961} \sqrt{2} 63 \psi \cos\left(\frac{\psi}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1422 \sin\left(\frac{\psi}{2\sqrt{2}}\right)}{29791} - \frac{117646 \sin\left(\frac{3\psi}{2\sqrt{2}}\right)}{2055579} \tag{78.3}$$

$$\begin{aligned}
t_4(\psi) = & -\frac{6237 \cos\left(\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right) \psi}{119164 \sqrt{2}} - \frac{62265 \psi}{1906624 \sqrt{2}} + \\
& \frac{1622037 \sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right)}{21240983} + \frac{6425283 \sin(\sqrt{2} \psi)}{679711456}
\end{aligned} \tag{78.4}$$

$$\begin{aligned}
t_5(\psi) = & \frac{100863 \psi \cos\left(\frac{\psi}{2\sqrt{2}}\right)}{1847042 \sqrt{2}} + \frac{1235283 \psi \cos\left(\frac{3\psi}{2\sqrt{2}}\right)}{84963932 \sqrt{2}} + \\
& \left(\frac{1323 \psi^2}{476656} - \frac{83934411}{2633881892} \right) \sin\left(\frac{\psi}{2\sqrt{2}}\right) - \\
& \frac{36613221 \sin\left(\frac{5\psi}{2\sqrt{2}}\right)}{26338818920} - \frac{3581751713 \sin\left(\frac{3\psi}{2\sqrt{2}}\right)}{121158567032}
\end{aligned} \tag{78.5}$$

Dies entspricht auf Grund der Konstruktion in (76) der gesuchten Transformationsvorschrift.

Das Bilden einer Umkehrfunktion einer Störreihe ist kein triviales Problem. Der Algorithmus zur Bestimmung ist zwar - abgesehen vom Rechenaufwand - einfach durchzuführen. Jedoch liefert er im allgemeinen keine sehr gute Approximation für lange Zeiten. Zur Demonstration betrachten wir $\psi^{-1}(\psi(t)) = \text{id}$ in einem Zeitintervall $(0, 100\pi)$:



Grafik 7: Vergleich zwischen der Darstellung der Störreihen der Phasenfunktion und ihrer inversen mit der ersten Mediane. Aufgrund des Approximationsfehlers, der durch die endliche Reihendarstellung - $O(e^{13})$ - zu Stande kommt, ergibt sich eine Abweichung für große Zeiten. Die Exzentrizität wurde für die Darstellung $e = 0.3$ gewählt.

Deutlich ist die Abweichung von der ersten Mediane jenseits der 60. Umlaufperiode der Primärkörper ($t \simeq 400$) zu sehen. Inwiefern sich diese Tatsache auf die Genauigkeit der Ergebnisse auswirkt, wird am Ende dieses Kapitels ausführlich diskutiert. Die Exzentrizität beträgt in der Grafik 7 $e = 0.3$. Die Ursache für die Abweichung ist in dem endlichen Störansatz zu suchen. Der Abbruchfehler summiert sich über die Zeit auf und schränkt daher die Genauigkeit für große Zeiten ein.

Es ist erstrebenswert, eine bessere Methode für die Bestimmung der Umkehrfunktion einer Störreihe zu finden. Eine Möglichkeit wäre, die inverse Funktion anzusetzen und die Differentialgleichung dementsprechend umzuschreiben. Das Problem könnte somit auf das Auffinden der Differentialgleichung der Umkehrfunktion zurückgeführt werden. Die Umkehrfunktion ergibt sich dann klassisch durch Ansetzen einer Störreihe. Weitere Untersuchungen waren zu diesem Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen, scheinen sich aber zu lohnen, wie aus der Abweichung von der ersten Mediane in Grafik 7 ersichtlich ist.

3.3. Die Poincaré - Lindstedt Methode

Die Methode der gedehnten Koordinaten oder Methode von Poincaré - Lindstedt eignet sich sehr gut dafür die Gleichung (79) zu lösen. Die Lösung nullter Ordnung entspricht der des harmonischen Oszillators mit Grundfrequenz $2\sqrt{2}$, jede weitere Ordnung definiert in Form eines angeregten Oszillators weitere Schwingungen der Oszillationen des dritten Körpers. Die Form der Gleichungen, die von den höheren Ordnungen her rühren, ist auch der Grund, warum der herkömmliche Störungsansatz hier versagen muss: Stimmt die Frequenz der Lösung mit der der Anregung überein, so kommt es unweigerlich zu säkularen Termen, die die Konvergenz der Störungslösung in der Zeit zusammenbrechen lassen werden. Dies widerspricht jedoch der physikalischen Tatsache, dass periodische und quasiperiodische Bahnen laut KAM - Theorem beschränkt, daher an das System gebunden bleiben. Da wir mit der Störungstheorie nur diese Bahnen beschreiben können, entsprechen eventuelle ungebundene Lösungen sicher nicht der physikalischen Realität, sondern kommen einzig und allein von der verwendeten Methode der Störungstheorie. Natürlich gibt es im Sitnikovproblem ungebundene Lösungen, die vor allem bei hohen Energien im System auftreten werden, jedoch können diese, meist chaotischen Bahnen nur durch numerische Integration gefunden werden. Unsere Aufgabe hier ist, jene künstlichen Säkularterme zu vermeiden. Dies gelingt uns, indem wir die Methode von Poincaré-Lindstedt verwenden: Zusätzlich zu einer Entwicklung der abhängigen Variable, wird auch die unabhängige Variable t nach dem Störparameter entwickelt. Eine sehr kompakte Darstellung der von Poincaré entwickelten Methode kann in Zwillinger (1957) gefunden werden.

3.3.1. Explizite Darstellung der Bewegungsgleichung

Zunächst ist es notwendig, Gleichung (74) explizit in der neuen Zeit τ zu schreiben. Verwenden wir die Ergebnisse des letzten Abschnitts und ersetzen die Zeit t durch die Phase ψ und anschließend durch die Beziehung $\psi(\tau)$, definiert in (72). Da es sich bei (76) wiederum um eine Störreihe in e handelt, entwickeln wir die trigonometrischen Funktionen, in denen e vorkommt, wiederum nach der Exzentrizität e . Folgende Überlegung wird uns jedoch viel Rechenzeit ersparen: Jene Terme, die der Ordnung m sind, werden mit λ^m multipliziert. Jede Entwicklung, die über die nullte Ordnung in e hinausgeht, fällt daher automatisch in den Bereich λ^{m+} , wobei $m+ > m$ ist und kann daher wieder vernachlässigt werden. Es reicht aus, in den trigonometrischen Termen die Zeit t durch die Phase ψ nullter Ordnung zu ersetzen. Ersetzen wir zudem noch ψ durch τ , erhalten wir schließlich die gewünschte Form der Bewegungsgleichung in den Variablen y und τ (mit ' als Ableitung nach τ):

$$y'' + 8y - \lambda^3 12\sqrt{2} y^3 - \lambda^4 \frac{132}{31} \sqrt{2} e \cos(\tau) y^3 + \lambda^5 \left(30 y^5 + e^2 \left(-\frac{2784}{961} \sqrt{2} \cos(2\tau) - \frac{825\sqrt{2}}{961} \right) y^3 \right) = 0 \quad (79)$$

Bevor wir uns daran machen (79) zu lösen, sehen wir uns die Gleichung noch ein wenig genauer an: Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung 2. Ordnung, nichtlinear in

der abhängigen Variablen y und explizit abhängig von der unabhängigen Variablen τ . Der homogene Teil ist aufgrund unserer Transformationen zeitunabhängig, die Gleichung entspricht daher einem angeregten harmonischen Oszillator, wobei die Anregung durch eine polynomische Form in y und e gegeben ist. Im nächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe der Methode von Poincaré - Lindstedt diese Gleichung lösen. Der Versuch stellt insofern etwas Neues dar, als das die Methode eigentlich für Gleichungen, die nicht explizit von der Zeit abhängen, entwickelt wurde. Es ist bis zu diesem Zeitpunkt kein Beispiel aus der Literatur bekannt, in dem die Methode auf Gleichungen vom Typ (79) erweitert wurde. Ein wesentlicher Punkt dieser Arbeit ist daher, zu zeigen, dass die Methode ohne weiteres auch für diesen Typus funktioniert. Über das Konvergenzverhalten des Verfahrens im allgemeinen kann an dieser Stelle jedoch noch keine uniforme Aussage getroffen werden.

3.3.2. Durchführung des Ansatzes

Ausgangspunkt der Methode der gedehnten Koordinaten ist die Verwendung von zwei Ansätzen der Form:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + y_1(\tau)\lambda + y_2(\tau)\lambda^2 + y_3(\tau)\lambda^3 + y_4(\tau)\lambda^4 + y_5(\tau)\lambda^5 + O(\lambda^6) \quad (80)$$

Im Unterschied zu diesem klassischen Störansatz entwickeln wir zusätzlich noch die unabhängige Variable τ ebenfalls nach dem Störparameter λ :

$$\tau(\sigma) = \sigma + T_1(\sigma)\lambda + T_2(\sigma)\lambda^2 + T_3(\sigma)\lambda^3 + T_4(\sigma)\lambda^4 + T_5(\sigma)\lambda^5 + O(\lambda^6) \quad (81)$$

wobei y_i und T_i ($i = 0, \dots, 5$) unbekannte Koeffizientenfunktionen und λ der künstlich eingeführte Störparameter ($\lambda = 1$) sind. Durch den Ansatz in (81) dehnen wir die Zeit; die verstrichene Zeitdauer hängt nun selbst vom Störparameter λ ab und die so gewonnen freien Funktionen T_n ermöglichen uns, die nicht physikalischen Säkularterme durch geschickte Wahl aufzuheben. Setzen wir (80) und (81) in (79) ein, so erhalten wir durch Ordnen der Terme nach den auftretenden Potenzen in λ das zu lösende Gleichungssystem (der Operator $'$ meint ab hier ausschließlich die Ableitung nach der unabhängigen Variablen σ):

$$y_0'' + 8 y_0 = 0 \quad (82.0)$$

$$y_1'' + 8 y_1 = 2 T_1' y_0'' + y_0' T_1'' \quad (82.1)$$

$$y_2'' + 8 y_2 = 2 T_2' y_0'' + T_1' (2 y_1'' - 3 T_1' y_0'') + y_1' T_1'' + y_0' (T_2'' - 3 T_1' T_1'') \quad (82.2)$$

