Semantische Strategien

Philosophische Logik vor dem Hintergrund
von Endlichkeit und Starrheit

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophie
an der Fakultät für Philosophie und Bildungswissenschaften
der Universität Wien

eingereicht von

Christian Damböck

Wien, April 2005

Vorwort

Die vorliegende Arbeit präsentiert ein formales Rahmenwerk für philosophische Logik und formale Philosophie, das in signifikanter Weise *einfacher* aber auch *tragfähiger* sein sollte als traditionelle, durchwegs auf im Rahmen der mathematischen Grundlagendebatte entstandene Sprachkonstruktionen rekurrierende Ansätze. Kernpunkte der Modifikation sind eine Beschränkung auf *endliche* Grundmengen und auf Sprachen, deren Individuenkonstanten *starr referieren*. Es resultiert eine Gruppe von Logiken, die trotz nahezu beliebig komplexer *Ausdrucksmerkmale* stets in bestimmter Weise auf eine *aussagenlogische* Grundkonstruktion reduziert werden können, was zur Folge hat, dass diese Sprachen äußerst stabile modelltheoretische Eigenschaften besitzen und dass ihre metalogische Handhabung ausgesprochen einfach ist. In der Arbeit werden sowohl eine Reihe von Beispiel-Sprachen für diesen *finitistischen* Ansatz präsentiert, als auch eine Diskussion einiger ausgewählter ontologischer Gesichtspunkte vor dem Hintergrund eines derartigen Rahmenwerks.

Die Arbeit wurde zunächst von Doz. Gerhard Budin und Prof. Christian Krattenthaler, später von Prof. Erhard Oeser und Prof. Friedrich Stadler betreut, als Gutachter fungieren Prof. Oeser und Prof. Sy David Friedman. Ihnen allen sei an dieser Stelle gedankt. Ein Entwurf zum ersten Kapitel der Arbeit wurde 2004 bei der Logica Tagung in Hejnice (Tschechien) präsentiert, wo ich wertvolle Anregungen für die Fertigstellung erhielt.

Bei Prof. Oeser bedanke ich mich, dass er mir Gelegenheit gegeben hat, an Projekten des Instituts für Wissenschaftstheorie mitzuarbeiten (Arbeiten im Eugen Wüster Archiv, Mitarbeit an der Organisation des Popper-Kongresses 2002). Prof. Georg Gottlob ermöglichte mir bei einem Kurzaufenthalt in Ostrawa (Tschechien) bei Prof. Marie Duží und einem Vortrag am Institut für Informationssysteme der TU Wien meine Arbeit zu präsentieren und zu diskutieren. Ich danke ihm ausdrücklich für diese Förderung, der ich entscheidende Anregungen für die Endfassung meiner Arbeit verdanke. Prof. Stadler hat meine Arbeit auf unterschiedlichste Weise gefördert, unter anderem indem er mir die Möglichkeit gab, seit 2002 in dem Moritz-Schlick-Editionsprojekt mitzuarbeiten; die von Prof. Stadler geschaffenen Rahmenbedingungen, insbesondere die Sozialisation in dem überaus anregenden geistigen Klima des Instituts Wiener Kreis waren singuläre Voraussetzungen für meine Arbeit, und ich übertreibe kaum, wenn ich sage, dass Prof. Stadler nicht nur die Entstehung dieser Arbeit, sondern geradezu die Entfaltung meiner wissenschaftlichen Persönlichkeit überhaupt *ermöglicht* hat. Dafür mein uneingeschränkter Dank.

Die Arbeit (bzw. Teile davon) wurde in zahlreichen Versionen und unterschiedlich intensiv von verschiedenen Personen kommentiert, ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Neben den oben genannten seien erwähnt: Christian Fermüller, Volker Halbach, Herbert Hrachovec, Eckehart Koehler, Elisabeth Leinfellner, Karl Milford, Gerhard Schurz, vor allem aber meine Freunde Richard Dawid, Edwin Glassner, Heidi König, Manfred Kohlbach, Matthias Neuber und Richard Nickl, die durch ihre intensiven Kommentare insbesondere im Rahmen des von uns gemeinsam veranstalteten „Wissenschaftsphilosophischen Kolloquiums“ eine unerschöpfliche Quelle der Inspiration und Motivation waren. Ausdrücklich möchte ich hervorheben, dass Matthias Neuber durch seine höchst detaillierten Kommentare zu einer früheren Fassung die Entwicklung dieser Arbeit maßgeblich beeinflusst hat.

Schließlich bedanke ich mich bei meinen Eltern, für ihre unerschütterliche Toleranz und die nie aussetzende finanzielle Unterstützung, und bei Christine, ohne die vieles nicht möglich gewesen wäre.

Wien und Stössing, im Frühjahr 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Was ist Logik?

Logik als Fundament der Mathematik Den entscheidenden Schritt zur Entwicklung der modernen Logik lieferte nicht die Mathematisierung der Logik (Boole), sondern die Logisierung der Mathematik (Frege, Russell), also der Versuch mit den Methoden der Logik die Mathematik auf ein sichereres Fundament zu stellen. Logiken wie die Prädikatenlogik erster und höherer Stufe oder der λ-Kalkül sind hundertprozentige Produkte der mathematischen Grundlagendiskussion, während genuin philosophische Ansätze, die im Kontext der mehrwertigen Logik (Łukasiewicz) oder der Modallogik (C. I. Lewis) bereits in dieser frühen formativen Phase diskutiert wurden, für die Entwicklung der genannten logischen Kernstrukturen kaum eine Rolle spielten. Dennoch überrascht es retrospektiv, dass solche als mathematisches Handwerkzeug entwickelte Techniken bis heute das Aussehen von Logik weitgehend determinieren. – Obwohl niemand die *Existenz* außermathematischer Perspektiven von Logik bestreiten wird, kann man dennoch insofern von einer ungebrochenen Dominanz des grundlagenmathematischen Paradigmas sprechen als dieses bis heute die Art und Weise bestimmt, wie Logik *formuliert* wird: auch wenn neunundneunzig Prozent aller heute mit formallogischen Methoden behandelten Problemstellungen mit reiner Mathematik nichts zu tun haben, sind doch die formallogischen *Dialekte* mit denen diese Problemstellungen angegangen werden, die proprietären Produkte der mathematischen Grundlagendebatte.

Dabei ist, um ein repräsentatives Beispiel zu nennen, das formale Kauderwelsch das man im Englischen *first order logic* nennt, alles andere als eine *einfache* mathematische Sprachkonstruktion, alles andere als eine *bequeme Gebrauchslogik*. Der Grund ist die absolut restriktionslose, *offene* Ontologie, die dieser Sprache zugrundeliegt: anders als in „natürlichen" Sprachen, wo Namen stets eine bestimmte restringierte Menge von Objekten bezeichnen, kann ein „Name" in der Prädikatenlogik *einfach alles* bezeichnen, was zu einer opulenten Fülle von „formalen Spielräumen" führt, die man im Umfeld natürlicher Sprachen und formaler Ontologien kaum als wünschenswert betrachten kann.

Die Grundidee dieser Arbeit Der Grundgedanke der vorliegenden Arbeit[1] liegt nun eben darin, dass es eine gute Idee sein könnte, sich Sprachen genauer anzusehen, die nicht vor dem Hintergrund einer derart offenen Ontologie formuliert sind, sondern die bestimmten Restriktionen unterliegen. Dabei sind prinzipiell zwei Optionen denkbar: zum einen könnte man – Stichwort *endliche Modelltheorie* – die Domänenmengen einer Sprache hinsicht ihrer Kardinalität beschränken und festsetzen, dass diese Mengen höchstens abzählbar oder stets endlich zu sein haben; zum anderen aber könnte man – und das ist die Variante, für die wir uns entscheiden werden – fordern, dass die Domänenmenge stets aus einer von Vornherein für die Sprache *fixierten* Grunddomäne D stammt. – Wir wollen solche Sprachen, in Anlehnung an Saul Kripkes Konzept der *rigid designation*[2], als *starre Sprachen* bezeichnen.

[1]Präzisiert werden diese Ausführungen unten, im Abschnitt 1.1.

[2]Die in Kripke (1980) dargestellten Überlegungen über direkte (kausale) Referenz und Starrheit als metaphysisches Konzept einer Referenz „in allen möglichen Welten" liegen allerdings jenseits des Rahmens der vorliegenden Untersuchungen. Starrheit wird hier als ein vergleichsweise technisches Konzept aufgefasst, eher im Rahmen der ursprünglichen Konzeption in Kripke (1963), wo sie als Argument für eine bestimmte Form von quantifizierter Modallogik präsentiert wurde. Der signifikante *technische* Unterschied zwischen der Kripkeschen und der hier vertretenen Auffassung liegt darin, dass Kripke versuchte, Starrheit eher konservativ im Rahmen der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe umzusetzen, während sie hier als ein Argument für respektive als ein zentrales Merkmal von einer gänzlich neuen Form von (philosophischer) Logik betrachtet wird.

Die letztere Restriktion ist insofern stärker als die einer endlichen Modelltheorie, als dort ein entsprechendes Universum D jedenfalls „zu groß“ wäre für eine mengentheoretische Auffasung. Die Klasse aller (endlichen) Strukturen fällt aus dem mengentheoretischen Rahmen, wir können folgerichtig auch nicht „mengentheoretisch“ über alle (endlichen) Strukturen quantifizieren. Hingegen kann man im Fall einer starren Sprache problemlos die Menge aller Strukturen angeben. Im Allgemeinen wird diese Menge bei starren Sprachen genau dann *endlich* sein, wenn das Universum D der Sprache endlich ist. Liegt dieser Sonderfall vor, so nennen wir eine starre Sprache *finitistisch*.

Wie wir in den Abschnitten 1.2.1 und 1.2.2 zeigen werden, ist es überaus einfach, eine Aussagenlogik und eine Prädikatenlogik erster Stufe als finitistische Sprache zu redefinieren. Der anschauliche Vorteil solcher Sprachen liegt (namentlich im Fall der Prädikatenlogik) vor allem darin, dass sie (im Unterschied zu offenen „Dialekten“) *entscheidbar* sind (hinsichtlich Erfülltheit und hinsichtlich Gültigkeit). – Viele ihrer Stärken spielen finitistische Sprachen aber erst dann aus, wenn man sie als *modale* Sprachen konzipiert. (Vgl. die Abschnitte 1.2.3 und 1.2.4.)

Das „Kontinuumsproblem“ Man kann raumzeitliche Modelle insofern problemlos „finitistisch“ gestalten, als man von einer endlichen Menge von Massekörpern (Elementarteilchen, Moleküle, etc.) ausgehen kann, aus denen sich das Universum zusammensetzt. (Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir eine Reihe von Fragestellungen diskutieren, die vor diesem Hintergrund entstehen.) So unproblematisch diese Grundannahme zunächst ist, wirft sich doch die Frage auf, wie man mit derartigen „diskreten Dingen“ umzugehen hat, sobald *metrische* Fragestellungen auftauchen: auch die endlich vielen Elementarteilchen eines Universums müssen in irgendeiner Form als „Weltlinien“ beschrieben werden, und man wird für diese Beschreibung auf die Methoden der Infinitesimalrechnung zurückgreifen müssen. – Wie kann man mathematische Methoden, die in wesentlichen Punkten mit unendlich großen oder unendlich kleinen Quantitäten operieren, in einem auf endliche Mengen reduzierten Sprachkonstrukt *verwenden*?

Diese vermeintliche Grundsatzfrage beruht, wie wir kurz andeuten, auf einem ziemlich banalen Missverständnis. Grob gesprochen: auch im finitistischen Fall spricht nichts dagegen, dass wir uns *der Methoden* der Infinitesimalrechnung bedienen. Computer – die selbstredend finitistisch funktionieren – können mit diesen Methoden problemlos rechnen, einfach weil zum einen diese Methoden zum Großteil „algebraisch" sind (Ableitungen von Formeln, Grenzwerte, etc. – es ist letztendlich die Pointe der infinitesimalen Mathematik, dass das Infinitesimale schlussendlich stets wegfällt!), zum anderen weil wir überall dort wo wir keine „algebraische" Lösung besitzen ohnedies nur eine endliche Näherung anbieten können, egal wo und wie wir ein Modell ansetzen. Und in dem selben Sinn können wir in finitistischen Sprachen jederzeit auf „Ausschnitte" des Kontinuums zurückgreifen, ohne dabei verstärkte Skrupel entwickeln zu müssen. – Die Ursache des Missverständnisses scheint darin zu liegen, dass man nicht hinreichend klar trennt, zwischen der *Definition* und der simplen *Anwendung* einer mathematischen Sprache. Es ist klar, dass nur (bzw. *höchstens*) in ersterem Fall unendliche Kardinalitäten zwingend eine Rolle spielen. Unsere methodologische Ausgangsposition ist die, dass die mathematischen Sprachkonstruktionen (Infinitesimalmathematik) als gegeben vorausgesetzt werden. Das heißt: benützen wir, in einer philosophischen Logik, in einer formalen Ontologie, Methoden der Arithmetik oder der Infinitesimalmathematik, so müssen wir diese Methoden nicht *innerhalb* dieser Sprachkonstruktion *definieren* – wir *verwenden* sie einfach! – Wir können so völlig ungehindert die mathematische „Blackbox" als Selbstbedienungsladen gebrauchen, in der selben Weise, wie dies alle anderen anwendungsorientierten (weil nicht im engeren Sinn mathematischen) Wissenschaften tun.

Das heißt: überall dort in der Wissenschaft, wo die Theoriebildung nicht substanziell angewiesen ist, auf die Annahme *unendlicher* Mengen von Argumenten (und das wird, mit Ausnahme einiger Bereiche der theoretischen Physik, in allen Bereichen jenseits der reinen Mathematik der Fall sein) sollte der finitistische Standpunkt prinzipiell unproblematisch sein. Dort aber, wo umgekehrt die

Annahme endlicher Kontexte *Voraussetzung* ist – also etwa bei der Entwicklung von Computermodellen – sollte der finitistische Standpunkt prinzipiell immer die bessere Wahl darstellen.

Diese Ausführungen zeigen insbesondere, dass ein zeitgemäßes Logik-Verständnis auf keinen Fall auf die mathematische Grundlagendebatte heruntergebrochen werden kann. Die Grundlagendebatte, unbestrittenermaßen *Verursacher* der modernen Logik, erweist sich vor dem Hintergrund rezenter Fragestellungen (formale Philosophie) eher als Hemmschuh, als Altlast.

Logik als Struktur natürlicher Sprachen Nicht in Konkurrenz zum grundlagenmathematischen, sondern parallel, auf einer anderen diskursiven Ebene, wurde das sprachwissenschaftliche Paradigma der Logik implementiert. Im Wesentlichen geht dieser Ansatz zurück bis auf die Begründer des mathematischen Ansatzes, also bis auf Frege und Russell. Klassische Texte wie Frege (1892) und Russell (1905) widmen sich erstmals der Frage, wie eine formalisierte Sprache auf Namen natürlicher Sprachen angewendet werden kann. Die Idee war offensichtlich, dass Logik nicht *nur* als Rahmenwerk für die Sprache der Mathematik geeignet sein sollte, sondern als formales Rahmenwerk für beliebige (natürliche) Sprachen. Dabei wurde anfangs in augenfälliger Weise keinerlei *Unterscheidung* vorgenommen, zwischen den Zeichen der formalen und denen der natürlichen Sprache. Dass ein solcher Unterschied einzukalkulieren ist, wurde erst im logischen Empirismus klar: Philosophen wie Carnap (1934) und Tarski (1935) schlugen deshalb ein Programm vor, das eine *Sprachreform* mit den Mitteln der formalen Logik vorsah. Natürliche Sprachen (Tarski), bzw. Wissenschaftssprachen (Carnap) wurden als unvollkommene Abbilder formaler Sprachen interpretiert. Demgegenüber formuliert Davidson (1967) eine völlig neue Programmatik der Sprachanalyse, in deutlicher Abgrenzung von Tarskis sprachreformerischen Ansprüchen. Nach Davidson ist das Ziel der Sprachanalyse (mit den Methoden der formalen Logik) nicht eine *Verbesserung* der Objektsprachen zu erreichen, sondern eine *Strukturbeschreibung* dieser zu entwickeln. Davidson:

> „[N]ach meiner Auffassung hat eine Bedeutungstheorie nicht die Aufgabe, eine Sprache zu verändern, zu verbessern oder zu reformieren, sondern sie zu beschreiben und zu verstehen.“[3]

Dabei denkt Davidson nicht an eine Philosophie natürlicher Sprachen, im Stil der Wittgensteinschen Sprachspiel-Diskussionen, sondern er denkt explizit daran, dass die Aufgabe dieses Beschreibens und Verstehens nur mit den Mitteln der formalen Logik, im konkreten Fall der Prädikatenlogik erster Stufe realisiert werden kann.