$$\begin{aligned} y_3'' + 8 y_3 = & 12 \sqrt{2} y_0^3 + 2 T_3' y_0'' + 2 T_2' y_1'' + \\ & T_1' (-6 T_2' y_0'' + T_1' (4 T_1' y_0'' - 3 y_1'')) + 2 y_2'' + y_2' T_1'' + \\ & y_1' (T_2'' - 3 T_1' T_1'') + y_0' (-3 T_2' T_1'' + T_1' (6 T_1' T_1'' - 3 T_2'')) + T_3'' \end{aligned} \quad (82.3)$$

$$\begin{aligned} y_4'' + 8 y_4 = & \frac{1}{31} \sqrt{2} 132 e \cos(\sigma) y_0^3 + 36 \sqrt{2} y_1 y_0^2 + 2 T_4' y_0'' + \\ & 2 T_3' y_1'' + T_2' (2 y_2'' - 3 T_2' y_0'') + T_1' (-6 T_3' y_0'' - 6 T_2' y_1'' + \\ & T_1' (12 T_2' y_0'' + T_1' (4 y_1'' - 5 T_1' y_0'') - 3 y_2'')) + 2 y_3'' + y_3' T_1'' + \end{aligned} \quad (82.4)$$

$$\begin{aligned}
& y_2' (T_2'' - 3 T_1' T_1'') + y_1' (-3 T_2' T_1'' + T_1' (6 T_1' T_1'' - 3 T_2'')) + T_3'' + \\
& y_0' (-3 T_3' T_1'' - 3 T_2' T_2'' + \\
& \quad T_1' (12 T_2' T_1'' + T_1' (6 T_2'' - 10 T_1' T_1'') - 3 T_3'')) + T_4'' \\
& y_5'' + 8 y_5 = e \left(\frac{1}{31} \sqrt{2} 396 \cos(\sigma) y_1 y_0^2 + \right. \\
& \quad \left. e \left(\frac{1}{961} \sqrt{2} 825 y_0^3 + \frac{1}{961} \sqrt{2} 2784 \cos(2\sigma) y_0^3 \right) \right) + \\
& y_0 (36 \sqrt{2} y_1^2 + y_0 (36 \sqrt{2} y_2 - 30 y_0^3)) + 2 T_5' y_0'' + 2 T_4' y_1'' + \\
& 2 T_3' y_2'' + T_2' (-6 T_3' y_0'' - 3 T_2' y_1'' + 2 y_3'') + \\
& T_1' (-6 T_4' y_0'' - 6 T_3' y_1'' + \\
& \quad T_2' (12 T_2' y_0'' - 6 y_2'') + T_1' (12 T_3' y_0'' + 12 T_2' y_1'' + \\
& \quad T_1' (-20 T_2' y_0'' + T_1' (6 T_1' y_0'' - 5 y_1'') + 4 y_2'') - 3 y_3'') + \\
& \quad 2 y_4'') + y_4' T_1'' + y_3' (T_2'' - 3 T_1' T_1'') + \\
& y_2' (-3 T_2' T_1'' + T_1' (6 T_1' T_1'' - 3 T_2'')) + T_3'' + \\
& y_1' (-3 T_3' T_1'' - 3 T_2' T_2'' + \\
& \quad T_1' (12 T_2' T_1'' + T_1' (6 T_2'' - 10 T_1' T_1'') - 3 T_3'')) + T_4'' + \\
& y_0' (-3 T_4' T_1'' - 3 T_3' T_2'' + T_2' (6 T_2' T_1'' - 3 T_3'')) + \\
& \quad T_1' (12 T_3' T_1'' + 12 T_2' T_2'' + T_1' (-30 T_2' T_1'' + \\
& \quad T_1' (15 T_1' T_1'' - 10 T_2'')) + 6 T_3'') - 3 T_4'') + T_5'')
\end{aligned} \tag{82.5}$$

Auf den ersten Blick scheint das System schwierig zu lösen. Es handelt sich um sehr stark verschachtelte Gleichungen, die verwendete Hornerform soll dies deutlich hervorheben. Warum Störungstheorie verwenden, wenn das Ergebnis scheinbar eine Ansammlung von schwerer zu lösenden Gleichungen als die Ausgangsgleichung ist? Blicken wir jedoch genauer hin, so sehen wir, dass jede der Gleichungen einem einfachen Bildungsgesetz gehorcht. Alle Gleichungen (82.0) - (82.5) haben folgende grundlegende Form:

$$\begin{aligned}
y_i'' + 8 y_i = F_i(y_0, \dots, y_n, y_0', \dots, y_n', y_0'', \dots, y_n'', \\
T_0, \dots, T_n, T_0', \dots, T_n', T_0'', \dots, T_n'', \sigma)
\end{aligned} \tag{83}$$

Wobei $F_0 = 0$ und alle weiteren F_i rekursiv durch die Lösungen y_j und T_j mit $j \leq i$ eindeutig gegeben sind. Die homogene Lösung jeder der Gleichungen des Differentialgleichungssystems entspricht einem gewöhnlichen Oszillator mit Grundfrequenz $2\sqrt{2}$, es folgt daher sofort die allgemeine Beziehung:

$$y_{\text{hom},i} = C_{i,1} \cdot \cos(2\sqrt{2}\sigma) + C_{i,2} \cdot \sin(2\sqrt{2}\sigma) \tag{84}$$

wobei die $C_{i,j}$ ($i = 1, 2$; $j = 0, \dots, 5$) aus den Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sein müssen. Es gilt insbesondere für die Lösung nullter Ordnung und für die Wahl $y(0) = y_0$ und $y'(0) = y_0'$:

$$y_0 = C_{1,1} \cdot \cos(2\sqrt{2}\sigma) + C_{1,2} \cdot \sin(2\sqrt{2}\sigma) \tag{85}$$

$$C_{1,1} = y_0 \equiv C_1 \tag{86.1}$$

$$C_{1,2} = \frac{y_0'}{2\sqrt{2}} \equiv C_2 \quad (86.2)$$

Wir haben es hier mit der gleichen Lösung nullter Ordnung zu tun, wie im 2. Kapitel für den integrierbaren Fall der Bewegungsgleichung. Die Grundfrequenz der periodischen Lösungen im Sitnikovproblem entsprechen jener von $2\sqrt{2}$. Trotzdem ist es uns gelungen, nichtlineare Effekte gewissermaßen in der Transformation durch die zeitabhängige Amplituden- und Phasenfunktion zu "verstauen". Die Lösung nullter Ordnung (85) entspricht in der Form zwar jener von (17), rührt aber bereits von der nichtlinearen Bewegungsgleichung her.

Die allgemeine Lösung einer Gleichung vom Typ (83) lautet:

$$\begin{aligned} y_i(\sigma) = & C_{i,1} \cdot \cos(2\sqrt{2}\sigma) + C_{i,2} \cdot \sin(2\sqrt{2}\sigma) + \\ & \cos(2\sqrt{2}\sigma) \left(\int_0^\sigma -\frac{\sin(2\sqrt{2}\rho) F_i(\dots, \rho)}{2\sqrt{2}} d\rho \right) + \\ & \left(\int_0^\sigma \frac{\cos(2\sqrt{2}\rho) F_i(\dots, \rho)}{2\sqrt{2}} d\rho \right) \sin(2\sqrt{2}\sigma) \end{aligned} \quad (87)$$

Da die Anfangsbedingungen mit (85) vollständig erfüllt sind, müssen wir alle weiteren $C_{i,j}$ ($j = 1,2$) mit $i > 0$ in (87) null setzen. Die Bestimmung der Lösungen des Gleichungssystems (82.1) - (82.5) reduziert sich somit auf das Auffinden von Integralen vom Typ (87), sowie dem wiederholten Vereinfachen von algebraischen und trigonometrischen Ausdrücken. Da alle F_i ($i = 0, \dots, 5$) höchstens aus Produkten von trigonometrischen Funktionen aufgebaut sind, lassen sich diese auch in jedem Fall integrieren. Es ist daher möglich, mit dem konstruierten Verfahren, durch den Rechenaufwand begrenzt, beliebige Ordnungen in λ anzugeben. Die wachsende Anzahl der Terme setzt dem jedoch eine praktische obere Schranke entgegen. Zudem haben wir es mit semikonvergenten Reihen zu tun, eine Konvergenz für die Reihendarstellung ist daher mit steigender Ordnung nicht gesichert. Die Genauigkeit wird nur bis zu einer gewissen Ordnung zunehmen, mit wachsender Ordnung jedoch wieder abnehmen. Das Problem, welches in der Himmelsmechanik in der Störungstheorie häufig auftritt, wird auch Problem der kleinen Divisoren genannt. Diese treten zunehmend mit wachsender Ordnung auf und führen dazu, dass sie die Konvergenz der Reihen zusammenbrechen lassen. Der Grund, warum wir in dieser Arbeit die Ordnung nicht weiter als bis zur 5. Ordnung und im Anhang nicht über $O(\lambda^7)$ erhöhen, begründet sich jedoch allein dadurch, dass durch die Approximation der Bewegungsgleichung bis zur 7. Ordnung höchstens eine Genauigkeit erreicht werden kann, die wir gerade eben mit der 7. Ordnung in λ überschritten haben. Jede weitere Ordnung würde daher nur eine Verbesserung an jenen Stellen hinter dem Komma liefern, welche durch die Approximation der Differentialgleichung nicht mehr relevant sind.