Ziel dieser Strukturbeschreibung ist es – namentlich vor dem Hintergrund der Entwicklung *formaler Linguistik* – nicht, *irgendeine* gewissermaßen juridisch korrekte Theorie für natürliche Sprachen zu finden, sondern eine Theorie, die sozusagen auf jedes „ontologische Detail“ der natürlichen Objektsprache mit einem entsprechenden Detail in der formalen Sprache reagiert. Das Schlüsselwort ist hier die *Feinkörnigkeit*, die eine Ontologie für linguistische Kontexte aufweisen muss. – Es gibt, so könnte man sehr grob sagen, bestimmte Zeichen in natürlichen Sprachen, die eher einfach gestrickt sind, etwa Eigennamen, die raumzeitliche Individuen oder natürliche Arten bezeichnen. Solche Zeichen sind in der formalen Analyse klar zu trennen von komplexeren Lexemen, wie etwa Präpositionen (räumlicher oder zeitlicher Natur), Wörtern die mit Existenz zu tun haben, mit Möglichkeit oder Unmöglichkeit, mit der Unterscheidung von Phantasie und Tatsache, usw. Für all diese Dinge muss eine brauchbare formale Sprache eine passende *Schnittstelle* bereitstellen.

Als Pionier einer solchen „feinkörnigen“ linguistischen Auffassung von formaler Sprachanalyse gilt Richard Montague mit seinem Programm einer *intensionalen Logik*.[4]

[3] Davidson (1967, S. 57).

[4] Vgl. Thomason (1974). Eine wichtige Ressource ist nach wie vor die klassische Publikation Davidson & Harman (1972), gewissermaßen als konkreter Meilenstein in der Umsetzung des angesprochenen „Davidson-Programms“.

Ist Logik als Fundament der Sprachwissenschaft (eventuell plus Logik als Fundament der Mathematik) *erschöpfend* charakterisiert?, bzw.: erschöpft sich das, was intensionale Logik oder formale Philosophie im Montagueschen Stil leistet in den Anwendungsperspektiven formaler Linguistik? – Die Antwort sollte negativ ausfallen. Zum einen kann, was den *institutionalen Rahmen* betrifft, diese Einschränkung heute mit Sicherheit nicht mehr gelten. Man hat Anwendungen intensionaler Logik im Bereich der Computerwissenschaften, der AI und der Cognitive Science, die, was den betriebenen Gesamtaufwand betrifft – Stichwort: Semantic Web –, die linguistische Perspektive geradezu marginalisieren. Überdies, und damit in Verbindung, existieren Ansätze einer formalen Philosophie bzw. „Ontologie“ in diversen disziplinären und interdisziplinären Grenzgebieten, die in der Regel keineswegs auf linguistische Fragestellungen heruntergebrochen werden können. Zum anderen scheint auch rein „internalistisch“ gesehen einiges dafür zu sprechen, dass eine rein linguistische Auffassung von Logik als in signifikanter Weise *zu eng* zu identifizieren ist. Wenn wir formale Sprachen diskutieren, dann tun wir dies nicht in ausschließlicher Konzentration auf Objektbereiche, die man als „Zeichen“ einer „natürlichen Sprache“ identifizieren könnte. – Dies wäre ein anachronistisches Bild von der Tätigkeit philosophischer Logiker. – Derartige Zeichendiskussionen sind nur ein Aspekt unter vielen, mit denen sich Logik auseinandersetzt. Völlig unabhängig davon können formal-logische Modelle etwa über zeitliche und raum-zeitliche Strukturen diskutiert werden, selbst eine Diskussion „intentionaler Zustände“ kann unabhängig von einer natürlichen Objektsprache, quasi „rein ontologisch“ erfolgen. – Zusammenfassend: es ist ein wichtiges Charakteristikum des rezenten logischen Diskurses, dass die traditionelle Gleichsetzung von Logik mit „Sprachanalyse“ darin keine zentrale Rolle mehr spielt.

Logik als formale Ontologie Ein zeitgemäßes Verständnis von philosophischer Logik muss also die grundlagenmathematische Option als *anachronistisch*, die linguistische als *zu eng* identifizieren. Philosophische Logik liefert *Theorien*, deren epistemischer Status eher vage als der von „kleinen Wissenschaften“ oder „interdisziplinären Rahmenwerken" charakterisiert werden kann. Am Besten wird dieser epistemische Status wohl mit dem Terminus *formale Ontologie* umschrieben, wenn auch nicht alle Konzeptionen einer solchen dem hier intendierten eher *deflationären* Verständnis entsprechen. So definiert Nino B. Cocchiarella:

> „Formal ontology is the result of combining the intuitive, informal method of classical ontology with the formal, mathematical method of modern symbolic logic, and ultimately of identifying them as different aspects of one and the same science. [...] As such, formal ontology is a science prior to all others in which particular forms, modes, or kinds of being are studied."[5]

Was ist die „Methode der klassischen Philosophie"? – Wenn man darunter nur solche Dinge verstehen würde, wie einen Hang zum ad hoc Theoretisieren, zur apriorisch-konstruktiven Schaffung (kategorialer) Lösungsansätze, im Unterschied zu einer auf vorhandene wissenschaftliche Ressourcen gestützten („normalwissenschaftlichen") Detailarbeit, wie sie das einzelwissenschaftliche Arbeiten charakterisiert, dann wäre eine Berufung auf klassische Methoden unproblematisch. Es wird jedoch, bei näherem Hinsehen auf die Tätigkeit „formaler Ontologen", deutlich, dass dort unter den „klassischen Methoden" oft wesentlich mehr verstanden wird als nur ein sehr allgemein charakterisierter „Denkstil". Unter klassischen „Methoden" werden dann – sozusagen als „Werkzeuge des ontologischen Ingenieurwesens" – solche Dinge wie Kategorientafeln, Begriffsschemata, also ganz konkrete theoretische Ansätze klassischer Philosophie verstanden.[6] Formale Ontologie in diesem Sinn ist gewissermaßen nichts anderes als *formale Wiederaufbereitung klassischer Zitate*, wobei jedoch kaum einkalkuliert wird, dass diese klassischen Kategorien durchwegs von wissenschaftlichen Grundhaltungen geprägt sind, die weitgehend inkompatibel sind mit dem rezenten wissenschaftlichen Weltbild.

[5] Cocchiarella (1991, S.640).

[6] Zum Stichwort *ontological engineering* vgl. einschlägige Textbücher wie Sowa (2000).

Philosophie war, bis in die frühe Neuzeit, eine Disziplin, die *alle* Wissenschaften miteinschloss; somit wurde im Rahmen von ontologischen Fragestellungen Physik, Biologie, Medizin und Psychologie, etc. gleich mitdiskutiert. Und tatsächlich: im Wesentlichen ist das auch das Ziel einer heutigen Ontologie – eben *interdisziplinäre Rahmenwerke* zu schaffen –, aber dies kann, so die These, nicht einfach so funktionieren, dass wir uns im historischen Fundus bedienen und mehr oder weniger anachronistische Philosopheme mit formaler Logik aufpolieren. Wenn überhaupt, dann kann der historische Fundus als *Stichwortgeber* hier eine Rolle spielen, als *Analogienlieferant* und als *heuristische* Inspiration. Wegen der grundlegenden Inkompatibilität der *Weltbilder* klassischer Philosophien mit dem rezenten wissenschaftlichen Weltbild wird ein direkter *Import* historischer Kategorien jedoch kaum funktionieren, weshalb man die Methode einer „Formalisierung historischer Zitate" prinzipiell mit Vorsicht genießen sollte. (Am ehesten könnte diese Methode wohl als Methode der *historischen Rekonstruktion* nützlich sein, ein Problemkreis der jedoch dezidiert außerhalb des Rahmens der hier angestellten Untersuchungen liegt.)

Der zweite Punkt, wo die hier vertretene Position von formal-ontologischen Programmatiken abweicht, ist deren Tendenz zu einer *perennistischen* Auffassung von Philosophie. Konträr dazu wollen wir davon ausgehen, dass Ontologien auf Gedeih und Verderb darauf angewiesen sind, *Kompatibilität* mit den Einzelwissenschaften anzustreben. Das heißt: wenn wir *formale Ontologien* oder *interpretierte Logiken* basteln, dann wird es unsere erste und wichtigste „ontologische Verpflichtung" sein, diese so zu konstruieren, dass wir einzelwissenschaftliche Systeme in diese formalen Rahmenwerke *integrieren* können. Dadurch ist aber die deduktive Hackordnung klar definiert: *Formale Ontologien kommen nie vor den Wissenschaften, sondern stets hinter ihnen*, in einer Weise wie dies seit Kant das Bild von Philosophie in tiefster (und wohl auch irreversibler) Weise geprägt hat. Philosophie gibt nicht den Physikern vor, wie sie Physik zu betreiben haben, sondern umgekehrt: die Physik sagt den Philosophen, was sie für eine Philosophie zu liefern haben, usw.

Insgesamt kann das hier zugrundegelegte Ontologie-Verständnis so charakterisiert werden: *Logik* liefert den *formalen*, die Einzelwissenschaften liefern den *empirischen* Gehalt für formale Ontologie. Die wissenschaftliche *Relevanz* formaler Ontologie liegt somit keineswegs darin, ein *Fundament* für die Wissenschaften zu liefern, sondern bestenfalls darin, zwischen den Wissenschaften *zu koordinieren*, indem vereinheitlichende *Rahmenwerke* geschaffen werden. Formale Ontologien sind weder *Gegenwissenschaften* noch *Überwissenschaften*, sondern gewissermaßen *epistemisch neutrale* formale Rahmenwerke *für existierende Ressourcen*, und sie sind somit am ehesten vergleichbar mit der programmatischen Auffassung die der von Rudolf Carnap und Otto Neurath konzipierten *Enzyklopädie der Einheitswissenschaft* zugrundelag.[7]

Ein formallogisches Schweizermesser Im Wesentlichen sind zwei Strategien zu konstatieren, bei der Diskussion unterschiedlicher logischer Systeme. Zum einen die klassische, von „echten" Logikern bevorzugte Strategie einer Verästelung und Zerlegung des Gesamtbereiches in viele möglichst kompakte und einfache Einzelsysteme, zum anderen die (eher bei „ontologieorientierten" Logikern beliebte) Strategie der Vereinheitlichung: möglichst wenige, möglichst überhaupt nur ein logisches System, eine *Superlogik* die alle Aufgaben zufriedenstellend löst. In vieler Hinsicht sind diese beiden Strategien komplementär und befruchten sich gegenseitig: einfachere „kleine" Logiken ermöglichen einfachere „Superlogiken", wie umgekehrt Superlogiken demonstrieren, wie man auf bestimmte kleine Logiken verzichten kann.

Generell sollte jedoch der Fokus einer *philosophischen* Logik-Diskussion jenseits einer rein formalen „grundlagenorientierten" Spekulation, viel stärker auf den Anspruch hinauslaufen, eine große „Superlogik" zu entwickeln, als die Industrie logischer Miniaturen um weitere Kleinode zu bereichern. Die oben skizzierten Perspektiven von Logik im Umfeld von Linguistik und formaler Ontologie erzwingen geradezu diese Hinwendung zu umfassenden integrativen Syste-

[7]Vgl. Neurath et al. (1939–1970).

men. Eine Logik, nicht als metaphysisches Spekulationsvehikel, sondern als anwendungsorientiertes philosophisches Werkzeug, das für die unterschiedlichsten Situationen eine Funktion parat hat – eine Superlogik als *formallogisches Schweizermesser*. – Die Pioniere eines solchen Projektes sind Philosophen wie Richard Montague, Pavel Tichý, Edward Zalta, aber auch Rudolf Carnap.[8]

Physikalismus Wie kann man so unterschiedliche Objektkategorien, wie sie in der Physik, der Biologie, Psychologie, Medizin, Soziologie, den Wirtschaftswissenschaften und Geschichtswissenschaften, usw. beschrieben werden, in einer formalen Ontologie unter einen Hut bekommen? Die klassische Carnapsche Option ist der sogenannte Physikalismus der Einheitswissenschaft:

> „Die These des *Physikalismus* besagt, daß die physikalische Sprache eine Universalsprache der Wissenschaft ist [. . .] Hieraus folgt, daß die Wissenschaft ein einheitliches System ist, innerhalb dessen es keine grundsätzlich verschiedenen Objektbereiche gibt, also keine Spaltung etwa in Natur- und Geisteswissenschaften; das ist die These der Einheitswissenschaft."[9]

Entgegen den Stehsätzen einer „anti-positivistischen" Standardpolemik soll hier behauptet werden, dass diese Aussage letztlich einem wissenschaftlichen Grundkonsens entsprechen sollte. – Was würde eine Position bedeuten, die diese These negiert? Sie würde bedeuten, dass es so etwas gibt wie vollständig disjunkte wissenschaftliche Gegenstandsbereiche, deren Beschreibungen wechselweise *inkommensurabel* sind. Die Aussagen einer Soziologin müssten vom Standpunkt der Physikerin inhaltslose Lautmalerei darstellen und umgekehrt.

[8]Vgl. etwa Montague (1972), Thomason (1974), Tichý (1988), Zalta (1988), sowie die einschlägigen Arbeiten Carnap (1998, 1968, 1960). Im Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit wird ein entsprechender „Superkalkül" präsentiert, auf der Basis des zuvor entwickelten finitistischen Standpunktes und unter Einbeziehung solcher nicht-klassischer Features, wie Mehrsortigkeit, Modalität, intentionale Zustände, Mereologie, usw.

[9]Carnap (1968, S. 248).

Dagegen behauptet der Physikalismus, dass es möglich sein muss, jeden Vorgang den die Soziologin beschreibt auf eine physikalische Weise zu rekonstruieren. Was die physikalistische Position wie sie hier verstanden wird jedoch insbesondere *nicht* behauptet ist, dass jede Beschreibung der Soziologin *durch eine physikalische Beschreibung ersetzt* werden könnte. In anderen Worten: wenn hier von Physikalismus die Rede ist, dann nicht in einem hart-reduktionistischen Sinn, die Hoffnung formulierend, dass wir irgendwann nurmehr in physikalischen Formeln über die Welt reden werden, auch nicht im Sinne eines Instrumentalismus, der nicht-physikalische Theorien lediglich als *Abkürzungen* für kompliziertere physikalische Ausdrücke sieht, sondern im Stil eines *weichen Reduktionismus*, der *kategoriale Eigenständigkeit* der reduzierten Systeme wahrt.

Wir können von mentalen Vorgängen, intentionalen Zuständen reden, als *eigenständige* Kategorien, ohne den Physikalismus aufgeben zu müssen. Dieser behauptet lediglich, dass alles was wir *als nicht-physische* Phänomene beschreiben, doch *physikalisch rekonstruiert* werden kann. *Physisch* ist jeder mentale Vorgang ein neuronaler Vorgang, und kein *göttlicher* oder ein Vorgang irgendeiner anderen *zweiten Wirklichkeit*.

Somit ist Physikalismus einerseits ein taugliches Kriterium für die *Abgrenzung* zwischen Wissenschaft und Nicht-Wissenschaft. Andererseits aber ist er – und das ist es was ihn ontologisch so interessant macht – eine klare Ansage, die eine bestimmte wissenschaftliche Disziplin – trotz kategorialer Eigenständigkeit der anderen Disziplinen – als *Basis* aller anderen Disziplinen auszeichnet.

Eine „Schichtontologie“ Von Nikolai Hartmann (1949) stammt die Konzeption einer sogenannten *Schichtontologie*, die eine interessante Kompromissformulierung darstellt, zwischen dualistischen und monistischen Konzepten. Die raumzeitliche Realität bildet eine *Basisschicht*; die darauf aufbauenden Schichten sind, ganz in dem oben angedeuteten Sinn, *kategorial eigenständig*, aber dennoch in der Terminologie der jeweils darunterliegenden Schichten *kausal rekonstruierbar*.[10]

[10]Eine ähnliche Formulierung wurde in neuerer Zeit als sogenannte Supervenienzthese entwickelt. Vgl. Donald Davidson (1970), insbesondere dessen Ausführungen zur „Willensfreiheit“.

Im Bereich der Ontologie und der intensionalen Logik ist dieses Programm einer Schichtontologie vor allem abzugrenzen gegenüber den mehr und mehr dominierenden Ansätzen, die gewissermaßen einen Monismus auf der nicht-extensionalen Ebene behaupten, also eine Art „Geistesontologie" (ohne extensionale Basis). – Die üblichen analytischen Argumente, die sich auf solche Dinge beziehen, wie das Reden über nicht-existierende und fiktionale Entitäten,[11] seien hier als prinzipiell unstrittig betrachtet. Auch die Konsequenzen, dass eine formale Sprache entsprechend *passende intensionale Elemente benötigt*, werden hier grundsätzlich akklamiert. – Der Punkt, auf den hingewiesen werden soll, ist nur folgender: Argumente *für* intensionale Sprachen sind per se keine Argumente *gegen* extensionale Sprachen, sondern bloß *für intensionale Erweiterungen extensionaler Sprachen*.