Setzen wir die Lösung nullter Ordnung (85) in (82.1) ein, so erhalten wir für die erste Ordnung die folgende Differentialgleichung:

$$y_1'' + 8 y_1 = \cos(2 \sqrt{2} \sigma) (2 \sqrt{2} C_2 T_1'' - 16 C_1 T_1') + \sin(2 \sqrt{2} \sigma) (-16 C_2 T_1' - 2 \sqrt{2} C_1 T_1'') \quad (88)$$

Um die zu Resonanzen führenden Terme (mit Argument $2 \sqrt{2} \sigma$) zu beseitigen, müssen wir T_1 derart wählen, dass sowohl

$$\sqrt{2} C_1 T_1'' + 8 C_2 T_1' = 0 \quad (89)$$

als auch

$$8 C_1 T_1' - \sqrt{2} C_2 T_1'' = 0 \quad (90)$$

erfüllt sind. Die Lösungen von (89) und (90) sind

$$T_1(\sigma) = K_2 - \frac{e^{-\frac{4 \sqrt{2} \sigma C_2}{C_1}} K_1 C_1}{4 \sqrt{2} C_2} \quad (91)$$

beziehungsweise

$$T_1(\sigma) = K_2 + \frac{e^{\frac{4 \sqrt{2} \sigma C_1}{C_2}} C_2 K_1}{4 \sqrt{2} C_1} \quad (92)$$

Um den Kosinusterm und den Sinusterm gleichzeitig zu eliminieren, setzen wir K_1 und K_2 gleich null. Übrig bleibt die triviale Lösung

$$T_1(\sigma) = 0 \quad (93)$$

Die Wahl für die Konstanten rechtfertigt sich aus der Tatsache, dass sie nur säkulare Terme verhindern muss. Wir können daher jede spezielle Lösung von (89) oder (90) wählen, solange sie nur beide Terme zum verschwinden bringt. Die triviale Lösung reicht daher völlig aus!

Gleichung (88) wird somit zu einem einfachen harmonischen Oszillator.

$$y_1'' + 8 y_1 = 0 \quad (94)$$

Da die Anfangsbedingungen bereits mit der Lösung nullter Ordnung erfüllt wurden, setzen wir die unbestimmten Konstanten in der Lösung darin gleich null, für den linearen Term bleibt daher die triviale Lösung:

$$y_1(\sigma) = 0 \quad (95)$$

Wir fahren fort und setzen die gefunden Lösungen für y_0 und y_1 in (82.2) ein. Durch einfache algebraische Umformungen ergibt sich wiederum eine einfache Form derart, dass

$$y_2'' + 8 y_2 = \cos(2 \sqrt{2} \sigma) (2 \sqrt{2} C_2 T_2'' - 16 C_1 T_2') + \sin(2 \sqrt{2} \sigma) (-16 C_2 T_2' - 2 \sqrt{2} C_1 T_2'') \quad (96)$$

Die Form von Gleichung (96) ist bis auf den Index i der von (88) ident. Analogerweise folgern wir für die Zeitdehnungsfunktion und Lösung zweiter Ordnung:

$$T_2(\sigma) = 0 \quad (97)$$

und

$$y_2(\sigma) = 0 \quad (98)$$

Betrachten wir die Ausgangsgleichung (79), so wird klar, die auftretenden Potenzen in λ sind $\lambda^0, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, \lambda^6$ und λ^7 . Folglich verschwinden bei einem Störungsansatz um λ die Ordnungen 1 und 2. Betrachten wir die Gleichung der 3. Ordnung (82.3) und setzen die gewonnenen Ausdrücke der Ordnungen $\lambda < 3$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} y_3'' + 8 y_3 = & 3 \sqrt{2} E_{1,2} \cos(6 \sqrt{2} \sigma) - 3 \sqrt{2} E_{2,1} \sin(6 \sqrt{2} \sigma) + \\ & \sin(2 \sqrt{2} \sigma) (\sqrt{2} (9 D C_2 - 2 C_1 T_3'') - 16 C_2 T_3') + \\ & \cos(2 \sqrt{2} \sigma) (\sqrt{2} (9 D C_1 + 2 C_2 T_3'') - 16 C_1 T_3') \end{aligned} \quad (99)$$

wobei die Konstanten D und $E_{i,j}$ definiert sind über die Relationen:

$$D = C_1^2 + C_2^2 \quad (100.1)$$

$$E_{i,j} = C_i (C_i^2 - 3 C_j^2) \quad (i, j \in (1, 2)) \quad (100.2)$$

Die Amplituden der zu Säkulartermen führenden Ausdrücke sind:

$$(\sqrt{2} (9 D C_1 + 2 C_2 T_3'') - 16 C_1 T_3') = 0 \quad (101)$$

$$(\sqrt{2} (9 D C_2 - 2 C_1 T_3'') - 16 C_2 T_3') = 0 \quad (102)$$

wobei (102) vom Sinusterm, (101) vom Kosinusterm herrührt. Eine spezielle Lösung, die beide Gleichungen erfüllt, kann leicht gefunden werden. Setzt man die auftretenden Konstanten der allgemeinen Lösung gleich null, so erhält man folgende Wahl für T_3 , die die Bedingung erfüllt, beide resonanten Terme zu eliminieren:

$$T_3(\sigma) = \frac{9}{8 \sqrt{2}} D \sigma \quad (103)$$

Setzen wir (103) in (99) ein so erhalten wir die zu lösende Gleichung:

$$y_3'' + 8 y_3 = 3 \sqrt{2} E_{1,2} \cos(6 \sqrt{2} \sigma) - 3 \sqrt{2} E_{2,1} \sin(6 \sqrt{2} \sigma) \quad (104)$$

Auch diese Gleichung ist von der Form (83), wir lösen sie daher durch Integration des inhomogenen Teils anhand der gefundenen Formel in (87), wobei die Konstanten gleich Null gesetzt werden dürfen, und erhalten für die dritte Ordnung:

$$y_3(\sigma) = -\frac{3}{32 \sqrt{2}} (E_{1,2} \cos(6 \sqrt{2} \sigma) - E_{2,1} \sin(6 \sqrt{2} \sigma)) \quad (105)$$

Wir fahren fort mit Gleichung (82.4). Diese lässt sich in eine sehr kompakte Form schreiben. Wir vereinfachen die trigonometrischen Terme und heben nur jene Ausdrücke heraus, die zu Säkulartermen führen:

$$y_4'' + 8 y_4 = \frac{132}{31} \sqrt{2} e \cos(\sigma) (C_1 \cos(2 \sqrt{2} \sigma) + C_2 \sin(2 \sqrt{2} \sigma))^3 - \\ \sin(2 \sqrt{2} \sigma) 2 (8 C_2 T_4' + \sqrt{2} C_1 T_4'') + \\ \cos(2 \sqrt{2} \sigma) 2 (\sqrt{2} C_2 T_4'' - 8 C_1 T_4') \quad (106)$$

Die Koeffizienten der resonanten Terme entsprechen in der Form jenen in (88). Wir folgern daher analog für die Zeitdehnungsfunktion T_4 :

$$T_4(\sigma) = 0 \quad (107)$$

Übrig bleibt die Differentialgleichung:

$$y_4'' + 8 y_4 = \frac{1}{31} (-132) \sqrt{2} e \cos(\sigma) (C_1 \cos(2 \sqrt{2} \sigma) + C_2 \sin(2 \sqrt{2} \sigma))^3 \quad (108)$$

Auch diese Gleichung ist lösbar. Die Lösung ergibt sich durch Integration und sieht in kompakter Form folgendermaßen aus:

$$y_4(\sigma) = \\ \frac{1}{122047} (33 e (381 D \sin(2 \sqrt{2} \sigma) (\sqrt{2} C_2 \cos(\sigma) + 8 C_1 \sin(\sigma)) + 381 D \\ \cos(2 \sqrt{2} \sigma) (\sqrt{2} C_1 \cos(\sigma) - 8 C_2 \sin(\sigma)) - \\ \sin(6 \sqrt{2} \sigma) (24 E_{1,2} \sin(\sigma) - 65 \sqrt{2} E_{2,1} \cos(\sigma)) - \\ \cos(6 \sqrt{2} \sigma) (65 \sqrt{2} E_{1,2} \cos(\sigma) + 24 E_{2,1} \sin(\sigma))) \quad (109)$$

Wir werden später die trigonometrischen Funktionen mit gleichem Argument zusammenfassen, wenn es darum geht, die Ergebnisse aller Ordnungen aneinander zu reihen. Durch Einsetzen der Beziehungen T_i und y_i mit $i < 5$ in (82.5) erhalten wir für die 5. Ordnung in λ nun die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
y_5'' + 8 y_5 = & \frac{1}{7688} \left(3 \left(7424 \sqrt{2} e^2 \cos(2\sigma) (C_1 \cos(2\sqrt{2}\sigma) + C_2 \sin(2\sqrt{2}\sigma)) \right)^3 + \right. \\
& 5 \left(-5 (961 D - 22 \sqrt{2} e^2) E_{1,2} \cos(6\sqrt{2}\sigma) + \right. \\
& 5 (961 D - 22 \sqrt{2} e^2) E_{2,1} \sin(6\sqrt{2}\sigma) - \\
& \left. \left. 961 F_{1,2} \cos(10\sqrt{2}\sigma) - 961 F_{2,1} \sin(10\sqrt{2}\sigma) \right) \right) + \\
& \cos(2\sqrt{2}\sigma) \left(C_1 \left(\frac{75 D (33 \sqrt{2} e^2 - 961 D)}{3844} - 16 T_5' \right) + 2 \sqrt{2} C_2 T_5'' \right) + \\
& \sin(2\sqrt{2}\sigma) \left(C_2 \left(\frac{75 D (33 \sqrt{2} e^2 - 961 D)}{3844} - 16 T_5' \right) - 2 \sqrt{2} C_1 T_5'' \right)
\end{aligned} \tag{110}$$

wobei die Konstante $F_{i,j}$ sich aus den Anfangswerten ergibt:

$$F_{i,j} = C_i (C_i^4 - 10 C_i^2 C_j^2 + 5 C_j^4) \tag{111}$$

Folgende Koeffizienten müssen aus Gleichung (110) eliminiert werden, um das Auftreten künstlicher Säkularterme zu verhindern:

$$C_1 \left(\frac{75 D (33 \sqrt{2} e^2 - 961 D)}{3844} - 16 T_5' \right) + 2 \sqrt{2} C_2 T_5'' = 0 \tag{112}$$

$$C_2 \left(\frac{75 D (33 \sqrt{2} e^2 - 961 D)}{3844} - 16 T_5' \right) - 2 \sqrt{2} C_1 T_5'' = 0 \tag{113}$$

Eine spezielle Lösung, die beide Gleichungen (112) und (113) erfüllt, ist:

$$T_5(\sigma) = - \frac{75 D (961 D - 33 \sqrt{2} e^2)}{61504} \sigma \tag{114}$$