Wenn wir von *physikalischen* Objekten reden wollen, dann werden wir dies nicht tun wollen, in einer *intensionalen* oder *fiktionalen* Terminologie, wir werden also zunächst, für das Reden *über die extensional-physikalische Basis* eine konsistente *extensionale Grundsprache* benötigen. Da es wenig Sinn zu ergeben scheint, sich in luftige Höhenregionen intensionaler Spekulation zu begeben, *bevor* man derartige Fragen geklärt hat, wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit der Fokus auf die Entwicklung einer solchen extensionalen Kernsprache gelegt.

Siehe auch den Beitrag von Erhard Oeser in Oeser & Seitelberger (1995) und die dortigen wesentlich detaillierteren Ausführungen zum Leib-Seele-Problem.

[11] Vgl. etwa Zalta (1988, S. 1-14) und Fitting & Mendelsohn (1998).

Erster Teil

Kapitel 1

Finitistische Variationen

1.1 Das Layout finitistischer Sprachen

Finitistische Sprachen sind Logiken, die auf zwei unten erläuterte Arten und Weisen restringiert sind: Endlichkeit und Starrheit.

Metalogische Präliminarien Gegeben eine Menge D und eine Teilmenge $A \subseteq D$ nennt man die Menge A *aufzählbar*, wenn es ein Verfahren gibt, mit dem man sukzessive alle Elemente von A auflisten kann. Man nennt A *entscheidbar*, wenn ein Verfahren existiert, das in endlich vielen Schritten für jedes Element von D feststellt, ob es ein Element von A ist. Diese beiden Konzepte sind grundlegend für eine (grobe, aber für unsere Zwecke hinreichende) metalogische Klassifizierung von Logiken.[1]

Gegeben eine Logik (eine formale Sprache) mit der Formelmenge $\mathcal{F}$ und einem passenden Strukturbegriff, ist eine Formel *gültig*, wenn sie in allen Strukturen der Sprache erfüllt ist. Ist die Menge $\mathcal{F}_\top$ aller gültigen Formeln aufzählbar, so heißt die Sprache *vollständig*, ist sie entscheidbar, so heißt die Sprache entscheidbar (hinsichtlich Gültigkeit). So ist beispielsweise die Prädikatenlogik erster Stufe

[1] Für weitere Details vgl. Ebbinghaus et al. (1996, Kapitel X). Dieser Text wird im folgenden stets als Standardressource zur mathematischen Logik zitiert. Weitere Texte, die vergleichbare Materialien anbieten, sind im Literaturverzeichnis angeführt.

zwar vollständig aber unentscheidbar.[2]

Zu unterscheiden von der Gültigkeitsproblematik ist die Frage, ob eine Formel ϕ *in einer bestimmten Struktur* $\mathfrak{A}$ *erfüllt ist*. Mit $\mathfrak{A}_{\models}$ bezeichnen wir die Menge aller in einer Struktur $\mathfrak{A}$ erfüllten Formeln. $\mathfrak{A}_{\models}$ wird in der Regel jedenfalls entscheidbar sein, wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist. Im unendlichen Fall ist die Struktur grob gesprochen genau dann entscheidbar, wenn die an ihrer Definition beteiligten Mengen, Relationen und Funktionen alle entscheidbar sind. Wegen der prinzipiell negativen Lösung des „Entscheidungsproblems“ ist eine große Klasse von unendlichen Strukturen jedoch stets *unentscheidbar*.

Argument I: Endlichkeit Die Bedeutung der Entscheidbarkeit von Erfülltheit liegt darin, dass die Erfülltheitsrelation einen Ausdruck für *Wahrheit* liefert. Interpretieren wir eine Logik als *empirische* Sprache, dann müssen wir im Prinzip nichts anderes tun, als eine Struktur anzugeben, die *ein korrektes Abbild der Realität* repräsentiert. Wäre diese Struktur unentscheidbar, dann hätte dies die unangenehme Konsequenz, dass *Wahrheit* in dieser Sprache insgesamt unentscheidbar wäre.

Natürlich existieren auf der unendlichen Seite zahlreiche Strukturen, die entscheidbar sind. In allen Bereichen der Mathematik wird mit solchen Strukturen operiert. Beispiele: die Menge der ganzen Zahlen und Addition, Mulitiplikation, Division darüber oder das Prädikat „ist eine Primzahl“. – Ein großer Teil aller mathematischen Funktionen sind entscheidbare Funktionen über unendlichen Mengen. Dies liegt daran, dass diese Funktionen typischer Weise als Definitionen eingeführt werden, die nicht viel anderes festlegen, als eben den entsprechenden Entscheidungsalgorithmus.

Wir interessieren uns hier jedoch nicht primär für analytische Sprachen der Mathematik, sondern für *empirische Sprachen*, deren Funktionen auf reale Sachverhalte verweisen und somit keine Frage einer definitorischen Angabe, sondern einer empirischen „Konstatierung“ sind. – Gegeben eine unendliche Grundmen-

[2]Für einen Beweis dieser Sätze siehe Ebbinghaus et al. (1996, Kapitel V und X).

ge „aller Dinge“ müsste man – und das ist sozusagen ein rekursionstheoretischer Gemeinplatz – im empirischen Fall *immer* von dem ungünstigsten Fall einer rekursiven Unentscheidbarkeit ausgehen; in einer *unendlichen* Struktur ist zwar die Summe zweier Zahlen u. dgl. entscheidbar, aber solche Dinge wie die Frage ob x blau ist oder wütend oder schnell, werden hier im Allgemeinen unentscheidbar sein, einfach weil solche Dinge nicht *per Berechnung* (bzw. per Definition, per Konvention) entschieden werden können, sondern nur *per Hinsehen* auf die empirische Realität. Hätten wir es also mit unendlich vielen empirischen Dingen zu tun, dann wären wir in der paradoxen Situation, dass wir *unendlich oft hinsehen* müssten, auf die empirische Realität, um eine Struktur angeben, bzw. ihre Werte entscheiden zu können; wir würden also *nie* fertig werden, mit dem Angeben der Struktur. Diese durchaus triviale Beobachtung zeigt, dass sich unendliche Sprachen für den empirischen Fall disqualifizieren.

Nun könnte man versuchen, die Unendlichkeit dadurch auszuschalten, dass man eine Sprache einfach auf alle Strukturen restringiert, die über endlichen Mengen konstruiert sind. Einen so restringierten Strukturbegriff betrachtet die *endliche Modelltheorie*.[3] Aber diese Restriktion ist unzureichend, sobald man in einer Sprache *modale* Formulierungen vornehmen will. Modalität bedeutet grob gesprochen *Quantifizieren über die Strukturmenge einer Grundsprache*. Ist diese Strukturmenge unendlich, so hat man erneut ein Entscheidbarkeitsproblem. Im Fall der endlichen Modelltheorie ist dieses Problem geradezu prekär: die Menge der in allen endlichen Strukturen der Prädikatenlogik erster Stufe erfüllten Formeln ist *nicht aufzählbar* (Satz von Trachtenbrot)[4], diese Sprache ist also *unvollständig*.

Aber, wie gesagt: vor einem empirischen Hintergrund wäre es sicher ratsam, Sprachen immer so zu konstruieren, dass Erfülltheit entscheidbar ist. Will man eine *modale* Sprache in diesem Sinn konstruieren, dann *muss*, gemäß dem eben gesagten, die „Grundsprache“ dieser modalen Sprache so konstruiert sein, *dass sie nur endlich viele Strukturen besitzt*, da nur dann garantiert ist, dass Quantifizie-

[3]Vgl. Ebbinghaus & Flum (1995).

[4]Vgl. Ebbinghaus et al. (1996, S. 185f.).

ren über Strukturen entscheidbar ist. – Das ist es, was wir das *Endlichkeispostulat für empirische Sprachen* nennen wollen. Sprachen, die diesem Postulat genügen, wollen wir *endliche Sprachen* nennen:

Eine endliche Sprache ist eine Sprache mit endlich vielen Strukturen.

Das elementarste Beispiel einer solchen Sprache ist eine Aussagenlogik über einer endlichen Menge A von Aussagen (vgl. Abschnitt 1.2.1). Die Strukturenmenge $\mathbb{A}$ ist dort gleich der Potenzmenge $\wp(A)$ der Aussagenmenge. In der Prädikatenlogik erster Stufe erreichen wir eine endliche Menge von Strukturen, indem wir uns nicht bloß auf endliche Domänenmengen beschränken, *sondern eine ganz bestimmte endliche Domänenmenge D als fix annehmen*. Eine Struktur $\mathfrak{A} = (D_\exists, \alpha)$ wird dann sinnvoller Weise definiert, als eine *Teilmenge* $D_\exists$ des fixen „Universums“ D plus einer Abbildung α, die den nicht-logischen Konstanten entsprechende Relationen u. dgl. über $D_\exists$ zuordnet (vgl. Abschnitt 1.2.2). – Eine solche Logik lässt also durchaus eine Variation der Domäne zu, aber restringiert diese Variabilität auf bestimmte Grenzen, die durch das Universum D vorgegeben sind. Dieses Restringieren der Grenzen hat philosophische aber auch formale Vorteile: so konstruierte endliche Sprachen sind *entscheidbar*, und zwar sowohl hinsichtlich Gültigkeit als auch hinsichtlich Erfülltheit. Sie vereinigen also die Vorteile der endlichen und der unbeschränkten Modelltheorie in sich:

Prädikatenlogik erster Stufe			
	Gültigkeit		Erfülltheit
	aufzählbar	entscheidbar	entscheidbar
Der klassische Fall	Ja	Nein	Nein
Endliche Modelltheorie	Nein	Nein	Ja
Endliche Sprache	Ja	Ja	Ja

Argument II: Starrheit Eine naheliegende ontologische Interpretation aussagen- und prädikatenlogischer Sprachen lautet wie folgt: die in der Symbolmenge der Sprache festgesetzten logischen und nichtlogischen Konstanten haben eine *fixe Bedeutung (Intension)*. – So wäre es eher witzlos, bei einer Aussagenlogik davon auszugehen, dass eine Konstante p in einer Struktur „Schnee ist weiß“ bedeutet, in einer anderen aber „Gras ist Grün“. In gewisser Hinsicht würde eine derartige Annahme die gesamte aussagenlogische Konstruktion ad absurdum führen, weil Strukturen dann nicht mehr sinnvoll vergleichbar wären. $\Box p$ würde dann unangenehmer Weise so etwas bedeuten wie: „Für alle vergleichbaren w_1, w_2, w_i gilt“:

in w_1: Schnee ist weiß.

in w_2: Gras ist grün.

in w_i: Das arbiträre Irgendwas ist der Fall, das p in w_i bedeutet.

Man geht also sinnvoller Weise davon aus, dass *alle Aussagenkonstanten stets die selbe Bedeutung (Intension) aufweisen*. Analog wird man in der Prädikatenlogik davon ausgehen wollen, dass ein und das selbe Prädikatensymbol P in allen Strukturen die selbe Bedeutung aufweist, und nicht etwa in einem Fall „weiß“ und im anderen „blau“ bedeutet. Auch im Fall von Individuenkonstanten wird man im Allgemeinen diese Annahme treffen wollen. Wenn a für „Cäsar“ steht, dann wird man nicht annehmen dass dieses a in irgendeiner Struktur plötzlich Pegasus bezeichnet oder Walter Scott. (Bedeutet a den gegenwärtigen König von Frankreich, dann bezeichnet es zwar in unterschiedlichen Zusammenhängen unterschiedliche Objekte, aber doch immer Objekte einer ganz bestimmten Klasse.) Im Sinne dieser Standardinterpretation müsste also *die Signatur* einer beliebigen formalen Sprache letztendlich *genau alle Intensionen* bereits festsetzen, die in dieser Sprache eine Rolle spielen.

So plausibel diese Auffassung auch anschaulich gesehen ist, sie harmoniert äußerst schlecht mit einer klassischen modelltheoretischen Konzeption von Logik. – Im aussagenlogischen Fall gibt es noch keine Probleme. Identifizieren wir Aussagenkonstanten mit Propositionen, dann resultieren Strukturen als Mengen von wahren Propositionen (die Klasse aller Strukturen entsprechend als Potenzmenge der Aussagenmenge).

Bei der Prädikatenlogik hingegen bricht diese plausible Auffassung völlig zusammen, sobald wir die Sprache im üblichen Sinn semantisch definieren. Gegeben die *Klasse aller Strukturen* $\mathbb{A}$, zu einer bestimmten Signatur, *muss* eine beliebige Individuenkonstante a, die irgendwo Cäsar bezeichnet, auch irgendwo einen Kugelschreiber, die Zahl 23 678, Pegasus, Walter Scott oder die Maus auf dem Mars bezeichnen: die extrem offene Konstruktionsweise des Strukturbegriffs über allem und jedem *erzwingt*, dass es für jede nichtlogische Konstante und jedes „Ding" eine Struktur gibt, in der diese Konstante das Ding bezeichnet – jede Konstante kann modelltheoretisch gesehen *einfach alles* bezeichnen. Wie Hartry Field völlig korrekt anmerkt: in einer modelltheoretisch konzipierten Logik *kann* „Schnee ist weiß" auch „Gras ist Grün" bedeuten (weil es *einfach alles* bedeuten kann).[5]

Das ist eine unangenehme Situation, die nur durch radikale Maßnahmen verbessert werden kann. – Frage: wie können wir *erzwingen*, dass ein a immer das selbe Ding bezeichnet, „Cäsar" immer Cäsar, „Schnee" immer Schnee, „Pegasus" Pegasus und „Der gegenwärtige König von Frankreich" den gegenwärtigen König von Frankreich? – Es ist klar, dass jede mögliche Antwort darauf etwas mit einem *Fixieren der Domäne einer Sprache* zu tun hat. Soll heißen: ist die Interpretation plausibel, dass alle Elemente der *Signatur* einer Sprache eine fixe Bedeutung haben, dann ist dem hinzuzufügen, *dass man diese Interpretation nur dann durchhalten kann, wenn man die Domänenmenge fixiert.* – Dies ist eine triviale Konsequenz, die insbesondere nichts zu tun hat, mit der Position die man hinsichtlich *starrer Referenz* u.dgl. einnimmt! – Ein a kann immer das selbe Ding bezeichnen (Schnee oder weiß), oder es kann viele Dinge in unterschiedlichen Situationen bezeichnen (etwa den jeweils gegenwärtigen König von Frankreich). Die resultierende Domäne kann fix sein, auch dann wenn jede nichtlogische Konstante unendlich viele verschiedene „Optionen" aufweist. Oder, mit anderen Worten: nichtlogische Kon-

[5]Vgl. Field (2001).

stanten können in diesem Sinn zwar jeweils *viele* unterschiedliche Dinge, nicht aber *in jedem Fall alle* Dinge bezeichnen. Eine Individuenkonstante k könnte so als „nicht-starrer Designator" definiert sein, dass sie in jeder Struktur den Gegenstand bezeichnet, der dort gerade der gegenwärtige König von Frankreich ist; diese Option ist klar zu unterscheiden von der prädikatenlogischen Standardannahme, dass es für jedes Ding i und jede Individuenkonstante k eine Struktur geben muss, in der k dieses i bezeichnet.[6]

Allgemein wollen wir, im Sinne einer ersten Näherung (eine allgemeinere Definition liefern wir im Abschnitt 1.3), eine Sprache *starr* nennen, wenn sie eine *fixe* Domäne besitzt. Klassischer Weise ist eine Aussagenlogik daher stets starr. Bei der Prädikatenlogik erreicht man Starrheit am Besten dadurch, dass man ein fixes „Universum" D vorgibt, aus dem die Domäne jeder Struktur stammen muss. Ist dieses D endlich, so auch (vgl. Abschnitt 1.2.2) die Menge aller Strukturen; die starre Sprache ist dann also endlich im oben spezifizierten Sinn. Sprachen die *starr und endlich* sind nennen wir *finitistische Sprachen*.

Ein bekanntermaßen wichtiger Anwendungsfall von Starrheit sind quantifizierte Modallogiken (siehe unten, Abschnitt 1.2.4). Solche Logiken sind insofern stets starr, als ein *Modell* im üblichen Sinn dort eine fixe Menge von „möglichen Welten" angibt, von denen jede eine Domäne zugeordnet bekommt. Die Vereinigungsmenge aller Domänen kann somit als fixes Universum des Modells betrachtet werden. Die Restriktion, die wir hier vornehmen, geht jedoch insofern weiter, als wir *die gesamte Sprache* (und nicht bloß einzelne Modelle) auf ein fixes Universum restringieren. Motiviert ist dies durch obiges philosophisches Argument, dass *die Namen* einer Sprache *immer* die selbe Bedeutung haben sollten.[7]

Konklusion: eine Ockhamisierung philosophischer Logik Die vorliegende Arbeit bietet im Wesentlichen keine Neuigkeiten an. Die meisten hier präsentier-

[6] Auf die technische Seite dieses Arguments (Unterscheidung zwischen starren und nicht-starren Namen) gehen wir unten, im Abschnitt 2.1.3 näher ein.