Die Differentialgleichung der 5. Ordnung ergibt sich demnach zu:

$$\begin{aligned}
y_5'' + 8 y_5 = & \frac{1}{7688} \left(3 \left(7424 \sqrt{2} e^2 \cos(2\sigma) (C_1 \cos(2\sqrt{2}\sigma) + C_2 \sin(2\sqrt{2}\sigma)) \right)^3 + \right. \\
& 5 \left(-5 (961 D - 22 \sqrt{2} e^2) E_{1,2} \cos(6\sqrt{2}\sigma) + \right. \\
& 5 (961 D - 22 \sqrt{2} e^2) E_{2,1} \sin(6\sqrt{2}\sigma) - \\
& \left. \left. 961 F_{1,2} \cos(10\sqrt{2}\sigma) - 961 F_{2,1} \sin(10\sqrt{2}\sigma) \right) \right)
\end{aligned} \tag{115}$$

Der inhomogene Teil von Gleichung (115) ist hier in einer sehr kompakten Form niedergeschrieben. Ersetzt man die Produkte der trigonometrischen Funktionen durch ihre äquivalenten Darstellungen in Form von kombinierten Argumenten kann das Integral der Form

(87) gefunden werden und ergibt sich zu (bereits geordnet nach den auftretenden Argumenten der trigonometrischen Funktionen):

$$\begin{aligned}
 y_5(\sigma) = & \frac{1}{106770944} \left(4142592 (-4 + \sqrt{2}) e^2 C_1 D \cos(2 \sqrt{2} \sigma + 2 \sigma) + \right. \\
 & 4142592 (4 + \sqrt{2}) e^2 C_1 D \cos(2 \sigma - 2 \sqrt{2} \sigma) + \\
 & 4142592 (-4 + \sqrt{2}) e^2 C_2 D \sin(2 \sqrt{2} \sigma + 2 \sigma) - \\
 & 4142592 (4 + \sqrt{2}) e^2 C_2 D \sin(2 \sigma - 2 \sqrt{2} \sigma) - \\
 & 44544 (-12 + 17 \sqrt{2}) e^2 E_{1,2} \cos(6 \sqrt{2} \sigma + 2 \sigma) - \\
 & 44544 (12 + 17 \sqrt{2}) e^2 E_{1,2} \cos(2 \sigma - 6 \sqrt{2} \sigma) + \\
 & 44544 (-12 + 17 \sqrt{2}) e^2 E_{2,1} \sin(6 \sqrt{2} \sigma + 2 \sigma) - \\
 & 44544 (12 + 17 \sqrt{2}) e^2 E_{2,1} \sin(2 \sigma - 6 \sqrt{2} \sigma) + \\
 & 16275 (961 D - 22 \sqrt{2} e^2) E_{1,2} \cos(6 \sqrt{2} \sigma) - \\
 & 16275 (961 D - 22 \sqrt{2} e^2) E_{2,1} \sin(6 \sqrt{2} \sigma) + \\
 & \left. 1042685 F_{1,2} \cos(10 \sqrt{2} \sigma) + 1042685 F_{2,1} \sin(10 \sqrt{2} \sigma) \right) \quad (116)
 \end{aligned}$$

Die mit steigender Ordnung wachsende Anzahl der Terme ist nur mit ausgezeichneten Computer - Algebra - Kenntnissen zu meistern. Es reicht auf keinen Fall aus, die Gleichungen einzugeben und mit den vorgefertigten Standardmethoden zu bearbeiten. Der Rechen- und Speicheraufwand würde jeden Versuch augenblicklich zunichte machen, wovon sich der Leser sofort überzeugen kann. In Kapitel 5 wird ein Algorithmus *MPLExpansion* vorgestellt, der die Methode von Poincaré - Lindstedt automatisiert durchführt. Das Aufstellen der Gleichungen, die Ableitungen der Bedingungen für die resonanten Terme, deren Elimination sowie das vielfache Umordnen der auftretenden Ausdrücke erfordert ein Maximum an Optimierungen. Die Herleitung der Ergebnisse für die weiteren Ordnungen kann aus dem Protokoll, welches vom Algorithmus während der Ableitung erstellt wird, eingesehen werden. Es handelt sich um eine sehr standardisierte Methode. Der Vorgang folgt in allen Punkten, denen der letzten Ordnungen.

Wir haben das Problem im Prinzip gelöst. Die Ansatzgleichungen (80) und (81), mit den Lösungen in den einzelnen Ordnungen y_i der Gleichungen (85), (95), (98), (105), (109) und (116) sowie die Lösungen für die Zeitdehnungsfunktionen T_i in (93), (97), (103), (107) und (114) definieren die Lösung in den Variablen y und σ . Im nächsten Abschnitt geht es darum, die gewonnen Ergebnisse auf die Variablen z und t rückzutransformieren. Besonderes Augenmerk wird darauf gelegt, eine Form zu finden, in der wir die Lösungen für physikalische Zwecke verwerten können.

3.4. Analytische Lösung der nichtlinearen Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die gefundene Lösung in eine Form bringen, in der wir sie für weitere Analysen verwerten können. Um physikalische Zusammenhänge der Systemparameter e , $z(0)$, $z'(0)$ und der Zeit t aufstellen zu können, suchen wir am besten eine Darstellung der Form:

$$z(t) = \sum_{k=1}^N (A_k(C_1, C_2, e, t) \cdot \cos(\Psi_k(C_1, C_2, e, t)) + B_k(C_1, C_2, e, t) \cdot \sin(\Psi_k(C_1, C_2, e, t))) \quad (117)$$

wobei C_1 mit der Anfangsamplitude und C_2 mit der Anfangsgeschwindigkeit über (86.1) und (86.2) zusammenhängt. Zusätzlich möchten wir die Amplituden- und Phasenfunktionen in eine Form bringen, sodass wir sofort lineare und nichtlineare physikalische Effekte des Systems auf den dritten Körper trennen und verstehen können. Wir suchen daher im allgemeinen folgende Form für die Amplitudenfunktionen A_k und B_k :

$$A_k = A_k(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \cdot C_1^k \cdot C_2^l \cdot e^m \quad (k + l + m = i - 1) \quad (118)$$

$$B_k = B_k(t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \cdot C_1^k \cdot C_2^l \cdot e^m \quad (k + l + m = i - 1) \quad (119)$$

sowie eine ähnliche Form der Darstellung für die Phasenfunktionen

$$\Psi_k = \Psi_k(t) = \sum_{i=1}^N \psi_{a,i}(t) \cdot C_1^k \cdot C_2^l \cdot e^m \quad (k + l + m = i - 1) \quad (120)$$

Die Form, in der wir die Lösung darstellen möchten, spiegelt die wohl wichtigste Eigenschaft von nichtlinearen Systemen wieder: Die explizite Abhängigkeit der Amplituden- und Phasenfunktion von der Zeit und den Anfangsbedingungen, wie wir sie in linearen Systemen, wie z.B. dem harmonischen Oszillator, nicht finden.

Um die Lösung aus dem vorigen Abschnitt auf die Form (117) zu bringen, erinnern wir uns an die Transformationen, die die abhängige Variable z auf y und die unabhängige Variable t auf σ transformiert haben. Durch Umkehrung von (61) ergibt sich für die Position z in Abhängigkeit der Zeit:

$$z(t) = w(t) \cdot y(t) \quad (121)$$

Die Zeit t haben wir im ersten Schritt durch die Variable ψ , dann durch τ und schließlich durch σ ersetzt. Es folgt daher sofort durch Umkehrung der Reihenfolge der verwendeten Transformationen:

$$z(t) = w(t) \cdot y(\sigma(\tau(\psi(t)))) \quad (122)$$

Dies sieht unserer gewünschten Form schon recht ähnlich, betrachten wir unsere Resultate aus dem vorherigen Abschnitt; dennoch müssen wir noch einiges an Rechenzeit investieren, die einzelnen Terme in die alten Variablen rückzutransformieren und entsprechend ihrer Wirkung zu ordnen. Es heißt, einen Algorithmus zu finden, mit dem wir sie in die gewünschte Reihenfolge bringen können. Dies händisch durchzuführen würde zu lange dauern und stünde in keiner Relation zu den gewonnenen physikalischen Erkenntnissen. Im ersten Schritt bestimmen wir die Umkehrabbildung zu (81), um die unabhängige Variable σ auf τ zu transformieren, im zweiten suchen wir die Anteile an den einzelnen Amplitudentermen.

3.4.1. Die nichtlineare Phasenfunktion der Lösung

Die durch den Ansatz (81) definierte Zeittransformation von τ nach σ ergibt sich gemäß (93), (97), (103) und (107) sowie (114) bis zur 5. Ordnung zu:

$$\tau(\sigma) = \sigma + \frac{9 D \sigma \lambda^3}{8 \sqrt{2}} - \frac{75 (D (961 D - 33 \sqrt{2} e^2) \sigma) \lambda^5}{61504} + O(\lambda^6) \quad (123)$$

Bei der Umkehrfunktion handelt es sich wiederum um eine Störreihe, gegeben durch den Ansatz:

$$\sigma = \sigma_0(\tau) + \sigma_1(\tau) \lambda + \sigma_2(\tau) \lambda^2 + \sigma_3(\tau) \lambda^3 + \sigma_4(\tau) \lambda^4 + \sigma_5(\tau) \lambda^5 + O(\lambda^6) \quad (124)$$

Wir folgen der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.2., setzen (124) in (123) ein, entwickeln und ordnen nach dem Parameter λ . Es folgt daraus das Gleichungssystem:

$$\sigma_0(\tau) = \tau \quad (125.0)$$

$$\sigma_1(\tau) = 0 \quad (125.1)$$

$$\sigma_2(\tau) = 0 \quad (125.2)$$

$$\frac{9 D \sigma_0(\tau)}{8 \sqrt{2}} + \sigma_3(\tau) = 0 \quad (125.3)$$

$$\frac{9 D \sigma_1(\tau)}{8 \sqrt{2}} + \sigma_4(\tau) = 0 \quad (125.4)$$

$$-\frac{75 D (961 D - 33 \sqrt{2} e^2) \sigma_0(\tau)}{61504} + \frac{9 D \sigma_2(\tau)}{8 \sqrt{2}} + \sigma_5(\tau) = 0 \quad (125.5)$$

Die Umkehrtransformation ergibt sich somit durch den Ansatz (121) und den Lösungen aus dem obigen System zu (wir setzen $\lambda = 1$):

$$\sigma(\tau) = \tau - \frac{9 D}{8 \sqrt{2}} \tau + \frac{75 D (-33 \sqrt{2} e^2 + 961 C_1^2 + 961 C_2^2)}{61504} \tau \quad (126)$$