[7] Vgl. auch die Bemerkungen, oben, S. 2, insbesondere Fußnote 2, wo auf die Bedeutung Saul Kripkes für das hier grundlegende Konzept der Starrheit eingegangen wird.

ten logischen Systeme sind bekannt, ebenso wie die meisten Theoreme von denen die Rede sein wird, bekannt sind. Auch das philosophische Prinzip der Starrheit ist spätestens seit Kripke (1980) eine in wesentlichen Punkten bekannte Konzeption. Aber Logik wird hier, gegeben diese Einschränkungen, doch unter einem signifikant anderen Blickwinkel betrachtet, der zu einer massiven Vereinfachung des theoretischen Apparates führt. So kann man von einem *Relaunch* oder auch einer *Ockhamisierung* philosophischer Logik sprechen. – Wenn auch kaum substanzielle theoretische Neuigkeiten in der Arbeit stecken, so führt die Arbeit doch dazu, dass eine große Anzahl von klassischen Theoriefeldern der philosophischen und mathematischen Logik sich als schlicht *überflüssig*, quasi als theoretische Ornamente erweisen. Weitgehend unter den Tisch fallen vor dem Hintergrund des vorliegenden Ansatzes beispielsweise die oft extrem komplizierten Konstruktionen *deduktiver Systeme* für Logiken (und somit der gesamte klassische syntaktische Zugang). Es fällt aber auch der *modelltheoretische* Gesichtspunkt weitgehend flach, bzw. wird schlicht trivialisiert. Grob gesprochen: das was man mit den rezenten Instrumentarien philosophischer Logik erreichen kann, kann man mit den hier präsentierten Techniken ebenso erreichen, nur mit einem Bruchteil an theoretischem Aufwand. Dass der Standpunkt der Endlichkeit (und Starrheit), wie im zweiten Teil der Arbeit suggeriert wird, auch für sich genommen philosophische Perspektiven im engeren Sinn haben könnte, ist dabei vergleichsweise als (erwünschter) Nebeneffekt einzuschätzen.

1.2 Fünf finitistische Sprachen

1.2.1 Die Aussagenlogik FIN_a

Eine finitistische Sprache ist *definiert* durch die Angabe einer endlichen Menge von Entitäten. So definieren und identifizieren wir FIN_a mit einer endlichen Menge A von *Aussagenkonstanten*. – Natürlich gibt es demnach unendlich viele „Erscheinungsformen" der Sprache FIN_a, aber das tut hier nichts zur Sache, da ein *Vergleich* dieser Erscheinungsformen nicht in einem finitistischen Rahmen angestellt werden könnte.

Eine *Struktur* der aussagenlogischen Sprache $\mathsf{FIN_a}$ ist jeweils mit einer Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq A$ von wahren Aussagen zu identifizieren. Es gibt also genau $2^{|A|}$ mögliche Strukturen und die Menge aller Strukturen $\mathbb{A}_a$ ist gleich der Potenzmenge $\wp(A)$. Die Formelmenge $\mathcal{F}_\mathsf{a}$ ist (in der üblichen Backus-Naur-Form[8]) definiert als

$$\phi ::= \; p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi,$$

wobei p für Elemente von A steht. – Wir führen hier stets nur die beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ ein, um die entsprechenden Definitionen von Semantiken möglichst kurz zu halten. Andere Junktoren können auf der Basis von $\neg$ und $\wedge$ in der üblichen Weise definiert werden. Wir präsentieren eine Auswahl:

$$\phi \vee \psi := \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$
$$\phi \rightarrow \psi := \neg(\phi \wedge \neg\psi)$$
$$\phi \leftrightarrow \psi := \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi).$$

Für jede Struktur $\mathfrak{A}$, jede Aussagenkonstante p und alle $\mathcal{F}_\mathsf{a}$-Formeln ϕ und ψ gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models p & \text{gdw} & p \in \mathfrak{A}. \\ \mathfrak{A} \models \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \models \phi. \\ \mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi. \end{array}$$

Im Anhang A wird ein einfacher Algorithmus beschrieben, mit dem sich für jede endliche Formel ϕ und jede Struktur $\mathfrak{A}$ in endlich vielen Schritten zeigen lässt ob $\mathfrak{A} \models \phi$ gilt. Da die Anzahl aller möglichen Strukturen gegeben eine Menge A endlich ist, lässt sich mit dem selben Verfahren auch *Gültigkeit* entscheiden. Ein simpler Resolutionsalgorithmus ersetzt damit insbesondere ein Deduktionsverfahren der üblichen Form.

Lässt man in obiger Definition zu, dass die Aussagenmenge A unendlich ist, dann funktioniert die Definition der Sprache völlig analog, es gibt jedoch dann

[8] Siehe z.b. Goldblatt (1992, S. 3).

keinen Algorithmus, der für jede Menge A Erfülltheit entscheidet. Wohl entscheidbar wäre auch in diesem Fall *Gültigkeit* für endliche Formeln ϕ, da man dafür stets nur alle Strukturen über der Menge $A(\phi)$ aller in ϕ vorkommenden Aussagenkonstanten testen muss.[9]

Natürlich könnte man Gültigkeit einer Formel auch anhand eines der bekannten deduktiven Verfahren entscheiden, wie dem Hilbert-Kalkül, dem Kalkül des natürlichen Schließens, dem Sequenzenkalkül oder analytischen Tableaus, bzw. mit einem einschlägigen Computerverfahren.[10] Es sind jedoch eher nur Effizienzüberlegungen, die solche Verfahren hier relevant machen würden – solche Verfahren sind durchwegs „schneller" als die hier diskutierte Option, die bereits bei relativ „kurzen" Formeln einen extremen Rechenaufwand zur Entscheidung von Gültigkeit erfordern würde. Da es im Rahmen dieser Untersuchungen aber nicht um Effizienzüberlegungen oder die Frage technischer Implementierung geht, klammern wir derartige Problemstellungen hier aus.

Modelltheoretische Bemerkung Zwei Formeln heißen *logisch äquivalent*, wenn sie in genau den selben Strukturen erfüllt sind. Es gilt:

Satz 1 Für jede Menge von aussagenlogischen Strukturen $\mathbb{A}^* \subseteq \mathbb{A}_a$ existiert eine endliche $\mathsf{FIN_a}$-Formel ϕ, die genau in den Strukturen aus A^* erfüllt ist.

Beweis: wir konstruieren für jede Struktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{A}_a$ einen Ausdruck in disjunktiver Normalform $\phi(\mathfrak{A})$:

$$\phi(\mathfrak{A}) := \left(\bigwedge_{a \in \mathfrak{A}} a \right) \wedge \left(\bigwedge_{a \notin \mathfrak{A}} \neg a \right).$$

Dieser Ausdruck ist trivialer Weise genau in der Struktur $\mathfrak{A}$ erfüllt. Für jede Menge von Strukturen $\mathbb{A}^* \subseteq \mathbb{A}_a$ definieren wir einen entsprechenden Ausdruck in

[9] Für weitere Gesichtspunkte klassischer Aussagenlogik vgl. Ebbinghaus et al. (1996, Kapitel XI, § 4).

[10] Für einen Überblick über die (in der Prädikatenlogik) gängigsten deduktiven Verfahren vgl. Sundholm (2001). Zu Verfahren der Logik-Programmierung vgl. Ebbinghaus et al. (1996, Kapitel XI), sowie Ebbinghaus & Flum (2001).

disjunktiver Normalform $\phi(\mathbb{A}^*)$ dann naheliegender Weise so:

$$\phi(\mathbb{A}^*) := \bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathbb{A}^*} \phi(\mathfrak{A}).$$

Man sieht sofort, dass dieser Ausdruck genau in den Strukturen aus $\mathbb{A}^*$ erfüllt ist. $\square$

Dieser Satz ist insofern das modelltheoretische A und O der Sprache $\mathsf{FIN_a}$, als er alles über den *Informationsgehalt* dieser Sprache sagt. – Wir nennen die Formel $\phi(\mathbb{A}^*)$ eine diese Strukturenmenge *charakterisierende* Formel. Eine Menge $\mathbb{F}_a \subseteq \mathcal{F}_\mathsf{a}$ nennen wir eine *Charakteristik* der gesamten Strukturenmenge und also der gesamten Sprache $\mathsf{FIN_a}$, wenn sie eine größtmögliche Anzahl von logisch nicht äquivalenten Formeln enthält. Aus der Definition von logischer Äquivalenz folgt sofort, dass diese Menge genau 2^{2^n} Elemente haben muss, wobei n die Mächtigkeit der Aussagenmenge A der Sprache ist. Eine solche Menge $\mathbb{F}_a$ enthält also gewissermaßen *alle Instanzen unterschiedlicher sinnvoller Aussagen*, die man, gegeben eine Menge A von atomaren Aussagen, machen kann.

Insbesondere gilt dann, wie man sofort sieht: Jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathcal{F}_\mathsf{a}$ enthält endlich viele logisch nicht äquivalente Formeln und jede Formel ϕ ist zu einer endlichen Formel $\psi \in \mathcal{F}_\mathsf{a}$ logisch äquivalent. – Dies benützend kann man *logische Folgerung* hier o. B. d. A. für endliche Mengen von endlichen Formeln Φ definieren. Eine Formel ψ *folgt* aus einer solchen Menge Φ und man schreibt $\Phi \vDash \psi$, wenn die Konjunktion aller Formeln aus Φ in allen Strukturen ψ impliziert:

$$\Phi \vDash \psi \quad \text{gdw} \quad \forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A}_a : \mathfrak{A} \vDash \bigwedge_{\phi \in \Phi} \phi \rightarrow \psi$$

Somit lässt sich auch logische Folgerung hier anhand eines Resolutionsalgorithmus im Stil von Anhang A entscheiden.

Wie wir unten im Abschnitt 1.3 präzisieren werden, liegt die zentrale Bedeutung der Aussagenlogik $\mathsf{FIN_a}$ darin, dass sich jede finitistische Sprache äquivalent als Aussagenlogik $\mathsf{FIN_a}$ beschreiben lässt (in der bloß die Definition atomarer Formeln komplexer ist als im Fall von $\mathsf{FIN_a}$). – Modelltheoretisch gesehen, sind alle finitistischen Sprachen *gleich ausdrucksstark* wie $\mathsf{FIN_a}$.

1.2.2 Die Prädikatenlogik erster Stufe $\mathsf{FIN_p}$

Wie im Fall von $\mathsf{FIN_a}$ ist $\mathsf{FIN_p}$ durch eine endliche Menge von „Entitäten“ definiert. Die Sprache muss, in der üblichen Terminologie, eine *endliche Signatur* haben und eine *fixe endliche Domäne*. Da diese beiden Bestandteile gemeinsam die Entitäten der Sprache $\mathsf{FIN_p}$ bilden, fassen wir sie in dem Kunstwort „Domänensignatur“ zusammen:

Eine *Domänensignatur* $\mathfrak{D}_p = (D, \mathcal{P})$ besteht aus einer *endlichen Domänenmenge* D und einer endlichen Menge $\mathcal{P}$ von Prädikatenkonstanten (Funktionenkonstanten lassen wir der Einfachheit halber weg). Jedes $P \in \mathcal{P}$ kann mit einer natürlichen Zahl – seiner Stellenzahl – identifiziert werden. (Beispielsweise könnte man $\mathcal{P}$ als endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren, wobei bei jedem $(i, j) \in \mathcal{P}$ das i die Stellenzahl angibt, das j einen arbiträren Index; jedes $P \in \mathcal{P}$ identifizieren wir dann mit dieser Stellenzahl i.) Wegen der Endlichkeit von D sprechen wir synonym von *Elementen* von D und von *Individuenkonstanten* (D ist, so könnte man sagen, eine endliche Menge von *starren Designatoren* – vgl. unten, S. 62ff.). Analog setzen wir bei allen im Folgenden definierten finitistischen Sprachen fest, dass die Elemente der Domäne, bzw. der Sorten der Sprache als starre Designatoren definiert sind, dass also nicht zwischen Domänen*objekten* und *Konstanten* unterschieden wird. (Gegebenenfalls könnte man eine solche Unterscheidung jederzeit als externe Ergänzung einer Sprachdefinition einführen.)

Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ (über einer Domänensignatur $\mathfrak{D}_p$) ist definiert als ein Paar $(D_\exists, \alpha)$, wobei $D_\exists \subseteq D$ die Menge der in der Struktur „existierenden Gegenstände“ aus D festlegt; α ist eine Abbildung, die jedem Prädikat $P \in \mathcal{P}$ mit $P = i$ eine Menge $\alpha(P) \subseteq D_\exists^i$ zuordnet (wobei $D_\exists^i$ das i-fache kartesische Produkt von $D_\exists$ mit sich selbst bezeichnet).

Mit $\mathbb{A}_p$ bezeichnen wir die Menge aller möglichen Strukturen über $\mathfrak{D}_p$. Mit $\mathfrak{A}_\emptyset$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Struktur, in der $D_\exists = \emptyset$ gilt. Die Menge $\mathbb{A}_p$ ist, wie man leicht sieht, stets endlich, da sie nur aus endlichen kartesischen Produkten und Potenzmengenbildungen über D entsteht.

Syntax und Semantik Wir führen eine abzählbare Menge $x, x', x'', \ldots$ von Variablen ein und definieren: jede Individuenkonstante und jede Variable ist ein *Term*. Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Prädikat mit $P = i$ und sind $\tau_1, \ldots, \tau_i$ Terme, so ist $P(\tau_1, \ldots, \tau_i)$ eine *atomare Formel*. Für je zwei Terme τ, τ' ist $\tau \equiv \tau'$ eine atomare Formel. Die Formelmenge $\mathcal{F}_\mathsf{p}$ ist dann so definiert:

$$\phi ::= \ p \mid \forall x \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi,$$

für alle atomaren Formeln p und alle Variablen x. Ist ϕ irgendeine Formel, x eine Variable und $c \in D$ eine Konstante, so bezeichnen wir mit $\phi\left[\frac{c}{x}\right]$ die Formel die dadurch entsteht, dass alle Instanzen von x in ϕ durch c ersetzt werden.

Die Junktoren $\wedge$ und $\neg$ werden wie im aussagenlogischen Fall definiert. Für alle Formeln $P(\mathbf{c})$ (wo $\mathbf{c}$ ein passender Konstantenvektor ist), $c \equiv c'$, sowie für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (D_\exists, \alpha)$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models P(\mathbf{c}) & \text{gdw} & \mathbf{c} \in \alpha(P). \\ \mathfrak{A} \models c \equiv c' & \text{gdw} & c, c' \in D_\exists \text{ und } c = c'. \\ \mathfrak{A} \models \forall x \phi & \text{gdw} & D_\exists \text{ ist leer oder für alle } c \in D_\exists \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \end{array}$$

Diese Definitionen spezifizieren Erfülltheit für alle Strukturen und alle Formeln aus $\mathcal{F}_\mathsf{p}$ ohne freie Variablen. Bei allen folgenden Sprachspezifikationen definieren wir Erfülltheit analog nur für Formeln ohne freie Variablen.

Im Anhang A wird gezeigt, dass ein ähnlicher Resolutionsalgorithmus wie im Fall der Aussagenlogik auch hier zur Entscheidung von Erfülltheit bzw. Gültigkeit von endlichen Formeln herangezogen werden kann.

Eine existenzannahmenfreie Logik Die Sprache FIN_p ist eine *free logic* – eine existenzannahmenfreie Logik.[11] Dies äußert sich darin, dass existenzielle Generalisierung

$$\exists x : x \equiv c$$

[11] Zur *free logic* generell vgl. Bencivenga (1986), sowie unten, die Abschnitte 1.2.4 und 2.1.3.

nicht gilt. Wir definieren den zu $\forall$ dualen Quantor $\exists x\phi$ als $\neg\forall x\neg\phi$. Dabei ist zu beachten, dass für $\mathfrak{A}_\emptyset$ folgendes gilt: $\forall x\phi$ ist immer wahr und $\exists x\phi$ ist immer falsch. Denn: da $\forall x\phi$ in $\mathfrak{A}_\emptyset$ per Definition immer wahr ist, ist auch $\forall x\neg\phi$ immer wahr und somit ist $\exists x\phi$ immer falsch.

Sei nun $c \in D$ irgendeine Konstante. Dann gibt es Strukturen mit $c \notin D_\exists$. In diesen Strukturen gilt somit $\exists x : x \equiv c$ nicht. Wir definieren ein Existenzprädikat:

$$E(c) \quad \text{gdw} \quad \exists x : x \equiv c.$$

Die unzweifelhafte Interpretation von E ist dann, dass in einer „Welt", in der ein c nicht existiert – beispielsweise die gegenwärtige Welt, mit c als Name von Julius Cäsar – passender Weise $E(c)$ nicht erfüllt ist.