Die Transformation von τ auf ψ war (72) :

$$\tau = \frac{\psi}{2\sqrt{2}} \quad (127)$$

Die Phasenfunktion $\psi = \psi(t)$ haben wir im Kapitel 2 bestimmt. Setzen wir $\psi(t)$ in die obige Gleichung ein und vernachlässigen Terme mit $e^k \cdot C_1^l \cdot C_2^m$ mit $k+l+m > 5$ so erhalten wir schließlich die gesuchte Beziehung σ in Abhängigkeit von t :

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \sigma_{\text{lin}} t + \sigma_{\text{osc}} = & \\ t \left(1 - \frac{9(C_1^2 + C_2^2)}{8\sqrt{2}} + \frac{75}{32} C_1^2 C_2^2 + \frac{75}{64} (C_1^4 + C_2^4) + \right. & \\ \left. \left(\frac{21}{124} - \frac{4167(C_1^2 + C_2^2)}{15376\sqrt{2}} \right) e^2 + \frac{89607 e^4}{953312} \right) + & \\ \sin(t) \left(\frac{417688347 e^5}{2633881892} + \left(\frac{2538}{29791} - \frac{26271(C_1^2 + C_2^2)}{119164\sqrt{2}} \right) e^3 + \right. & \\ \left. \left(\frac{225}{62} C_1^2 C_2^2 - \frac{27}{31} \sqrt{2} (C_1^2 + C_2^2) + \frac{225}{124} (C_1^4 + C_2^4) + \frac{48}{31} \right) e \right) + & \\ \sin(2t) \left(e^2 \left(\frac{855}{961} - \frac{7695(C_1^2 + C_2^2)}{7688\sqrt{2}} \right) - \frac{13377241 e^4}{84963932} \right) + & \\ \sin(3t) \left(e^3 \left(\frac{1503718}{2055579} - \frac{2255577(C_1^2 + C_2^2)}{2740772\sqrt{2}} \right) - \frac{37775255721 e^5}{121158567032} \right) + & \\ \frac{474025501 \sin(4t) e^4}{679711456} + \frac{18990343371 \sin(5t) e^5}{26338818920} & \end{aligned} \quad (128)$$

Sie besteht aus einem direkt zeitproportionalen Anteil σ_{lin} und einem oszillierenden Anteil σ_{osc} . Um auf die Form von (120) zu kommen, ist es notwendig, die Terme nach folgender absteigender Priorität zu ordnen: Nach der Variablen t (um die lineare Phasenverschiebung zu bekommen), nach den trigonometrischen Ausdrücken ($\sin(n \cdot t)$) und nach der Exzentrizität e , wobei wir gleiche Potenzen und Produkte in C_i zusammengefasst haben. Eine Aufgabe für Computeralgebra, wie sie mit der Prozedur *Sigma* im Kapitel 5 implementiert ist.

Die Lösung des Sitnikovproblems lässt sich daher schreiben:

$$z(t) = w(t) \cdot y(\sigma(t)) \quad (129)$$

wobei $\sigma(t)$ durch Gleichung (128) eindeutig definiert ist. Es ist uns somit nun möglich, die nichtlinearen Phasenfunktionen $\psi_k(t)$ explizit gemäß (120) anzuschreiben:

$$\psi_1(t) = 2\sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.1)$$

$$\psi_2(t) = 6\sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.2)$$

$$\psi_3(t) = 10\sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.3)$$

$$\psi_4(t) = \sigma(t) - 6\sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.4)$$

$$\psi_5(t) = 2 \sigma(t) - 6 \sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.5)$$

$$\psi_6(t) = \sigma(t) - 2 \sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.6)$$

$$\psi_7(t) = 2 \sigma(t) - 2 \sqrt{2} \sigma(t) \quad (130.7)$$

$$\psi_8(t) = 2 \sqrt{2} \sigma(t) + \sigma(t) \quad (130.8)$$

$$\psi_9(t) = 2 \sqrt{2} \sigma(t) + 2 \sigma(t) \quad (130.9)$$

$$\psi_{10}(t) = 6 \sqrt{2} \sigma(t) + \sigma(t) \quad (130.10)$$

$$\psi_{11}(t) = 6 \sqrt{2} \sigma(t) + 2 \sigma(t) \quad (130.11)$$

Deutlich ist die Grundfrequenz des linearisierten Falls in der nichtlinearen Phasenfunktion nullter Ordnung wieder zu erkennen: $2 \sqrt{2}$. In der Struktur von (128) sieht man gleich den Einfluss der nichtlinearen Effekte auf das System: Eine proportionale Verschiebung in der Zeit in Abhängigkeit von der Exzentrizität e und den Anfangswerten C_1 und C_2 , sowie oszillierende periodische Verschiebungen in der Zeit mit Perioden $n \cdot \pi$, deren Einfluss ebenfalls durch die Anfangsbedingungen und die Exzentrizität festgelegt sind. Für $e = C_1 = C_2 = 0$ reduziert sich σ_{sec} zu $\sigma_0 = t$. Nichtlineare Effekte stören das System durch den Einfluss der Parameter e , C_1 und C_2 . Der oszillatorische Anteil σ_{osc} von $\sigma(t)$ ist periodisch mit $T = 2\pi$. Den maximalen Anteil liefern sie demnach bei $t = k \cdot \pi$ wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Betrachtet man die zwei Anteile σ_{sec} und σ_{osc} zusammen über einen Zeitraum $(0, 2\pi)$, so zeigt sich, dass die einzelnen Frequenzen aufgrund der nichtlinearen Effekte des Systems durch die Funktion $\sigma(t)$ aus der Gleichgewichtslage um $\sigma_0 = t$ gebracht werden. Der Effekt wächst linear mit der Zeit an und verschiebt die Basisfrequenzen für große Zeiten völlig aus ihrer ursprünglichen Lage.

3.4.2. Die nichtlineare Amplitudenfunktion der Lösung

Um die Anteile der Amplituden an den einzelnen Frequenzen aus dem vorigen Abschnitt an der Gesamtlösung zu bestimmen, wollen wir die nichtlineare Amplitudenfunktion aus unseren bisherigen Resultaten gewinnen. Hierfür ist es notwendig, den linearen Anteil $w(t)$ aus Kapitel 2 mit dem nichtlinearen Anteilen aus der Entwicklung in diesem Kapitel zusammenzufügen. Auch hier werden wir das Ergebnis vereinfachen, indem wir Terme mit $e^k C_1^l C_2^m$ mit $k+l+m > 5$ vernachlässigen und die Terme nach einem speziellen Algorithmus sortieren, um eine bessere Übersicht über den Einfluss der Systemparameter auf das Amplitudenspektrum zu bekommen.

Des weiteren wollen wir $j+k+m$ als Ordnungsparameter verwenden, um die Effekte nach ihrem Einfluss auf die Lösung zu sortieren. Da die Größen e , C_1 und $C_2 < 1$ sind, erhalten wir dadurch direkt die gewünschte Form der Lösung und können sofort das Amplitudenspektrum, gegeben durch A_k und B_k bestimmen.

Die Anzahl der Terme, die für unser Vorhaben berücksichtigt werden müssen, beträgt anfänglich ungefähr ~5000, davon über ~2000 Multiplikationen, ~2000 auftretende Potenzen und beinahe ~1000 Additionen. In seiner maximalen Ausdehnung erzeugt die Lösung über 10.000 Terme, davon ~2800 Multiplikationen, ~3600 Potenzausdrücke und über 800 trigonometrische Ausdrücke. Würde man σ in jedem dieser trigonometrischen Terme einsetzen, so ergäbe dies ebenfalls in seiner ausmultiplizierten Form, die Anzahl von 35.000 zusätzlichen Termen. Um einen Wert für die Lösung zu berechnen, bräuchte man daher ungefähr 46.000 Operationen, was selbst einen GHz-Prozessor auf längere Sicht in die Knie zwingen dürfte. Dass der Methode durch die wachsende Anzahl von Termen eine Grenze gesetzt ist, war von Anfang an klar. Freuen wir uns im nächsten Schritt, die Anzahl der Terme auf ein Minimum reduzieren zu können:

Sieht man sich die Struktur der gewonnen Teillösungen an, so erkennt man den fundamentalen Zusammenhang der Kosinus und Sinus Terme. Es ist für $k = 1, \dots, 11$ $B_k = A_k$ oder $B_k = -A_k$, wenn man C_1 durch C_2 und C_2 durch C_1 ersetzt.

Definieren wir zunächst folgende konstante Größen, wobei $i, j \in (1, 2)$:

$$K_p = C_i^p + C_j^p \quad (p \in \mathbb{N}) \quad (131.1)$$

$$L_p = C_i^p C_j^p \quad (p \in \mathbb{N}) \quad (131.2)$$

$$M_1 = C_i^2 - 3 C_j^2 \quad (131.3)$$

$$M_2 = C_i^4 - 10 C_j^2 C_i^2 + 5 C_j^4 \quad (131.4)$$

$$M_3 = C_i (C_i^6 - 21 C_j^2 C_i^4 + 35 C_j^4 C_i^2 - 7 C_j^6) \quad (131.5)$$

insbesondere gelten die Beziehungen zu den Konstanten aus dem vorherigen Abschnitt:

$$K_2 \Leftrightarrow D$$

$$C_i M_1 \Leftrightarrow E_{i,j}$$

$$C_i M_2 \Leftrightarrow F_{i,j}$$

Wir führen hier eine neue Notation ein, weil sich die Lösung dann in einer allgemeineren und wesentlich kürzeren Form nieder schreiben lässt. Zudem gibt uns der Index p in (131.1 -131.2) ein Maß für die Größe der Konstanten an, da sie über die Potenzen der Anfangsbedingungen definiert sind. Unter Berücksichtigung der neuen Abkürzungen ergeben sich die Amplitudenfunktionen A_k für $k = 1..11$ mit $i = 1$ und $j = 2$ zu:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2^{3/4}} + \frac{2805 e^2}{7688 2^{3/4}} + \frac{720921 e^4}{118210688 2^{3/4}} + \left(-\frac{12}{31} 2^{1/4} e + \frac{4725 2^{1/4} e^3}{29791} \right) \cos[t] + \left(-\frac{423 e^2}{961 2^{3/4}} + \frac{51488435 e^4}{169927864 2^{3/4}} \right) \cos[2t] - \frac{242639 e^3 \cos[3t]}{685193 2^{3/4}} - \frac{112233097 e^4 \cos[4t]}{339855728 2^{3/4}} \right) C_i \quad (132.1)$$