Modelltheoretische Bemerkung Eine Variante des für die Modelltheorie von $\mathsf{FIN_a}$ grundlegenden Satzes 1 lässt sich unmittelbar auch für $\mathsf{FIN_p}$ angeben:

Korollar 1 Für jede Menge von Strukturen $A \subseteq \mathbb{A}_p$ existiert eine endliche Formel, die in genau den Strukturen aus A erfüllt ist.

Beweis: sei $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ die Menge aller konstantenbelegten Prädikatenformeln aus $\mathsf{FIN_p}$ plus alle Formeln des Typs $E(c)$. Dann kann man, wie man leicht sieht, jede Struktur $\mathfrak{A}$ äquivalent beschreiben als Menge aller Formeln aus $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$, die in $\mathfrak{A}$ erfüllt sind. Sind zwei Strukturen nicht identisch, so sind auch diese Teilmengen von $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ nicht identisch. Dann folgt das Korrolar sofort aus Satz 1. $\square$

Diese Beweistechnik deutet im Übrigen genau das Verfahren an, anhand dessen wir im Abschnitt 1.3 beliebige finitistische Sprachen auf Aussagenlogik reduzieren werden.

1.2.3 Die modale Aussagenlogik $\mathsf{FLAT_a}$

Flache Semantik Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass die modale Aussagenlogik als Fragment der Prädikatenlogik erster respektive zweiter Stufe interpretiert werden kann.[12] Diesen Gedanken weiterdenkend (bzw., so könnte man sagen, ihn trivialisierend) beschreiben wir eine modale Aussagenlogik hier als *zweisortige Prädikatenlogik erster Stufe*. Die erste Sorte ist eine endliche Menge A von Aussagenkonstanten, die zweite ist die Menge $\mathbb{A}_a = \wp(A)$ aller darüber möglichen aussagenlogischen Strukturen. Über der ersten Sorte ist jedes $p \in A$ eine atomare Formel. Für die zweite Sorte wird eine endliche Menge $\mathcal{P}$ von Prädikatenkonstanten beliebiger Stellenzahl angegeben, mit denen über $\mathbb{A}_a$ quantifiziert wird. Dieses Quantifizieren wird hier also nicht anhand von extern (in der zweiten Stufe) definierten modalen Operatoren realisiert, sondern direkt in der ersten Stufe, in der dann ad hoc beliebige modale Operatoren definiert werden können.

Damit Definition modaler Operatoren möglich wird, benötigen wir zwei zusätzliche Sprachelemente, die nicht dem klassischen prädikatenlogischen Ausdrucksrepertoire entstammen: (1) ist dies eine syntaktische Klausel $t \Vdash \phi$ – die sogenannte *flache Modellbeziehung* –, für Terme t der Sorte $\mathbb{A}_a$ und für beliebige Formeln ϕ. (2) muss eine Möglichkeit vorgesehen werden, mit einer Konstante `SELF` innerhalb von Formeln auf die jeweils gerade „aktuale" Struktur zuzugreifen, die sich kraft Quantifizierung im Kontext einer Formel mehrfach verändern kann. Eine typische Definition von $\Box\phi$ würde dann, als Formel der ersten Stufe, so aussehen (dabei ist R eine passende „Erreichbarkeitsrelation" und a eine $\mathbb{A}$-Variable):

$$\Box\phi \quad \text{gdw} \quad \forall a : R(\mathtt{SELF}, a) \to a \Vdash \phi.$$

Sprachen dieses Typs nennen wir *flache Semantiken* (für eine Präzisierung dieses Begriffs siehe unten, S. 43).

[12] Vgl. van Benthem (2001), Blackburn et al. (2001).

Domänensignaturen und modale Strukturen Eine *Domänensignatur* $\mathfrak{D}_m$ ist als Paar $(A, \mathcal{P})$ definiert. A ist eine endliche Menge von Aussagenkonstanten, $\mathcal{P}$ eine endliche Menge von (über $\mathbb{A}_a = \wp(A)$ definierten) Prädikatenkonstanten beliebiger Stellenzahl.

Eine *modale Struktur* $\mathfrak{M}$ ist dann eine Abbildung, die jedem $P \in \mathcal{P}$ eine entsprechende Relation über $\mathbb{A}_a$ zuordnet. – Wir konstruieren diese Sprache nicht als *free-logic*, in der Annahme, dass dies im modalen Fall eher unzweckmäßig wäre: ein Gegenstück zu der quasi-materiellen Vorstellung von existierenden und nicht-existierenden Gegenständen scheint es im modalen Fall jedenfalls nicht zu geben – „unmögliche Welten" könnte man hier dadurch ausschließen, dass man Erreichbarkeitsrelationen entsprechend festlegt. Eine *free-logic* hätte insbesondere den Nachteil, dass sie eine Implementierung einer Carnapschen Modallogik[13] **C** im Allgemeinen unmöglich machen würde, in der nicht über eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{A}_a$ von *vergleichbaren* Strukturen respektive möglichen Welten quantifiziert wird, sondern *über alle Strukturen* aus $\mathbb{A}_a$. Die Formel

$$\Box\phi \quad \text{gdw} \quad \forall a : a \Vdash \phi$$

definiert **C** nur dann korrekt, wenn wir die Sprache nicht als free-logic konstruieren, also stets über die gesamte Menge $\mathbb{A}_a$ quantifizieren.

Natürlich könnte man nun, analog zum Strukturbegriff im aussagenlogischen Basisfall, die Menge $\mathbb{M}$ *aller modalen Strukturen* betrachten, Erfülltheit relativ zu einer beliebigen modalen Struktur definieren und so über modale Strukturen quantifizieren. Allerdings scheint hier der Fall interessanter, wo eine bestimmte modale Struktur $\mathfrak{M}$ von Vornherein *fix vorgegeben* ist. Die Vorstellung ist die, dass A alle möglichen Aussagen (über einen bestimmten Bereich) enthält, und $\mathfrak{M}$ dann sozusagen alle faktischen und kontrafaktischen Bestimmungen über A angibt: $\mathfrak{M}$ legt fest, was „mögliche" und was „unmögliche Welten" sind, was vielleicht, sicher oder nie „wahr" ist, was, gegebene eine „Welt", deren „mögliche Zukünfte" und „Vergangenheiten" sind, usw.

[13] Vgl. Carnap (1972), Schurz (1999), Gottlob (1999).

Wir nennen eine so, durch eine fixe modale Struktur und eine ihr zugrundeliegende Domänensignatur charakterisierte „Welt“ eine *Ontologie* $\mathfrak{O}_a = (\mathfrak{D}_m, \mathfrak{M})$. Erfülltheit wird im Folgenden relativ zu einer gegebenen Ontologie definiert, für alle Formeln und alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_a$ dieser Ontologie, weshalb wir anstelle von $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}] \models \phi$ der Einfachheit halber nur $\mathfrak{A} \models \phi$ schreiben.

Syntax und Semantik Wir führen als Terme starr referierende Individuenkonstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ ein (für jedes Element von $\mathbb{A}_a$ genau eine Konstante) und eine abzählbare Menge von Variablen $a, a', \ldots$ Zusätzlich ist eine arbiträre Konstante $\texttt{SELF}$ als $\mathbb{A}_a$-Konstante definiert und es gilt, für alle Konstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathbb{A}_a$ und alle Folgen von $\mathbb{A}_a$-Konstanten $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}') := \mathfrak{A}'$$

$$\mathfrak{A}(\texttt{SELF}) := \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) := \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_n)$$

Atomare Formeln sind dann sowohl atomare Aussagen aus A, als auch – in der üblichen Weise – Prädikate und Identitätsformeln über $\mathbb{A}_a$. Die Formelmenge $\mathcal{F}_\mathsf{m}$ ist so definiert:

$$\phi ::= \ p \mid \forall a \phi \mid \neg \phi \mid \phi \wedge \phi \mid \tau \Vdash \phi,$$

wobei τ für Terme steht, a für Variablen und p für atomare Formeln. – Die Definitionen für $\neg$ und $\wedge$ erfolgen analog zum aussagenlogischen Fall. Für eine fixe durch $\mathfrak{O}_a$ vorgegebene modale Struktur $\mathfrak{M}$, für alle $p \in A$, alle $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_a$, alle $\mathbb{A}_a$-Konstanten $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$, alle $P(\bar{\mathfrak{A}})$ mit $P \in \mathcal{P}$ und passendem Konstantenvektor $\bar{\mathfrak{A}}$ und alle Formeln $\phi \in \mathcal{F}_\mathsf{m}$ gilt:

$\mathfrak{A} \models p$	gdw	$p \in \mathfrak{A}$.
$\mathfrak{A} \models P(\bar{\mathfrak{A}})$	gdw	$\mathfrak{A}(\bar{\mathfrak{A}}) \in \mathfrak{M}(P)$.
$\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}''$	gdw	$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}'')$.
$\mathfrak{A} \models \forall a \phi$	gdw	für alle $\mathfrak{A}^* \in \mathbb{A}_a$ gilt $\mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{\mathfrak{A}^*}{a}\right]$.
$\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}' \Vdash \phi$	gdw	$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}') \models \phi$.

Es gilt erneut Entscheidbarkeit von Erfülltheit und Gültigkeit für alle endlichen Formeln aus $\mathcal{F}_\mathsf{m}$ ohne freie Variablen, was erneut im Anhang A gezeigt wird.

S4, S5 & Co Auf C. I. Lewis geht die erste Klassifikation modaler Logiken zurück (von ihm stammen auch die Bezeichnungen **S1**, ..., **S5**.).[14] Diese Einteilung war rein *syntaktischer* Natur, d. h. sie bestand in der Angabe unterschiedlicher *Axiomensysteme* der modalen Aussagenlogik. Das dabei verwendete System $\mathsf{MOD_a}$ ist als Formelmenge so definiert:

$$\phi ::= \; p \mid \Box\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Eine an $\mathsf{FLAT_a}$ angenäherte Verallgemeinerung müsste anstelle dieses einen (und einstelligen) modalen Operators $\Box$ eine beliebige Menge modaler Operatoren (mit beliebiger Stellenzahl) einführen, worauf wir hier jedoch verzichten.[15] Wie bei den Quantoren $\forall$ und $\exists$ wird hier der zu $\Box$ *duale modale Operator* $\Diamond$ als $\Diamond\phi := \neg\Box\neg\phi$ definiert.

Gegeben das Grundsystem $\mathsf{MOD_a}$ war es die Lewissche Idee, dass man für dieses System eine ganze Reihe von unterschiedlichen Axiomensystemen angeben könnte, die zu jeweils unterschiedlichen Mengen von ableitbaren Formeln führen. Die Intuition wäre also die, dass es, je nachdem welches System aus einer Reihe von Axiomensystemen $A_1, A_2, \ldots$ man ansetzt, jeweils nicht-identische Mengen $\mathsf{MOD_a}_{A_i}$ von in A_i gültigen Formeln resultieren müssten. Das historische Verdienst der sogenannten Kripke-Semantik besteht dann darin, dass diese eine direkte semantische *Definition* dieser jeweiligen Formelmengen ermöglicht, und somit die Grundlage liefert, für entsprechende *Vollständigkeitsbeweise*, die zeigen dass A_i einen passenden *Aufzählungsalgorithmus* für die nach dem Schema der Kripke-Semantik definierte Formelmenge liefert.

[14] Vgl. Lewis & Langford (1932, Appendix I). Für eine aktuelle Übersicht über die verschiedenen Systeme der Modallogik vgl. Bull & Segerberg (2001). Zur Geschichte der Modallogik von einem rein technischen Standpunkt betrachtet, vgl. Goldblatt (2003).

[15] Für eine entsprechende Konzeption vgl. Blackburn et al. (2001, Abschnitt 1.2).

Die Krux bei dieser Vorgangsweise ist (ganz abgesehen davon, dass nicht alle möglichen Axiomensysteme in diesem Sinn vollständig sind[16]), dass sie die Logikerin nötigt, für *jedes* der zahllosen möglichen $\mathsf{MOD_a}$-Systeme einen passenden Vollständigkeitsbeweis zu liefern, sozusagen, um zu zeigen, dass dieses System überhaupt eine vollwertige Logik darstellt. Die klassische modale Logik – also Lewissche syntaktische Konzeption plus Kripke-Semantik – führt somit zu einer äußerst komplexen, umfänglichen mathematischen Theorie und einer inflationären Produktion von Vollständigkeits- und Entscheidbarkeitsbeweisen, bzw. diese verallgemeinernden Resultaten, einfach weil es darin nicht möglich ist, *ein einfaches Grundsystem* für die Modallogik anzugeben, das dann Syntax und Semantik (inklusive Vollständigkeitsbeweis u. dgl.) für alle einzelnen Systeme inkludiert.

Eine flache Semantik als finitistische Sprache im Stil von $\mathsf{FLAT_a}$ bietet jedoch genau diese Möglichkeit (wenn auch in geradezu trivialer Weise). Sie liefert eine sehr einfache formale Sprache (die, wie gezeigt wurde, entscheidbar ist, sowohl hinsichtlich Erfülltheit als auch hinsichtlich Gültigkeit), in der dann modale Systeme von Vornherein *rein semantisch* definiert werden können. So kann man das System **S5** *definieren* als modalen Operator $\Box\phi$, der konstruiert ist als

$$\Box\phi \quad \text{gdw} \quad \forall a : R(\mathtt{SELF}, a) \rightarrow a \Vdash \phi,$$

und wo die Relation R eine Äquivalenzrelation darstellt (im Fall von **S4** müsste R reflexiv und transitiv sein, usw.). Der Punkt ist hier, dass Modalität in einer Sprache wie $\mathsf{FLAT_a}$ von Vornherein in einem völlig anderen Sinn aufgefasst wird, wie in klassischen Systemen. Wir *definieren* Modallogik nicht als eine Menge von Axiomensystemen für $\mathsf{MOD_a}$ (wir haben in der *Syntax* der Sprache keine *modalen Operatoren*, sondern *stattdessen* die flache Modellbeziehung u. dgl.), sondern wir *definieren sie als flache Semantik*. Modalität *ist* in diesem Sinn *nichts anderes* als Quantifizieren über mögliche Welten (Strukturen). Wenn man so will: flache Semantiken befreien die klassische Kripke-Semantik von axiomatischen Altlasten.

[16]Vgl. Blackburn et al. (2001, Abschnitt 4.4).

1.2.4 Die modale Prädikatenlogik erster Stufe $\mathsf{FLAT_p}$

Wir definieren $\mathsf{FLAT_p}$ als flache Semantik über $\mathsf{FIN_p}$, nach exakt dem selben Schema wie $\mathsf{FLAT_a}$ als flache Semantik über $\mathsf{FIN_a}$ definiert wurde.

Eine *Domänensignatur* $\mathfrak{D}_q = (D, \mathcal{P}_D, \mathcal{P}_{\mathbb{A}})$ besteht aus einer endlichen und nichtleeren Domänenmenge[17] D, sowie aus zwei disjunkten Mengen von Prädikatenkonstanten $\mathcal{P}_D$ und $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$. $\mathcal{P}_D$ liefert die Prädikate über D, $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ hingegen diejenigen über der Menge $\mathbb{A}_p$ aller, im Stil von Abschnitt 1.2.2 definierten, prädikatenlogischen Strukturen über $(D, \mathcal{P}_D)$. Eine *modale Struktur* $\mathfrak{M}$ ist erneut definiert als eine Abbildung, die allen Prädikaten aus $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ entsprechende Relationen über $\mathbb{A}_p$ zuordnet. Wie oben definieren wir außerdem eine *Ontologie* $\mathfrak{O}_p = (\mathfrak{D}_q, \mathfrak{M})$ als Domänensignatur $\mathfrak{D}_q$ plus eine darüber definierte modale Struktur $\mathfrak{M}$ und nehmen an, dass stets eine solche Ontologie fix vorgegeben ist.

Wir führen abzählbar viele Variablen $x, x', \ldots$ (für die Sorte D) und $a, a', \ldots$ (für die Sorte $\mathbb{A}_p$) ein, alle Elemente von D identifizieren wir mit Konstanten $c, c', \ldots$, alle Elemente von $\mathbb{A}_p$ mit Konstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ So definierte D-Terme bezeichnen wir mit $\tau_D, \tau'_D, \ldots$, $\mathbb{A}_p$-Terme mit $\tau_{\mathbb{A}}, \tau'_{\mathbb{A}}, \ldots$ Wie oben ist `SELF` als zusätzliche $\mathbb{A}_p$-Konstante definiert, mit den entsprechenden Regeln für $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}')$, etc.

Gegeben $P \in \mathcal{P}_D$ mit $P = n$ ist jedes $P(\tau_{D1}, \ldots, \tau_{Dn})$ eine atomare Formel. Analog ist für $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ mit $P = n$ jedes $P(\tau_{\mathbb{A}1}, \ldots, \tau_{\mathbb{A}n})$ als atomare Formel definiert. Für beliebige Terme $\tau_D, \tau'_D, \tau_{\mathbb{A}}, \tau'_{\mathbb{A}}$ sind $\tau_D \equiv \tau'_D$ und $\tau_{\mathbb{A}} \equiv \tau'_{\mathbb{A}}$ atomare Formeln. Wir definieren die Syntax, mit atomaren Formeln p:

$$\phi ::= p \mid \forall x \phi \mid \forall^* x \phi \mid \forall a \phi \mid \neg \phi \mid \phi \wedge \phi \mid \tau_{\mathbb{A}} \Vdash \phi.$$

Die Definitionen für $\neg$ und $\wedge$ erfolgen analog zum aussagenlogischen Fall. Für alle atomaren Formeln $P(\bar{\tau}_D)$ und $P'(\bar{\tau}_{\mathbb{A}})$, wo die $\bar{\tau}_D, \bar{\tau}_{\mathbb{A}}$ passende Konstanten-

[17] Eine naheliegende Option wäre hier, aufseiten der Domänenmenge Mehrsortigkeit zuzulassen, also anstelle einer einzelnen Domänenmenge D eine Menge von Mengen anzugeben. Um die Sprachkonstruktion zu vereinfachen verzichten wir hier jedoch auf diese Option. Vgl. jedoch unten, Kapitel 2 und die dortigen mehrsortigen Präsentationen.

vektoren sind, alle $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_p$ mit $\mathfrak{A} = (\alpha, D_\exists)$, alle $\mathbb{A}_p$-Konstanten $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$, sowie alle D-Konstanten c, c' gilt:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models P(\bar{\tau}_D) & \text{gdw} & \bar{\tau}_D \in \alpha(P). \\
\mathfrak{A} \models P'(\bar{\tau}_{\mathbb{A}}) & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\bar{\tau}_{\mathbb{A}}) \in \mathfrak{M}(P'). \\
\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}'' & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}''). \\
\mathfrak{A} \models c \equiv c' & \text{gdw} & c, c' \in D_\exists \text{ und } c = c'. \\
\mathfrak{A} \models \forall x \phi & \text{gdw} & D_\exists = \emptyset \text{ oder für alle } c \in D_\exists \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \\
\mathfrak{A} \models \forall^* x \phi & \text{gdw} & \text{für alle } c \in D \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \\
\mathfrak{A} \models \forall a \phi & \text{gdw} & \text{für alle } \mathfrak{A}^* \in \mathbb{A}_a \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{\mathfrak{A}^*}{a}\right]. \\
\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}' \Vdash \phi & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\mathfrak{A}') \models \phi.
\end{array}
$$

Es gilt Entscheidbarkeit von Erfülltheit und Gültigkeit, wie erneut im Anhang A gezeigt wird.

Quantifizierte Modallogik mit fixer und mit variabler Domäne Die Sprache FLAT_p implementiert den Fall einer Modallogik mit variabler Domäne.[18] Zentrales Merkmal einer solchen Sprache ist die Ungültigkeit der Barcan-Formeln[19]:

$$
\begin{array}{l}
\forall x \Box \phi \rightarrow \Box \forall x \phi \\
\Box \forall x \phi \rightarrow \forall x \Box \phi.
\end{array}
$$

Eine Sprache mit fixer Domäne hätte die prinzipielle Eigenschaft, dass man dort wahre Aussagen über nichtexistierende Gegenstände machen kann, wenn man in ihr ein Existenzprädikat als beliebiges einstelliges Prädikat $E(x)$ definiert. Es könnte dann in einigen Strukturen gelten:

(NE) $L(e) \wedge \neg E(e)$ („e hat das Merkmal L und existiert nicht.“)

[18]Einen Überblick über klassische Systeme der quantifizierten Modallogik vermittelt Garson (2001). Vgl. außerdem Fitting & Mendelsohn (1998).

[19]Diese Ungültigkeit lässt sich sehr leicht anhand von Gegenbeispielen zeigen. Vgl. Kripke (1963).

Beispielsweise könnte L für „Ludwig verehrt x“ stehen und e für „Elvis“. Da Elvis tot ist, also nicht existiert, verehrt Ludwig einen nichtexistierenden Gegenstand, es gilt also (NE). Im Fall der variablen Domäne ist dies nicht möglich, wenn man ein Existenzprädikat in naheliegender Weise (wie oben) definiert als:

$$E(c) \quad \text{gdw} \quad \exists x : x \equiv c.$$

Das heißt: Sprachen mit variabler Domäne unterstützen eine bestimmte Form von *restriktiven* Ontologien, in denen alle atomaren Aussagen über nichtexistierende Gegenstände immer falsch sind. (Nicht restriktive Ontologien kann man hier banaler Weise so implementieren, dass man sich auf diejenigen Strukturen beschränkt, deren Domänenmenge $D_\exists$ gleich der Gesamtdomäne D ist.)

Ein besonderes Feature ist der Quantor $\forall^*$, mit dem man in jeder Struktur über die Gesamtdomäne, also über alle Elemente von D quantifiziert. In diesem Fall gilt die Barcan-Formel:

$$\forall^* x \Box \phi \leftrightarrow \Box \forall^* x \phi.$$

Beweis: $\Box\phi$ sei definiert als

$$\forall a : R(\texttt{SELF}, a) \rightarrow a \Vdash \phi.$$

Dann wird, durch die Relation R, auf der linken und der rechten Seite die selbe Menge W von Strukturen bestimmt, in denen die Formel ϕ jeweils auszuwerten ist. Auf der linken und auf der rechten Seite wird durch $\forall^*$ aber auch die selbe Menge D von Objekten als Substitutionsrahmen für ϕ bestimmt. Somit wird auf beiden Seiten jeweils in allen Strukturen aus W das ϕ in allen Substitutionen mit Elementen aus D ausgewertet, die beiden Formelseiten sind also äquivalent. $\Box$

1.2.5 Die intentionale Logik INT_a

Was sind intentionale Zustände? Gegeben eine extensionale Ontologie, die alle Aspekte raumzeitlicher Vorgänge umspannt, können bestimmte raumzeitliche Objekte identifiziert werden, die bestimmte Fähigkeiten, Merkmale besitzen, die über den gewöhnlichen Rahmen raumzeitlicher Merkmale, wie Farbe, Klang, Härte, magnetisches Feld hinaus gehen. Es sind dies Merkmale, die man in dem klassischen durch Franz Brentano eingeführten Sinn, als *intentionale Zustände* bezeichnen kann.[20] Beispiele: ein Subjekt s (ein Mensch, ein Tier, ein Computer) glaubt, weiß, vermutet, hofft, dass p; es liebt, hasst ein a; es gibt einem a einen Namen z; es bezieht sich mit indexikalischen Ausdrücken, wie ich, du, hier, dort, jetzt, gestern, etc. auf Objekte; es plant p oder versucht p zu vermeiden; es schreibt vor, dass p verboten, geboten, gut oder schlecht, schön oder hässlich ist. Neben Einzelsubjekten können solche intentionalen Zustände auch hinsichtlich ganzer Subjektgruppen klassifiziert und analysiert werden, und sie können verschachtelt sein, wie in dem Beispiel: Richard weiß, dass Anna glaubt, dass sie Richard hasst, er weiß aber auch, dass sie ihn liebt, dass sie glaubt dass er sie liebt, er hasst sie aber. Thematisiert werden intentionale Zustände etwa in modalen, epistemischen und deontischen Logiken[21]

Die Sprache Eine intentionale Sprache erlaubt Prädikate, die sich auf Formeln, Domänenobjekte einer Grundsprache und andere Dinge beziehen. Die Idee ist, dass intentionale Sprachen überall dort zum Zug kommen, wo flache Semantiken ein *zu restriktives* Modell darstellen, bzw. wo eine Definition passender Operatoren im Kontext einer flachen Semantik nicht möglich wäre.

Eine intentionale Sprache könnte irgendeine der vier oben definierten Sprachen als „Grundsprache“ enthalten. Wir entscheiden uns willkürlich für die Aus-

[20] Vgl. Brentano (1874, S. 124ff.).

[21] Vgl. die einschlägige Literatur über epistemische, deontische und ähnliche Logiken, etwa Fagin et al. (1995), Lenzen (1980), die einschlägigen Kapitel in Jacquette (2002) und Goble (2001), sowie Zalta (1988).

sagenlogik $\mathsf{FIN_a}$ als Grundsprache (den allgemeinen Fall einer intentionalen Logik beschreiben wir unten, S. 44).

Die Sprache $\mathsf{INT_a}$ ist definiert, anhand einer Domänensignatur $\mathfrak{D}_i = (A, \mathcal{P})$, wobei A eine endliche Aussagenmenge ist, mit der entsprechenden Menge $\mathbb{A}_a := \wp(A)$ aller Strukturen über A. $\mathcal{P}$ ist eine endliche Menge von Prädikaten beliebiger endlicher Stellenzahl – die *intentionalen Prädikate* der Sprache, also Prädikate wie „Karl glaubt“ u. dgl. – Die Syntax der Sprache ist so definiert:

$$\phi ::= \; p \mid \# \phi, \ldots, \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Dabei steht p für Aussagenkonstanten aus A, # steht für Elemente von $\mathcal{P}$ und $\phi, \ldots, \phi$ für Formelfolgen der passenden Stellenzahl. Mit $\mathbb{I}$ bezeichnen wir die Menge aller Formeln des Typs $\# \phi, \ldots, \phi$. (Im Fall dass $\mathcal{P}$ ein einziges einstelliges Element enthält ist die Formelmenge von $\mathsf{INT_a}$ gleich der Formelmenge $\mathsf{MOD_a}$.)

Eine *intentionale Struktur* $\mathfrak{I}$ ist definiert als *endliche* Teilmenge $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{A}_a$. Eine Ontologie $\mathfrak{O}_i = (\mathfrak{D}_i, \mathfrak{I})$ soll hier erneut eine intentionale Domänensignatur und eine intentionale Struktur fix vorgeben. Wir definieren, für ein fixes $\mathfrak{I}$, für alle $\mathbb{A}_a$-Strukturen $\mathfrak{A}$, alle Aussagenkonstanten p, alle $\# \bar{\phi} \in \mathbb{I}$ und alle Formeln ϕ, ψ:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models \phi_p & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models_p \phi_p \\
\mathfrak{A} \models \# \bar{\phi} & \text{gdw} & (\# \bar{\phi}, \mathfrak{A}) \in \mathfrak{I} \\
\mathfrak{A} \models \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \models \phi \\
\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi.
\end{array}$$

Auch $\mathsf{INT_a}$ ist, wie man leicht sieht, entscheidbar, wir verzichten jedoch auf die Angabe eines entsprechenden Resolutionsalgorithmus. $\mathsf{INT_a}$ ist keine finitistische Sprache (im Sinne der obigen Explikation), da die Menge aller intentionalen Strukturen stets unendlich ist. Dies ist einer der Gründe warum wir den Begriff einer finitistischen Sprache im Folgenden modifizieren werden (sodass insbesondere auch $\mathsf{INT_a}$ als finitistische Sprache gilt).

1.3 Ein einheitliches Rahmenwerk für philosophische Logiken

Die klassische reduktionistische Option in der Logik ist die einer Reduktion logischer Systeme auf die Prädikatenlogik erster Stufe.[22] Reduktion bedeutet, wie dieses Beispiel zeigt, hier stets auch *Reduktion der Ausdrucksstärke*. Die von Leon Henkin entwickelte Semantik für typenlogische Sprachen[23] reduziert diese Sprachen auf eine Prädikatenlogik erster Stufe, indem sie jeden Typ der Sprache, so wie den Grundtyp von Individuen, *auf eine fixe Menge (von Relationen oder Funktionen)* beschränkt. Dadurch wird Typenlogik zu einem Spezialfall einer *mehrsortigen Sprache der ersten Stufe*. Sie verliert dadurch aber zugleich ihre typenlogische Ausdruckskraft. Dadurch dass jedoch, gemäß der Sätze von Lindström, die Prädikatenlogik erster Stufe *die ausdrucksstärkste Sprache* ist, die bestimmte Minimalfeatures wie Aufzählbarkeit der Menge der gültigen Formeln u. dgl. besitzt[24], wird die gewissermaßen „first order"-beschränkte Version einer Typenlogik (und jeder anderen in einer passenden Weise reduzierbaren Logik) zu dem interessanteren Fall. – Modelltheoretische Fundamentaltheoreme geben somit ein starkes Argument für die Wahl einer reduktionistischen Strategie gerade auf einer „first order"-Basis.

Warum aber treibt man das Spiel nicht weiter und reduziert alle Logiken nicht bloß auf eine Prädikatenlogik erster Stufe, sondern gleich auf eine *Aussagenlogik* mit ihrer signifikant einfacheren Konstruktion und dem einschneidenden Vorteil der *Entscheidbarkeit*? – Die Antwort ist ziemlich banal. In der Prädikatenlogik erster Stufe lässt sich zwar eine überabzählbare Menge wie die Menge der reellen Zahlen nicht *charakterisieren* – wir sind nicht in der Lage die Menge anhand von „first order"-Axiomen zu *definieren*. Dennoch spricht nichts dagegen, von Struk-

[22]Für eine rezente Darstellung unterschiedlichster Logiken in einem „first order"-Rahmenwerk vgl. etwa Manzano (1996).

[23]Vgl. Henkin (1950), sowie unten, Abschnitt 2.1.1.

[24]Zu den Sätzen von Lindström vgl. Ebbinghaus et al. (1996, Kapitel XIII).

turen zu reden, deren Domänenmenge jede beliebige Größe haben kann (in mengentheoretischen Grenzen). Die *Klasse aller Strukturen* $\mathbb{A}$ bezieht ihre Domänen also aus der *Klasse aller Mengen* $\mathcal{M}$. Eine Aussagenlogik, die die Prädikatenlogik erster Stufe „ausdrückt", müsste also eine Aussagenmenge besitzen, die so etwas wie alle Prädikatenbelegungen mit allen Elementen aus allen Mengen aus $\mathcal{M}$ enthält, was aus elementaren mengentheoretischen Gründen unmöglich ist.

Mit anderen Worten: eine solche Reduktion scheitert daran, dass die Ontologie einer Prädikatenlogik erster Stufe *zu wenig restriktiv* ist für eine Reduktion auf die Aussagenlogik. Und – und das ist der entscheidende Punkt für die hier anstehenden Überlegungen – sie scheitert *nur* an diesem Umstand! Setzen wir also eine Sprache mit hinreichender Restriktion, etwa mit *fixer Domäne* an, so ist die Reduktion möglich. Mehr noch: es ist geradezu ein substanzielles Merkmal von Sprachen mit fixer respektive endlicher Domäne, dass man sie auf eine Aussagenlogik reduzieren *kann*. Deshalb wird *die Aussagenlogik* hier als einheitliches Rahmenwerk für philosophische Logiken vorgeschlagen.

Wir präsentieren im Folgenden eine alternative Definition von starren und finitistischen Sprachen. Dass die obige erste Explikation von finitistischen Sprachen als Sprachen mit endlicher Strukturmenge zu wenig präzise ist, zeigt sich alleine darin, dass bei flachen Semantiken wie $\mathsf{FLAT_a}$ und $\mathsf{FLAT_p}$ und bei intentionalen Sprachen wie $\mathsf{INT_a}$ Strukturbegriffe auf zwei unterschiedlichen Ebenen (in einer Grundsprache und einer darüber konstruierten intensionalen Sprache) definiert sind. Überdies wäre im Fall von $\mathsf{INT_a}$ die Menge aller (intentionalen) Strukturen stets unendlich (dies obwohl die Sprache einen anschaulich finitistischen Touch besitzt).

Definition 1 Eine Sprache, die definiert ist als Formelmenge $\mathcal{F}$ plus eine Menge $\mathbb{A}$ von Strukturen und eine Erfülltheitsrelation $\vDash$ zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathbb{A}$ heißt *starr*, wenn folgendes gilt: es existiert eine Menge $\mathcal{F}_{\mathbf{at}} \subseteq \mathcal{F}$, für die die Formelmenge $\mathcal{F}^*$ definiert ist als:

$$\phi ::= \phi_{\mathbf{at}} \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \qquad (\phi_{\mathbf{at}} \in \mathcal{F}_{\mathbf{at}}),$$

sodass $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ gilt. Mit $\vDash_a$ bezeichnen wir die im Sinne von $\mathsf{FIN_a}$ definierte aussagenlogische Erfüllltheitsrelation zwischen $\wp(\mathcal{F}_{\mathbf{at}})$ und $\mathcal{F}^*$. Dann existiert eine Abbildung Θ, die jeder Struktur $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ zuordnet (also eine aussagenlogische Struktur) und es gilt, für alle Formeln ϕ:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi \quad \text{gdw} \quad \Theta(\mathfrak{A}) \vDash_a \phi.$$

Existiert ein endliches $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ in diesem Sinn, so heißt die starre Sprache *finitistisch*.