$$A_2 = 2^{3/4} \left(-\frac{3}{128} - \frac{10065 e^2}{984064} + \frac{9}{496} e \cos[t] + \frac{1269 e^2 \cos[2t]}{123008} \right) C_i M_1 + \frac{75 C_i K_2 M_1}{512 2^{3/4}} \quad (132.2)$$

$$A_3 = \frac{5 C_i M_2}{512 2^{3/4}} \quad (132.3)$$

$$A_4 = \left(-\frac{33 (24 + 65 \sqrt{2}) e}{244094 2^{3/4}} + \frac{198 2^{1/4} (24 + 65 \sqrt{2}) e^2 \cos[t]}{3783457} \right) C_i M_1 \quad (132.4)$$

$$A_5 = -\frac{87 (12 + 17 \sqrt{2}) e^2 C_i M_1}{208537 2^{3/4}} \quad (132.5)$$

$$A_6 = \left(\frac{99 (8 + \sqrt{2}) e}{1922 2^{3/4}} - \frac{594 \sqrt[4]{2} (8 + \sqrt{2}) e^2 \cos(t)}{29791} \right) C_i K_2 \quad (132.6)$$

$$A_7 = \frac{261 (4 + \sqrt{2}) e^2 C_i K_2}{6727 2^{3/4}} \quad (132.7)$$

$$A_8 = \left(\frac{99 (-8 + \sqrt{2}) e}{1922 2^{3/4}} - \frac{594 \sqrt[4]{2} (-8 + \sqrt{2}) e^2 \cos(t)}{29791} \right) C_i K_2 \quad (132.8)$$

$$A_9 = \frac{261 (-4 + \sqrt{2}) e^2 C_i K_2}{6727 2^{3/4}} \quad (132.9)$$

$$A_{10} = \left(-\frac{33 (-24 + 65 \sqrt{2}) e}{244094 2^{3/4}} + \frac{198 2^{1/4} (-24 + 65 \sqrt{2}) e^2 \cos[t]}{3783457} \right) C_i M_1 \quad (132.10)$$

$$A_{11} = -\frac{87 (-12 + 17 \sqrt{2}) e^2 C_i M_1}{208537 2^{3/4}} \quad (132.11)$$

Es gelten die Beziehungen für die Amplitudenfunktionen B_k :

$$B_k = \text{sgn}(k) A_k \quad (133)$$

wobei hier $i = 2$ und $j = 1$ in den auftretenden Konstanten zu setzen ist. Die Vorzeichenfunktion $\text{sgn}(k)$ ist als k -tes Element der Reihe

$$(+, -, +, +, +, -, -, +, +, -, -, \dots) \quad (134)$$

definiert.

Wir schreiben daher $z(t)$ bis zur 5. Ordnung in e , C_1 und C_2 zu:

$$z(t) = \sum_{k=1}^{11} A_k(t) \cos(\Psi_k(t)) + \sum_{k=1}^{11} B_k(t) \sin(\Psi_k(t)) \quad (135)$$

Die Koeffizienten C_1 und C_2 werden aus den Anfangsbedingungen (z_0, v_0) bestimmt. Hierzu müssen wir die in (86.1) und (86.2) definierten (y_0, y_0') mit denen in den Variablen z und t in Zusammenhang bringen. Sehen wir uns den Weg der Herleitungen, den wir gegangen sind noch einmal an:

Zunächst haben wir die abhängige Variable z durch folgende Vorschrift auf y transformiert:

$$y(t) = \frac{z(t)}{w(t)} \quad (136)$$

$$\frac{d y}{d t} = \frac{1}{w(t)} \frac{d z}{d t} - \frac{z(t)}{w(t)^2} \frac{d w}{d t} \quad (137)$$

Es gilt für die Amplitudenfunktion an der Stelle $t = 0$ bis zur 5. Ordnung:

$$w(0) = \frac{1}{2^{3/4}} - \frac{12 \sqrt[4]{2} e}{31} - \frac{579 e^2}{7688 2^{3/4}} + \left(-\frac{242639}{685193 2^{3/4}} + \frac{4725 \sqrt[4]{2}}{29791} \right) e^3 + -\frac{57468633 e^4}{2718845824 2^{3/4}} - \frac{107476749 e^5}{7816681744 2^{3/4}} \quad (138.1)$$

$$w'(0) = 0 \quad (138.2)$$

Der Term mit der Ableitung von w nach t fällt somit weg. Für die Transformation der unabhängigen Variablen t auf ψ benötigen wir die Phasenfunktion, daher $\psi(t)$ und $\psi'(t)$, es folgt somit:

$$y(t) = \frac{z(\psi(t))}{w(t)} \quad (139)$$

$$\frac{d y}{d t} = \frac{z(\psi(t))}{w(t)^2} \frac{d w}{d t} + \frac{1}{w(t)} \frac{d z}{d \psi} \frac{d \psi}{d t} \quad (140)$$

An der Stelle $t = 0$ ergibt sich die Phasenfunktion zu:

$$\psi(0) = 0 \quad (141.1)$$

$$\begin{aligned}
\psi'(0) = & 2\sqrt{2} + \frac{96\sqrt{2}e}{31} + \frac{7491e^2}{961\sqrt{2}} + \\
& \frac{3124184\sqrt{2}e^3}{685193} + \frac{1745955939e^4}{169927864\sqrt{2}} + \frac{85666448583\sqrt{2}e^5}{15144820879} + \\
& \frac{184248276717405e^6}{15023662311968\sqrt{2}} + \frac{149626072031364189e^7}{11381363180210258\sqrt{2}} + O(e^8)
\end{aligned} \tag{141.2}$$

Die Transformation von ψ auf τ erfolgt durch die Beziehung $\tau = \psi/2\sqrt{2}$. Es folgt:

$$y(t) = \frac{z(\tau(\psi(t)))}{w(t)} \tag{142}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{z(\tau(\psi))}{w(t)^2} \frac{dw}{dt} + \frac{1}{w(t)} \frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \tag{143}$$

und für die Transformationsvorschrift für $t = 0$:

$$\tau(0) = 0 \tag{144.1}$$

$$\tau'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{144.2}$$

Die zuletzt durchzuführende Transformation von τ auf σ macht daraus:

$$y(t) = \frac{z(\sigma(\tau))}{w(t)} \tag{145}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{z(\sigma(\tau))}{w(t)^2} \frac{dw}{dt} + \frac{1}{w(t)} \left(\frac{dz}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\tau}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \right) \tag{146}$$

mit den Bedingungen für $t = 0$

$$\sigma(0) = 0 \tag{147.1}$$

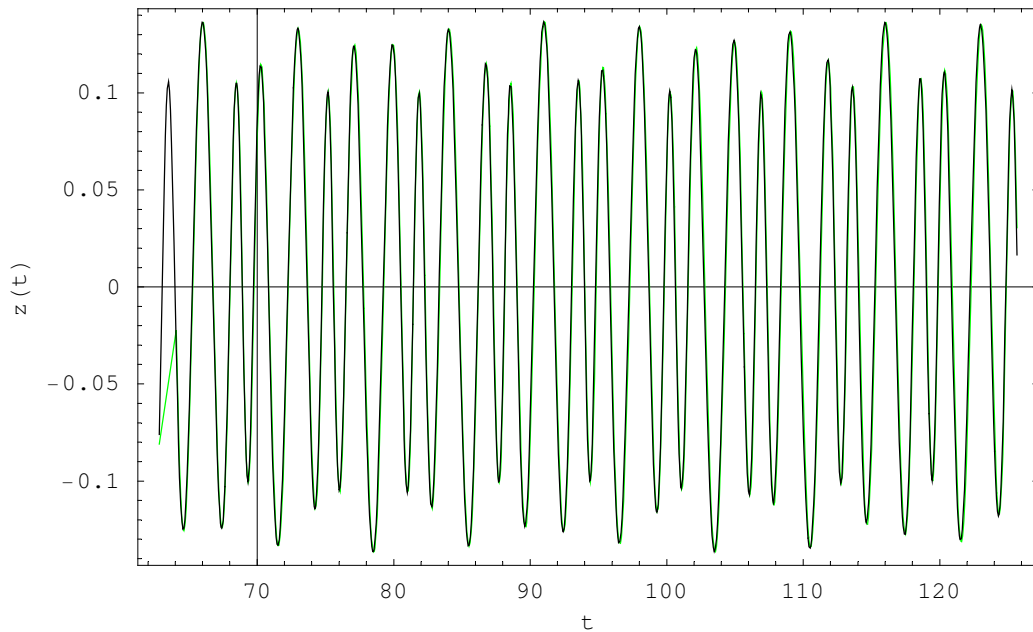
$$\begin{aligned}
\sigma'(0) = & \left(1 - \frac{9K_2}{8\sqrt{2}} + \frac{75}{64} C_1^2 K_2 + \frac{75}{64} C_2^2 K_2 - \frac{135K_2^2}{512} - \frac{1225K_2^3}{512\sqrt{2}} \right) + \\
& \left(-\frac{11979K_2}{30752\sqrt{2}} + \frac{109125K_2^2}{123008} \right) e^2 - \frac{62236485K_2e^4}{236421376\sqrt{2}} + O[e]^5
\end{aligned} \tag{147.2}$$

Die Anfangsbedingungen $z(0)$ und $z'(0)$ führen daher nach obigen Überlegungen zu folgenden Ausdrücken für C_1 und C_2

$$C_1 = \frac{z(0)}{w(0)} \tag{148}$$

$$C_2 = \frac{z'(0) \sigma'(0) \tau'(0) \psi'(0)}{2\sqrt{2} w(0)} \tag{149}$$

Die Lösung stimmt, wie in der folgenden Grafik zu sehen ist, gut mit der numerischen überein. Die grüne Line entspricht hierbei der numerisch gewonnenen, die analytische der schwarzen.