Satz 2 Die oben definierten Sprachen $\mathsf{FIN_a}, \mathsf{FIN_p}, \mathsf{FLAT_a}, \mathsf{FLAT_p}$ und $\mathsf{INT_a}$ sind finitistisch, im Sinne von Definition 1.

Für den Beweis dieses Satzes müssen einige der genannten Sprachen redefiniert werden, wobei wir jedoch zeigen, dass diese Redefinitionen keinerlei substanzielle Veränderungen bedeuten.

$\mathsf{FIN_a}$ ist trivialer Weise finitistisch. Für $\mathsf{FIN_p}$ setzen wir als $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$, wie in dem Beweis von Korollar 1 bereits demonstriert, die Menge aller konstantenbelegten Prädikatenformeln an plus die Menge aller Belegungen des Existenzprädikates E mit Konstanten. Die Abbildung Θ können wir dann sofort in naheliegender Weise definieren: für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (D_\exists, \alpha)$, alle $P(\mathbf{c})$ und alle $E(c)$ gilt:

$$P(\mathbf{c}) \in \Theta(\mathfrak{A}) \quad \text{gdw} \quad \mathbf{c} \in \mathfrak{A}(P)$$
$$E(c) \in \Theta(\mathfrak{A}) \quad \text{gdw} \quad c \in D.$$

Dann müssen wir die Formelmenge $\mathcal{F}_{\mathsf{p}}$ zunächst in bestimmter Weise bereinigen. Wir entfernen alle quantifizierten Formeln, was keine substanzielle Veränderung darstellt, da man $\forall x\phi$ äquivalent in folgender Weise *definieren* kann, gegeben eine Auflistung $c_1, \ldots, c_n$, die für genau jedes Element der Domäne D eine Konstante enthält:

$$\forall x\phi := \left(E(c_1) \to \phi\left[\frac{c_1}{x}\right]\right) \wedge \ldots \wedge \left(E(c_n) \to \phi\left[\frac{c_n}{x}\right]\right).$$

Außerdem definieren wir, für alle Identitätsformeln $c \equiv c$ und $c \equiv c'$ mit $c \neq c'$:

$$c \equiv c \; := E(c),$$
$$c \equiv c' := \bot,$$

wobei $\bot$ eine beliebige Kontradiktion ist. Gegeben diese Restriktionen zeigt sich, dass $\mathcal{F}^*$ tatsächlich identisch ist mit der so restringierten Formelmenge von $\mathsf{FIN_p}$. Dass auch semantische Äquivalenz besteht folgt dann sofort.

Bei $\mathsf{FLAT_a}$ und $\mathsf{FLAT_p}$ muss man anders vorgehen, bei der Wahl der Menge $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$. Im Fall von $\mathsf{FLAT_a}$ definieren wir, gegeben AT als Menge aller Aussagenkonstanten aus A plus alle konstantenbelegten Prädikatenformeln $P(\bar{\mathfrak{A}})$:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{at}} := \{\mathfrak{A} \Vdash p \mid p \in AT \text{ und } \mathfrak{A} \in \mathbb{A}_a\}$$

Gegeben eine modale Struktur $\mathfrak{M}$ definieren wir dann Θ in passender Weise: ein $\mathfrak{A} \Vdash a$ ist genau dann enthalten in $\Theta(\mathfrak{M})$, wenn $a \in \mathfrak{A}$ gilt, ein $\mathfrak{A} \Vdash P(\bar{\mathfrak{A}})$ genau dann wenn $\bar{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}(P)$ gilt.

Dann eliminieren wir wie oben den Allquantor und Identität aus der Formelmenge $\mathcal{F}_{\mathsf{m}}$. Wir reduzieren außerdem $\mathcal{F}_{\mathsf{m}}$ auf alle Formeln der Form $\mathfrak{A} \Vdash \phi$, was keine Beschränkung bedeutet, da $\mathfrak{A} \Vdash \phi$ äquivalent ist mit $\mathfrak{A} \models \phi$. Nun enthält die resultierende Formelmenge $\mathcal{F}'_{\mathsf{m}}$ nurmehr flache Modellbeziehungen und Konjunktionen und Negationen, sowie Formeln aus $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$. Wir transformieren alle Formeln aus $\mathcal{F}'_{\mathsf{m}}$ in einem letzten Schritt, durch sukzessives Anwenden der Regeln:

$$\Theta(\mathfrak{A} \Vdash \neg\phi) := \neg\mathfrak{A} \Vdash \phi,$$
$$\Theta(\mathfrak{A} \Vdash \phi \wedge \psi) := \mathfrak{A} \Vdash \phi \wedge \mathfrak{A} \Vdash \psi.$$

Damit sieht man sofort, dass das resultierende $\mathcal{F}'_{\mathsf{m}}$ gleich dem $\mathcal{F}^*$ im oben definierten Sinn ist.

Im Fall von $\mathsf{FLAT_p}$ ist die Vorgangsweise analog wie bei $\mathsf{FLAT_a}$.

Bei $\mathsf{INT_a}$ ist die Beweisidee die, dass man $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ bildet, als Menge aller Aussagenkonstanten aus A plus alle Formeln $\#\bar{\phi}$, für die eine Struktur $\mathfrak{A}$ existiert mit $(\#\bar{\phi}, \mathfrak{A}) \in \mathfrak{I}$. Dann reduziert man die Formelmenge wie oben und man entfernt zusätzlich alle $\#\bar{\phi}$, die nicht in der Menge $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ enthalten sind, indem man sie alle durch eine Kontradiktion $\bot$ ersetzt. Der Rest des Beweises erfolgt wie oben. $\square$

Die Konsequenz ist folgende: wir haben die oben eingeführten Sprachen FIN_a, FIN_p, etc. aus Anschaulichkeitsgründen mit Sprachelementen wie Quantoren beispielsweise versehen, die keine substanzielle semantische Funktion besitzen (Quantoren kann man sofort durch endliche Konjunktionen bzw. Disjunktionen ersetzen). Entfernt man solche „inessenziellen" Bestandteile, dann ergibt jede der oben definierten Sprachen ein aussagenlogisches Bild, da sie als Menge $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ von atomaren Formeln dargestellt werden kann, über der eine Aussagenlogik im Stil von FIN_a definiert ist. Dies gilt insbesondere für den Fall einer flachen Semantik, da man dort einfach die passenden $\mathfrak{A} \Vdash p$ als atomare Formeln ansetzen kann. Namentlich in diesem Fall sieht man sofort, wie sich *die Komplexität* einer solchen Sprache errechnet: die Mächtigkeit von $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ ist gleich dem Produkt aus der Mächtigkeit der Strukturmenge der *Grundsprache* (also FIN_a oder FIN_p) mit der Mächtigkeit der Menge der atomaren Formeln AT. Mit $n = |\mathcal{F}_{\mathbf{at}}|$ folgt dann, dass es in der Sprache genau 2^{2^n} nicht logisch äquivalente Formeln gibt.

Intensionale Logiken Das eben definierte aussagenlogische Rahmenwerk für (finitistische) Logiken ist äußerst flexibel und sollte hinsichtlich bestimmter Sonderfälle konkretisiert werden. Der wichtigste derartige Sonderfall ist sicher der einer *flachen Semantik*, wo über Strukturen einer Grundsprache quantifiziert wird. Wir definieren:

Definition 2 Eine *flache Semantik* $\mathsf{FLAT}_\mathcal{L}$ basiert auf einer finitistischen *Grundsprache* $\mathcal{L}$, mit der Formelmenge $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ und der endlichen Strukturmenge $\mathbb{A}_\mathcal{L}$, über der die Erfülltheitsrelation $\vDash_\mathcal{L}$ definiert ist. Darauf ist eine *modale Sprache* aufgebaut, die durch eine endliche Menge AT von *atomaren Formeln* repräsentiert ist (diese Formeln können beispielsweise konstantenbelegte Prädikate über der Menge $\mathbb{A}_\mathcal{L}$ enthalten). Die Formelmenge $\mathcal{F}$ von $\mathsf{FLAT}_\mathcal{L}$ selbst ist dann so definiert:

$$\phi ::= \ p \mid \phi_\mathcal{L} \mid \mathfrak{A} \Vdash \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi,$$

wobei p für atomare Formeln aus AT steht, $\phi_\mathcal{L}$ für Formeln aus $\mathcal{F}_\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ für Strukturen aus $\mathbb{A}_\mathcal{L}$ und $\Vdash$ für die übliche *flache Modellbeziehung*. – Mit $\mathbb{M}$ bezeichnen wir die Menge aller aussagenlogischen Strukturen über AT. Eine *Ontologie*

$\mathfrak{O}_\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \mathfrak{M})$ ist definiert als die Grundsprache $\mathcal{L}$ plus eine fix vorgegebene modale Struktur $M \in \mathbb{M}$. Gegeben die übliche Definition der Junktoren $\neg, \wedge$, definieren wir für ein fixes $\mathfrak{M} \in \mathbb{M}$, alle $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_\mathcal{L}$, alle $\phi_\mathcal{L} \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$ und alle $p \in AT$:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models p & \text{gdw} & p \in \mathfrak{M} \\ \mathfrak{A} \models \phi_\mathcal{L} & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models_\mathcal{L} \phi_\mathcal{L} \\ \mathfrak{A} \models \mathfrak{A}' \Vdash \phi & \text{gdw} & \mathfrak{A}' \models \phi. \end{array}$$

Es ist unmittelbar klar, dass flache Semantiken im Sinne von Definition 2 finitistische Sprachen im Sinne von Definition 1 sind. Weiters sieht man leicht, dass FLAT_a und FLAT_p flache Semantiken sind, bzw. durch triviale Modifikationen als flache Semantiken im Sinne von Definition 2 dargestellt werden können. Auf einen detaillierten Beweis sei hier jedoch verzichtet.

Beispiele aus dem Bereich der epistemischen und deontischen Logik zeigen, dass nicht alle semantischen Ansprüche durch flache Semantiken erfüllt werden können, weshalb wir in der Sprache INT_a eine Sprache eines allgemeineren Typs eingeführt haben. Diese einfache Sprachkonstruktion kann sehr leicht verallgemeinert werden zu folgender Definition:

Definition 3 Eine *intentionale Logik* $\mathsf{INT}_\mathcal{L}$ wird wie oben definiert, über einer finitistischen Grundsprache $\mathcal{L}$ mit der Formelmenge $\mathcal{F}_\mathcal{L}$, der Strukturmenge $\mathbb{A}_\mathcal{L}$ und der Erfülltheitsrelation $\models_\mathcal{L}$. Hinzu kommt eine endliche Menge $\mathcal{P}$ von Prädikaten endlicher Stellenzahl – den *intentionalen Prädikaten* von $\mathsf{INT}_\mathcal{L}$. Die Formelmenge der Sprache ist dann so definiert:

$$\phi ::= \ \phi_p \mid \#\phi, \ldots, \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi,$$

wobei ϕ_p für Formeln aus $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ steht und $\#\phi, \ldots, \phi$ für intentionale Prädikate mit passender Folge von Formeln als Argumente. Erneut bezeichnet $\mathbb{I}$ die Menge aller Formeln des Typs $\#\phi, \ldots, \phi$ und eine *intentionale Struktur* $\mathfrak{I}$ ist definiert als *endliche* Teilmenge $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{A}_\mathcal{L}$. Eine intentionale *Ontologie* $\mathfrak{O}_i = (\mathcal{L}, \mathfrak{I})$ besteht wieder aus der Grundsprache $\mathcal{L}$ plus eine intentionale Struktur $\mathfrak{I}$. Gegeben die übliche Semantik für $\neg, \wedge$ definieren wir, für eine fixe Struktur $\mathfrak{I}$, jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$, alle Formeln $\phi_p \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$ und alle Formeln $\#\bar{\phi} \in \mathbb{I}$:

$$\mathfrak{A} \models \phi_p \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \models_p \phi_p$$

$$\mathfrak{A} \models \#\bar{\phi} \quad \text{gdw} \quad (\#\bar{\phi}, \mathfrak{A}) \in \mathfrak{I}.$$

Zu beachten ist hier insbesondere, dass die Menge aller intentionalen Strukturen einer solchen Sprache jedenfalls *unendlich* ist, es wäre also nicht möglich finitistisch über diese Strukturenmenge zu quantifizieren, bzw. eine flache Semantik über einer intentionalen Logik aufzubauen. Nichtsdestotrotz sind intentionale Logiken im Sinne von Definition 3 aber, wie man sofort sieht, stets finitistische Sprachen.

Kapitel 2

Auf der Suche nach der besten aller möglichen Logiken

2.1 Checkliste: Merkmale einer „Superlogik“

Im Stil der in der Einleitung, Kapitel 0 skizzierten Programmatik, soll hier ein Beispiel für eine „Superlogik“ entwickelt werden. Folgendes ist die Liste der Leistungsmerkmale, mit der die im Abschnitt 2.2 präsentierte Sprache SUP versehen sein wird:

(1) Finitistische Sprache

(2) Flache Semantik

(3) Intentionale Zustände

(4) Mehrsortigkeit

(5) Ein flexibler Funktionenkalkül

(6) Definite Deskriptionen und λ-Abstraktionen

(7) Mereologische Strukturen

Die ersten drei Punkte dieser Liste wurden bereits oben besprochen. Punkt (4) bis (7) wollen wir nun einer eingehenderen Diskussion unterziehen.

2.1.1 Sorten versus Typen ($\mathsf{FIN}_\mathsf{t}, \mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$ und FIN_s) ☞ ad (4)

Es scheint einiges dafür zu sprechen, dass eine historische Wurzel der Prädikatenlogik erster Stufe in der grammatischen Unterscheidung zwischen Subjekt und Prädikat von Sätzen zu suchen ist. Dennoch ist die Frage berechtigt, ob dieser Bezug irgendetwas von Substanz über den Charakter dieses logischen Systems aussagt. Eine große Anzahl philosophischer Interpreten suggerieren, dass dies der Fall ist. Nur als ein Beispiel sei die Programmatik von D. M. Armstrong erwähnt, die darauf hinauszulaufen scheint, dass man in der Unterscheidung zwischen Prädikaten und Individuenkonstanten so etwas wie die klassische Universalienproblematik verorten kann.[1]

Wie gehaltvoll sind solche ontologischen Interpretationen? – Ein klassisches auf Quine (1980b) zurückgehendes Beispiel legt die Vermutung nahe, dass hier letztlich nicht viel dahinter steckt, da es die *Austauschbarkeit* von Individuenkonstanten und Prädikaten demonstriert. Bezeichnet p so etwas wie Pegasus und F so etwas wie „ist ein geflügeltes Pferd“, dann fasst man die entsprechende Aussage „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“ gerne als atomare Formel $F(p)$ auf, wo F ein einstelliges Prädikat ist, und p eine Individuenkonstante. Quine schlägt dagegen eine Art von „Sprachreform“ vor, in der Individuenkonstanten prinzipiell durch Prädikate ersetzt werden, also p für „Pegasus“ zu ersetzen wäre durch P für „ist Pegasus“, bzw. „pegasusst“. Gegeben die Möglichkeit mit $\iota x.\phi$ das definite Individuum herauszupicken, das die Formel ϕ erfüllt (vgl. Abschnitt 2.1.3), würde der Quine-normalisierte Satz so aussehen:

$$F(\iota x.P(x)).$$

Was dieses Beispiel illustriert ist, dass einige Willkür bei der Frage eine Rolle spielen muss, wie man die in einer Logik zu formalisierenden Entitäten auf Prädikate und Individuenkonstanten „verteilt“. Um diese Willkür ein Ende zu setzen schlägt Quine eine Sprache vor, die ganz auf Indidividuenkonstanten verzichtet.

[1]Vgl. Armstrong (1978, Kapitel 1).

Wir wollen dem Kern dieses Quineschen Prinzip hier folgen, also annehmen, dass eine Sprache sinnvoller Weise keine künstlichen ontologischen Gräben zwischen Individuen und Prädikaten aufziehen sollte. Die Detailargumentation wird jedoch sehr weit von der Quineschen abweichen. Die Idee ist eher die, dass wir eine Prädikatenlogik nicht ohne Individuenkonstanten, sondern *ohne Prädikate* konstruieren können (und sollten), bzw. – etwas weniger paradoxistisch formuliert – dass bei einer weniger an historischen Altlasten orientierten formalen Konzeption *die Unterscheidung zwischen Prädikaten und Individuenkonstanten* schlicht hinfällig wird.