Grafik 8: Vergleich zwischen der numerisch (grün) und analytisch (schwarz) gefundenen Lösung des Sitnikov Problems für $e = 0.3$, $z(0) = 0.1$, $z'(0) = 0$ zwischen der 10. und 20. Umlaufperiode der Primärkörper. Die quasiperiodische Lösung wird durch die gefundene Störungslösung ($O(\lambda^7)$) in sehr guter Übereinstimmung wieder gegeben.

Für die numerische Integration wurde die Bewegungsgleichung in ihrer Form (6) verwendet. Der Abstand der Primärkörper $r(t)$ wurde hierbei bis zur 13. Ordnung entwickelt und in die Ausgangsgleichung eingesetzt. Die Gleichung wurde mit Hilfe eines klassischen Runge Kutta Verfahrens, sowie zum Vergleich mit der Lie - Integrationsmethode gelöst. Eine genaue Analyse der störungstheoretischen Lösung für verschiedene Wahl der Parameter e , z_0 und v_0 kann im Kapitel 'Physikalische Darstellung der Lösung' gefunden werden.

3.5. Genauigkeit und zulässiger Bereich im Parameterraum : $(e \times z_0)$

Für alle Ansätze der vorigen Kapitel wurden zwei Bedingungen vorausgesetzt: 1) Der Abstand der Primärkörper ist viel größer als der Abstand des dritten Körpers vom Baryzentrum. Formal ausgedrückt schränkt dies die Konvergenz der Entwicklungen, somit auch den zulässigen Bereich der gefundenen Lösung auf den Bereich $|z(t)/r(t)| < 1$ ein. Zusätzlich zu der ersten Annahme haben wir auch nach dem Parameter e entwickelt: 2) Die Reihendarstellungen sind auch in diesem Fall nur unter der Bedingung konvergent, wenn wir uns auf den Parameterbereich $|e| < 1$ beschränken. Wenn wir vom Begriff der Ordnung sprechen, so meinen wir in Fällen, wo die Amplitude z nicht vorkommt, die Ordnung $O(e^n)$ ansonsten jedoch immer die Ordnung $O(e^j z^k) = O(e^j z^k) = O(\lambda^m)$, wobei $m = j+k$ sein soll. In diesem Abschnitt soll der theoretische Bereich, in dem die Lösung konvergiert, derart eingeschränkt werden, dass sie auch mit der numerisch gefundenen übereinstimmt. Dieser Bereich wird im wesentlichen ordnungsabhängig, daher vom Abbruchfehler bestimmt sein.

Wir wollen in den folgenden Abschnitten herausfinden, wie genau die Lösungen mit endlicher Ordnung approximiert werden können. Da durch die gesamte Arbeit an dem Prinzip festgehalten wurde, keine Vereinfachungen an den mathematischen Termen vorzunehmen, außer jenen die aufgrund der Störungstheorie zu Stande kommen, können wir die Ordnung der Lösungen als Maß für die "Brauchbarkeit" der verwendeten Methoden verstehen. Dies macht es uns vielleicht möglich, festzustellen, welche Ordnung sinnvoll ist, um eine vorgegebene Genauigkeit zu erreichen, wie viele Terme sie erzeugt und wieviel sie zu der Gesamtgenauigkeit beiträgt.

Für den Vergleich brauchen wir eine sehr genaue Methode, um die numerische Lösung zu gewinnen. Ausgangsgleichung hierfür ist die Bewegungsgleichung des Sitnikov Problems:

$$z'' = - \frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{3/2}} \quad (150)$$

Für den Abstand der Primärkörper setzen wir dessen Entwicklung bis zur 5. Ordnung in e ein:

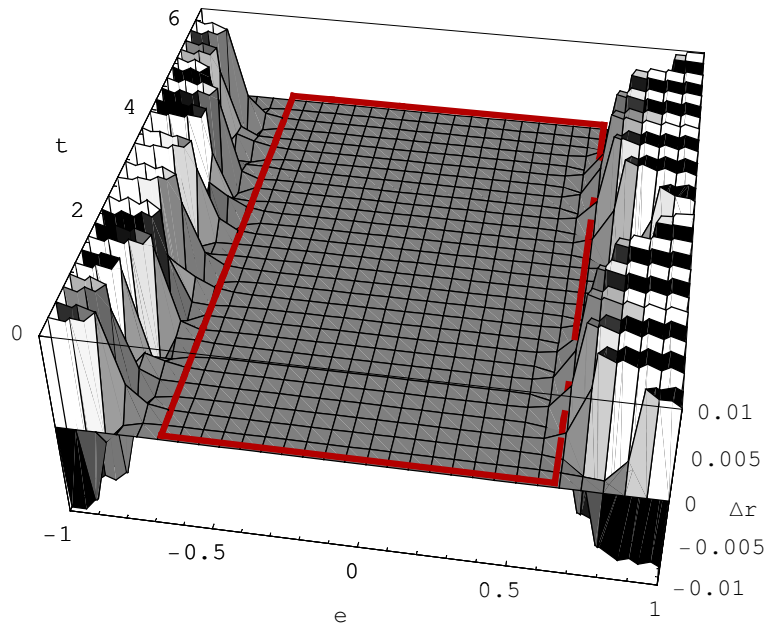
$$\begin{aligned} r(t) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(t) e + \frac{1}{4} (1 - \cos(2t)) e^2 + \\ & \frac{3}{16} (\cos(t) - \cos(3t)) e^3 + \frac{1}{6} (\cos(2t) - \cos(4t)) e^4 - \\ & \frac{5}{768} (2 \cos(t) - 27 \cos(3t) + 25 \cos(5t)) e^5 + O(e^6) \end{aligned} \quad (151)$$

und vergleichen mit der iterierten Form:

$$r(t) = \frac{1}{2} (1 - e \cos(t + e \sin(t + e \sin(t + e \sin(t + e \sin(t + e \sin(t))))))) \quad (152)$$

Obwohl die Entwicklung nach der Exzentrizität für $|e| < 1 \forall t$ konvergiert, zeigt sich eine Abweichung von der iterierten Form für $|e| > 0.6227...$. Die Ursache hierfür ist in der

unterschiedlichen Konvergenzgeschwindigkeit im Intervall $]-1,1[$ zu suchen und schränkt daher die Anwendbarkeit der Entwicklung auf das Intervall $\pm e_c = 0.6227\dots$ ein.



Grafik 9: Differenz zwischen der iterierten und nach dem Parameter e entwickelten Darstellung des Abstandes der Primärkörper für $-1 \leq e \leq 1$ und $t \in (0, 2\pi)$. Das rote Rechteck markiert den Bereich, in dem die Abweichung weniger als 0.01% beträgt. Auch wenn die Entwicklung im ganzen Definitionsbereich konvergiert, so kommt es zu einer Abweichung bezüglich der Exzentrizität für $|e| > 0.6227\dots$. Wird die Ordnung der Entwicklung in e erhöht, bleibt der Effekt der langsameren Konvergenzgeschwindigkeit an den Intervallgrenzen bestehen.

Die gefundene Störungslösung wird außerhalb dieses Bereichs keine zuverlässigen Ergebnisse mehr liefern können. Der Versuch zu höheren Ordnungen zu gehen wurde ebenfalls unternommen. Es zeigen sich "Löcher" an den Rändern, was auf dieselben Konvergenzschwierigkeiten hindeutet. Das Problem bleibt daher bestehen und kann nicht durch einen höhere Ordnung des Entwicklungsparameters beseitigt werden. Das rote Rechteck in Grafik 9 begrenzt den Bereich, in dem die Differenz kleiner 0.01% ist und liegt bezüglich e bei $e_c = \pm 0.6227\dots$ und stimmt somit mit den Bereichen überein, wie sie in der Literatur gegeben sind (Plummer, 1960).

$$|e_c| = 0.6227 \dots \quad (153)$$

Zusätzlich zu der Entwicklung nach der Exzentrizität e haben wir die Bewegungsgleichung im 1. Kapitel auch nach der Amplitude z entwickelt. Dies war durch die Tatsache gerechtfertigt, dass wir a) nur gebundene Lösungen und b) kleine Amplituden, daher Lösungen mit $|z(t)| \ll 1 \forall t$ konstruieren wollen. Sehen wir uns diese Entwicklung genauer an:

$$z'' + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \frac{z^{2k+1}}{r(t)^{2k+3}} = 0 \quad (154)$$

Es kann gezeigt werden, dass diese Summe gegen den algebraischen Term der Bewegungsgleichung konvergiert. Hierfür muss nur zusätzlich die Annahme gemacht werden, dass $r(t) > 0 \forall t$ bleibt. Dies ist jedoch aufgrund der geometrischen Konstruktion gegeben. Die Bewegungsgleichung (150) ist für den Fall $r = z$ nicht definiert, der Grenzwert kann jedoch gebildet werden und liegt bei:

$$\lim_{z \rightarrow r} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2} r^2} \quad (155)$$

und entspricht dem von Gleichung (154), wie aus folgender kurzen Rechnung gesehen werden kann:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow r} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \frac{z^{2k+1}}{r^{2k+3}} &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow r} \frac{\binom{-\frac{3}{2}}{k} z^{2k+1}}{r^{2k+3}} &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{-\frac{3}{2}}{k}}{r^2} &= \\ \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{k} &= \frac{1}{2\sqrt{2} r^2} \end{aligned}$$

■

Des weiteren ist durch die Wahl des Koordinatensystems und der Einführung dimensionsloser Koordinaten der Maximalabstand der Primärkörper vom Massenschwerpunkt des Systems gegeben durch:

$$r_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{e}{2} \quad (156)$$

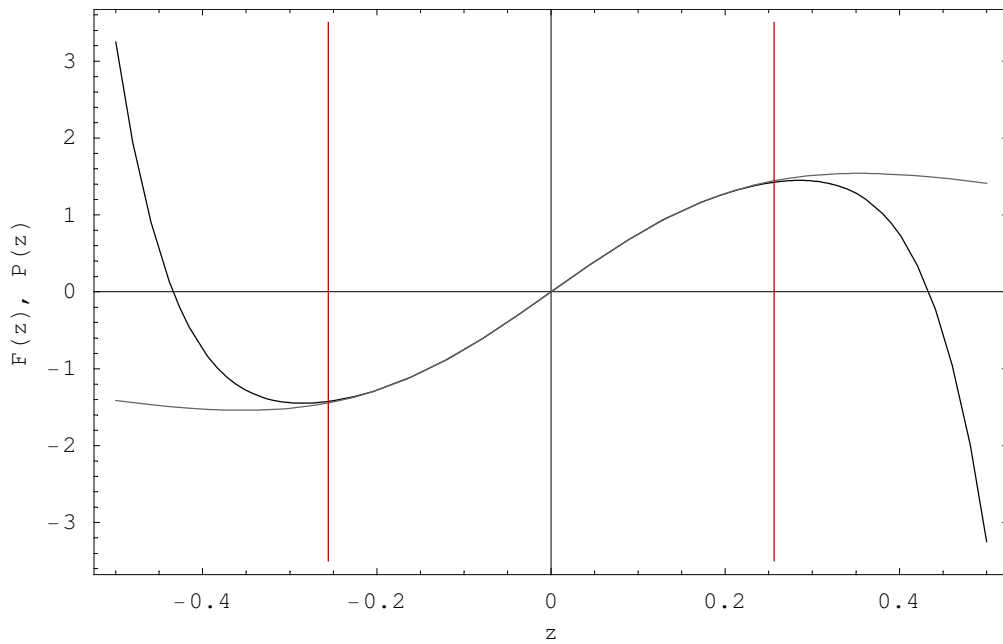
Es ergibt sich daher aus den obigen Überlegungen ein Wert für z_{\max} , bis zu der die Reihendarstellung (154) konvergiert:

$$z_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{(e-1)^2} \quad (157)$$

Um die Bedingung $|z(t)/r(t)| < 1$ für alle t zu erfüllen, folgt jedoch sogleich aus (156) für die maximal erlaubte Auslenkung für z in Abhängigkeit der Exzentrizität e :

$$|z| < \frac{1}{2} - \frac{e}{2} \quad (158)$$

Die theoretischen Überlegungen setzen voraus, dass wir unendlich viele Terme in den Entwicklungen berücksichtigen. Da wir jedoch für unsere Entwicklungen bei endlicher Ordnung abbrechen, wird es nicht möglich sein, den gesamten Parameterbereich in z und e abzudecken. Vernachlässigen wir Ausdrücke in der Summe (157) in denen Potenzen größer als 7 vorkommen und vergleichen wir diese mit dem Bruchterm der Ausgangsgleichung in Grafik 10.



Grafik 10: Vergleich des Bruchterms (schwarze Kurve) der Bewegungsgleichung des Sitnikov Problems mit dessen Entwicklung nach der Amplitude z (graue Kurve) für $O(z^7)$. Die rote Markierung kennzeichnet den kritischen Wert für die Auslenkung der Probemasse $\pm z_c$ und liegt bei $\pm 0.254...$

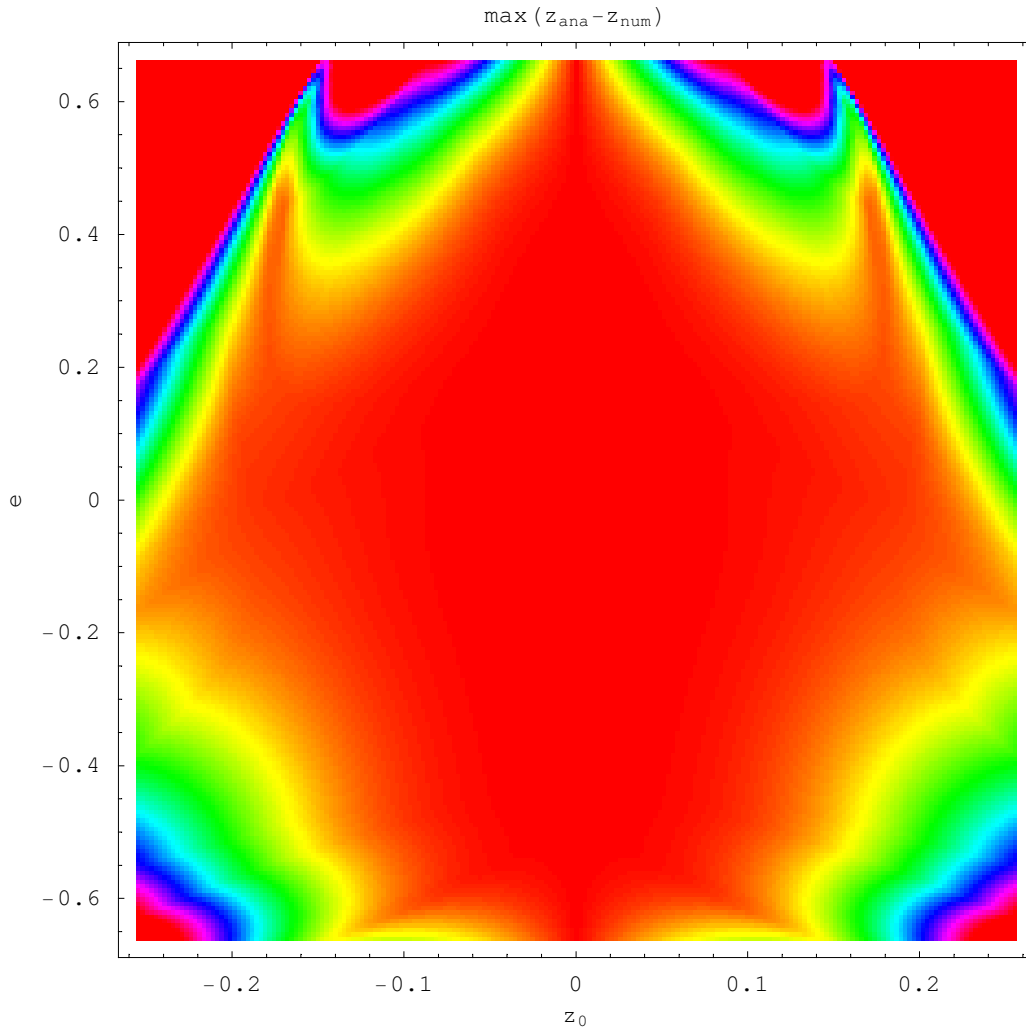
Wie man sehen kann, stimmt die Entwicklung bis zur 7. Ordnung nur für den numerisch bestimmten Wert $z_c = \pm 0.254...$ mit dem Ausgangsterm überein. Für die Grafik wurde $e = 0$ gesetzt (der Abstand der Primärkörper liegt daher bei $1/4$). Nun entwickeln wir die polynomische Form nicht nur nach der Amplitude z , sondern ebenfalls nach der Exzentrizität e . Für kleine e ist z_c sicher eine gute Grenze, ebenso für kleine z der gefundene Wert e_c . Ist jedoch sowohl die Exzentrizität als auch die Amplitude groß, so wird dieser Bereich durchaus noch weiter einzugrenzen sein. Welche Einschränkung dies für die Approximation der Ordnung $O(\lambda^m)$, mit $\lambda = e \cdot z$ bedeutet, wird sich im nächsten Schritt zeigen. Nichts desto trotz können wir vorerst für $z_0 \in [-z_c, z_c]$ und $e \in [-e_c, e_c]$ für einen hinreichend kleinen Zeitraum $t < t_{\text{crit}}$ eine gute Näherungslösung erwarten.

$$|z_c| = 0.2561 \dots \quad (159)$$

Vergleichen wir nun die Störungslösung (135) von 7. Ordnung in λ mit der numerischen Lösung von Gleichung (150). Die Abweichung von den numerischen Lösungen wird sich als gutes Maß für die Approximierbarkeit in der Parameterebene (e, z_0) erweisen. Für die folgende Grafik wurde die maximale Differenz definiert durch

$$\Delta = \max(|z_{\text{ana}} - z_{\text{num}}|) \quad (160)$$

in einem Zeitintervall $t \in [0, 10\pi]$ berechnet und in Abhängigkeit von e und z_0 aufgetragen. Die Exzentrizität wurde innerhalb der Grenzen $\pm e_c$, die Anfangsamplitude z_0 innerhalb von $\pm z_c$ in einem (100×100) Gitter gewählt:



Grafik 11: Quantitative Analyse der Störungslösung im Vergleich mit numerisch gewonnenen Orbits. Das Bild zeigt die maximale Differenz zwischen analytisch und numerisch gefundener Lösung während einer Umlaufperiode der Primärkörper, in Abhängigkeit der Systemparameter $z(0)$ und e . Die Anfangsbedingungen wurden in einem (100×100) Grid für e und $z(0)$ innerhalb der Parameterebene $e_c \times z_c$ gewählt. Der innere rote Bereich kennzeichnet eine Abweichung der numerischen Lösung von der Störungslösung $\Delta \sim 10^{-7}$, gelb, grün und blaue Bereiche liegen bei den Größenordnungen $\Delta \sim 10^{-3} \dots 10^{-2}$; der violette und äußere rote Bereich kennzeichnet eine Differenz, größer als 50% des eigentlichen Signals und ist für physikalische Untersuchungen nicht mehr geeignet.

Deutlich ist die Symmetrie in Grafik 11 bezüglich der Anfangsamplitude z_0 zu sehen. Dies war auch zu erwarten, da die Bewegungsgleichung des Sitnikovproblems invariant unter Symmetrietransformationen sein muss. Dass es sich bei $-z_0$ nur um die Spiegelung an der Ebene der Primärkörper handelt zeigt sich direkt in unseren Ergebnissen wieder. Dies ist für die Exzentrizität jedoch nicht der Fall. Es macht einen Unterschied, ob wir die Primärkörper im Perihel oder im Aphel starten lassen. In Grafik 11 zeigt sich, dass für negative Exzentrizitäten ein größerer Parameterbereich in z_0 darstellbar ist, als für positive Werte von e . Der Abbruchfehler in der Entwicklung nach e scheint in diesem Fall dem Abbruchfehler in der Entwicklung nach z entgegen zu wirken. Interessant sind auch die Strukturen an den Rändern über die zu diesem Zeitpunkt jedoch noch keine detaillierten Analysen zur Verfügung stehen.

In diesem Kapitel haben wir den theoretischen Konvergenzbereich unserer Entwicklungen in z und e bestimmt und mit Hilfe von praktischen Tests überprüft. Die Lösung 7. Ordnung in λ liefert gute Ergebnisse im Parameterraum $e_c \times z_c$, wobei e_c zu $\pm 0.6227..$ und z_c zu $0.254...$ bestimmt wurde.