Wir demonstrieren dies zunächst anhand eines einfachen Beispiels, um dann zu zeigen, wie man die klassische Option einer *verallgemeinerten* Prädikatenlogik – also eine Typenlogik – in sehr eleganter Weise als mehrsortige Prädikatenlogik *darstellen* kann. Der mehrsortige Fall erweist sich vor diesem Hintergrund nicht nur als der formal elegantere, sondern auch als der mit den größeren philosophischen Vorzügen.[2]

Prädikatenlogik ohne Prädikate: jenseits der „first order thesis“ Wir illustrieren, wie man eine Prädikatenlogik so konzipieren kann, dass *die Entitäten* der Sprache (oder, in anderen Worten: die *nichtlogischen Konstanten*) ausschließlich als Elemente von Domänenmengen auftreten (während Prädikate den Charakter von *logischen Konstanten* erhalten).

Wir gehen aus von der Sprache $\mathsf{FIN_p}$ und einer Domänensignatur $(D, \mathcal{P})$, wobei $\mathcal{P}$ der Einfachheit halber nur ein- und zweistellige Prädikate enthalten soll (mehrstellige Prädikate können als Kombinationen zweistelliger Prädikate eingeführt werden). Mit $\mathbf{P}^1$ sei die Menge der einstelligen, mit $\mathbf{P}^2$ die der zweistelligen Prädikate aus $\mathcal{P}$ bezeichnet. Dann definieren wir eine *mehrsortige* Sprache mit den Sortenmengen $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, D$ (für eine formal präzisere Darstellung vgl. die Sprache $\mathsf{FIN_s}$, unten, S. 54). Diese Sprache enthalte dann bloß *zwei Prädikate* P_a und P_b,

[2] Zur Logik höherer Stufe vgl. van Benthem & Doets (2001), Shapiro (2005a), zur mehrsortigen Logik Enderton (2001, S. 295-299). Vgl. außerdem die einleitenden Bemerkungen zu Abschnitt 1.3, oben.

wobei das erste als *zweistelliges* Prädikat über $(\mathbf{P}^1, D)$ definiert ist und das zweite als *dreistelliges* Prädikat über $(\mathbf{P}^2, D, D)$.

Das hervorstechende Merkmal einer derartigen Sprache ist, dass die Dinge, die gewöhnlich (in der Grundmenge $\mathcal{P}$) durch Prädikate repräsentiert werden (also „Merkmale" wie „ist blau" oder „ist Pegasus" oder „ist der gegenwärtige König von Frankreich") hier in einer Domänenmenge auftauchen. Ist $P(c)$ eine atomare Formel in der Grundsprache $\mathcal{F}_\mathrm{p}$, so sieht das Gegenstück in unserer „mehrsortigen Transformation" so aus:

$$P_a(P, c).$$

Das P_a kann hier sogar weggelassen werden, da die Sprache ohnedies nur genau ein zweistelliges Prädikat enthält. – Atomare Sätze in dieser Sprache sind charakterisiert als geordnete Paare (x, y) oder Tripel (x, y, z), wo das jeweilige x die „Entität" bezeichnet, die in der Ausgangssprache von Prädikaten bezeichnet wurde.

Dieses Beispiel demonstriert und nützt einerseits eine auf Leon Henkin zurückgehende Technik, anhand der man Logiken höherer Stufe als mehrsortige Sprachen der ersten Stufe rekonstruieren kann.[3] Darüber hinaus zeigt es aber insbesondere die Hinfälligkeit oder zumindest Insubstanzialität der klassischen Unterscheidung zwischen Subjekt und Prädikat im Rahmen einer Prädikatenlogik. Eine von klassischen Vorurteilen gereinigte Präsentation führt alle nichtlogischen Entitäten *ausschließlich* als Elemente von Domänenmengen ein. Dies ist gewissermaßen ein *ontologisches Reinheitsgebot*.

So trivial dieses Beispiel auch in formaler Hinsicht ist: es hat schwerwiegende philosophische Konsequenzen für die klassische Quinesche „first order thesis", deren Haltlosigkeit auf dieser Grundlage schlagartig offengelegt wird. Der Punkt ist, dass, gegeben eine so als mehrsortige Sprache explizierte Logik der ersten Stufe, der Schritt von der Logik erster Stufe zu einer Logik zweiter oder höherer Stufe *trivialisiert* wird. Gegeben die Auffassung, dass Prädikate, im Stil

[3] Vgl. Henkin (1950).

von P_a und P_b *nur logische Konstanten sind* (oder, in algebraischer Terminologie: Dimensionsangaben von Vektorräumen), unterscheidet sich eine Logik höherer Stufe *formal* in nichts von einer Logik erster Stufe. – In gewisser Weise sind *alle* so konstruierten Logiken Sprachen *nullter Stufe*, da es gewissermaßen „bedeutungsvolle Elemente" nur im Rahmen von Domänenmengen (also unterhalb der ersten Stufe) gibt. – So „normalisierte" Sprachen sind also in einem ähnlichen Sinn wie die oben, im Kapitel 1 spezifizierten modalen Logiken, Sprachen mit einer „flachen" Semantik.

Weiters demonstriert dieses formallogische „Lehrstück" die bereits mehrfach angesprochene Insubstanzialität der Unterscheidung zwischen der *Domäne* und der *Signatur* einer Sprache. Eine Modifikation der angedeuteten Art zeigt, dass Prädikate und Domänenelemente auch formal *Objekte der selben Art* sind. Im Detail werden die eben illustrierten Zusammenhänge im Folgenden erläutert, anhand der Sprachdefinitionen $\mathsf{FIN}_\mathsf{t}, \mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$ und FIN_s, wobei sich herausstellt, dass die äußerst einfache mehrsortige Sprache FIN_s exakt die selben Ausdrucksmöglichkeiten besitzt, wie die wesentlich komplizierteren, auf einer typenlogischen Konstruktion basierenden Sprachen FIN_t und $\mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$.

Die finitistische Typenlogik FIN_t Wir beschreiben eine finitistische typenlogische Sprache. Der Einfachheit halber definieren wir diese Sprache nicht als flache Semantik und nicht als *free logic*. (Vgl. aber unten, Abschnitt 2.2.)

Die Sprache ist charakterisiert durch eine Domänensignatur $\mathfrak{D}_t = (T, \alpha)$. T ist eine endliche Menge, für die gilt:

(1) $i \in T$.

(2) Für jedes $t \in T$ mit $t \neq i$ existieren $t_1, \ldots, t_n \in T$, sodass
$t = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ gilt ($n \geq 0$).

T ist somit als endliche Teilmenge der wie folgt definierten unendlichen *Typenmenge* **TYP** definiert:

(1) $i \in$ **TYP**.

(2) für alle $t_1, \ldots, t_n \in$ **TYP** ist auch $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in$ **TYP** ($n \geq 0$).

Folgende Interpretation ist dabei naheliegend: T pickt alle *sinnvollen Kombinationen* aus **TYP** heraus, atomare Aussagen über **TYP**, die nicht von T repräsentiert werden, sind immer falsch. – Das heißt: wir konstruieren die Sprache *syntaktisch* als unendliche Typentheorie, picken aber semantisch eine endliche Menge von sinnvollen Kombinationen heraus und gewährleisten so die Vorzüge einer finitistischen Sprache.

Die Abbildung α ordnet dann jedem Element von T eine endliche nichtleere Menge zu. Der fundamentale Typ $\alpha(i)$ ist entsprechend zu interpretieren als eine Menge von *Individuen(konstanten)*. $\alpha(\langle\rangle)$ repräsentiert eine Menge von *Aussagenkonstanten*. Alle anderen Typen $\alpha(\langle t_1, \ldots t_i\rangle)$ sind anschaulich zu interpretieren als Mengen von *Prädikatenkonstanten* (Funktionen lassen wir erneut, im Sinne einer Vereinfachung, weg). Mit $t_\times$ bezeichnen wir die folgendermaßen für jeden Typ definierte Menge:

$t_\times := \alpha(t)$, falls $t = i$ oder $t = \langle\rangle$.

$t_\times := \alpha(t_1) \times \ldots \times \alpha(t_n)$, falls $t = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ mit $n > 0$.

Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ ordnet dem Typ $\langle\rangle$ eine Teilmenge $\mathfrak{A}(\langle\rangle) \subseteq \alpha(\langle\rangle)$ zu. Jedem Typ $t \in T \setminus \{\langle\rangle, i\}$ ordnet $\mathfrak{A}$ außerdem für jedes $c \in \alpha(t)$ eine Menge $\mathfrak{A}(c) \subseteq t_\times$ zu. Mit $\mathbb{A}_t$ bezeichnen wir die Menge aller derartigen Strukturen über T, die natürlich wieder endlich ist. Für alle $t \in \mathbf{TYP} \setminus T$ setzen wir $\alpha(t) := \emptyset$ und $t_\times := \emptyset$.

Wir fassen jede Menge $\alpha(t)$ als Menge von starren Designatoren auf. Alle Konstantenmengen seien paarweise disjunkt. (Man beachte, dass die Menge aller Konstanten insgesamt endlich ist). Für jeden Typ $t \in T$ ist außerdem eine abzählbare Menge von Variablen $x_t, x'_t, \ldots$ definiert. Die Termmenge der Sprache ist dann so definiert:

$\tau ::= \ c \mid x \mid \tau, \tau.$

Also: alle Variablen und Konstanten, sowie beliebige Folgen von Termen sind Terme. Wir definieren die Abbildung Δ, für beliebige Konstanten c_t und Variablen x_t des Typs t und für beliebige Terme τ, τ':

$$\Delta(c_t) := t$$

$$\Delta(x_t) := t$$

$$\Delta(\tau, \tau') := \Delta(\tau), \Delta(\tau')$$

Sind τ, τ' Terme, mit $\Delta(\tau) = \langle \Delta(\tau') \rangle$, so ist $\tau \circ \tau'$ eine atomare Formel. Jeder Term τ mit $\Delta(\tau) = \langle\rangle$ ist eine atomare Formel. Komplexe Terme, die nur Konstanten enthalten (konstantenbelegte Terme) bezeichnen wir mit $\tau_c, \tau'_c, \ldots$ Die Formelmenge $\mathcal{F}_\mathsf{t}$ ist dann, mit atomaren Formeln p und Variablen x, derart definiert:

$$\phi ::= \; p \mid \forall x \phi \mid \neg \phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Die Junktoren $\wedge$ und $\neg$ werden wie üblich definiert. Für alle konstantenbelegten atomaren Formeln $c \circ \tau_c$ respektive $a \in \langle\rangle$, Variablen x und Strukturen $\mathfrak{A}$ definieren wir:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \models a & \text{gdw} & a \in \mathfrak{A}(\langle\rangle). \\ \mathfrak{A} \models c \circ \tau_c & \text{gdw} & \tau_c \in \mathfrak{A}(c). \\ \mathfrak{A} \models \forall x \phi & \text{gdw} & \text{für alle } \Delta(x)\text{-Konstanten } c \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \end{array}$$

Für diese Sprache könnte sofort wieder ein Resolutionsalgorithmus angegeben werden, im Stil von Anhang A. Wir verzichten hier jedoch darauf. Dass die Sprache finitistisch ist, im Stil von Definition 1 lässt sich sehr leicht zeigen, indem man $\mathcal{F}_{\mathbf{at}}$ als Menge aller konstantenbelegten atomaren Formeln ansetzt und ansonsten ähnlich wie im Fall von $\mathsf{FIN_p}$ vorgeht.

Typen als Sorten: die mehrsortige Sprache $\mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$ Wir gehen aus von der selben Domänensignatur $\mathfrak{D}_t = (T, \alpha)$ wie im Fall von $\mathsf{FIN_t}$. Mit $\mathbf{t}, \mathbf{t}', \ldots$ bezeichnen wir endliche Folgen von Typen aus T. Mit $\mathcal{P}$ bezeichnen wir die Menge, die für genau jedes $\langle \mathbf{t} \rangle \in T$ die Folge $\langle \mathbf{t} \rangle, \mathbf{t}$ enthält (die insbesondere auch gleich $\langle\rangle$ sein kann).

Genau jedes $P \in \mathcal{P}$ ist ein *Prädikat* der Sprache. – Wie im eingangs diskutierten Beispiel gibt es also auch hier für jede Zusammenstellung von Sortenmengen nur genau ein Prädikat. Prädikate sind hier simple Folgen von Sorten, respektive entsprechende Relationen über diesen Sortenfolgen. – Wir definieren wie oben, für jedes $P \in \mathcal{P}$ eine entsprechende Menge $P_\times$ (anschaulich den *Raum* über P):

$$P_\times := \alpha(t_1) \times \ldots \times \alpha(t_i), \text{ für alle } P \in \mathcal{P} \text{ mit } P = t_1, \ldots, t_i \text{ und } i > 0.$$

Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ordnet dann jedem $P \in \mathcal{P}$ eine Menge $\mathfrak{A}(P) \subseteq P_\times$ zu. Mit $\mathbb{A}_s$ bezeichnen wir die Menge aller Strukturen dieser Art.

Die Sprache hat exakt die selben Variablen, Konstanten und Terme wie die oben definierte Typenlogik. Wie oben ist die Abbildung Δ definiert. Abweichend ist jedoch die Definition atomarer Formeln: *jeder Term* τ ist genau dann eine atomare Formel, wenn $\Delta(\tau) \in \mathcal{P}$ gilt.

Die Definition der Formelmenge $\mathcal{F}_\mathsf{s}$ der Sprache erfolgt wiederum analog zu $\mathcal{F}_\mathsf{t}$. Die Semantik sieht so aus, für alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_s$, alle konstantenbelegten atomaren Formeln ϕ_c und alle Variablen x ($\neg$ und $\wedge$ sind wie üblich definiert):

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \vDash_s \phi_c & \text{gdw} & \phi_c \in \mathfrak{A}(\Delta(\phi_c)). \\ \mathfrak{A} \vDash_s \forall x \phi & \text{gdw} & \text{für alle } \Delta(x)\text{-Konstanten } c \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \end{array}$$

Die Menge $\mathbb{A}_s$ wird bijektiv auf $\mathbb{A}_t$ abgebildet, durch eine Funktion Θ, sodass für jede Aussagenkonstante a und alle konstantenbelegten atomaren $c \circ \tau_c$ gilt:

$$a \in \mathfrak{A}(\langle\rangle) \leftrightarrow a \in \Theta(\mathfrak{A})(\langle\rangle)$$

$$\tau_c \in \mathfrak{A}(c) \leftrightarrow (c, \tau_c) \in \Theta(\mathfrak{A})(\Delta(c), \Delta(\tau_c))$$

Außerdem ist eine bijektive Abbildung $\Theta : \mathcal{F}_\mathsf{t} \mapsto \mathcal{F}_\mathsf{s}$ definiert, für alle atomaren $a, \tau \circ \tau'$, alle Variablen x, alle $\mathcal{F}_\mathsf{t}$-Formeln ϕ, ψ:

$$\Theta(a) := a$$

$$\Theta(\tau \circ \tau') := \tau, \tau'$$

$$\Theta(\phi \wedge \psi) := \Theta(\phi) \wedge \Theta(\psi)$$

$$\Theta(\neg\phi) := \neg\Theta(\phi)$$

$$\Theta(\forall x \phi) := \forall x \Theta(\phi).$$

Dann gilt, wie man leicht sieht, für alle $\phi \in \mathcal{F}_\mathsf{t}$, alle $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_t$ und die entsprechende $\mathsf{FIN_t}$-Erfülltheitsrelation $\vDash_t$ und die $\mathsf{FIN_s^*}$-Erfülltheitsrelation $\vDash_s$:

$$\mathfrak{A} \vDash_t \phi \quad \text{gdw} \quad \Theta(\mathfrak{A}) \vDash_s \Theta(\phi).$$

$\mathsf{FIN_t}$ und $\mathsf{FIN_s^*}$ sind also äquivalente Ausdrucksmittel über einer typenlogischen Domänensignatur $\mathfrak{D}_t = (T, \alpha)$. $\mathsf{FIN_s^*}$ demonstriert jedoch, dass die einfachere und naheliegendere Option, eine derartige Sprache zu definieren, in folgender Weise zu beschreiben wäre:

Die einfachere mehrsortige Sprache $\mathsf{FIN_s}$ Eine *mehrsortige Domänensignatur* $\mathfrak{D}_s = (\mathcal{S}, \mathcal{P})$ ist definiert als endliche Menge von endlichen und paarweise disjunkten Mengen $\mathcal{S}$ – die *Sortenmenge* –, plus eine Menge von *Prädikaten* $\mathcal{P}$, die wie folgt definiert ist. Sei N die Menge aller endlichen Folgen von Elementen von $\mathcal{S}$. Dann definiert $\mathcal{P}$ eine endliche Teilmenge

$$\mathcal{P} \subseteq N.$$

Wir identifizieren, wie oben, alle Sortenmengen als Konstantenmengen und führen für jede Sorte eine abzählbare Menge von Variablen ein. Neben Konstanten und Variablen sind erneut beliebige Folgen von Termen als Terme definiert. Analog wie oben wird eine passende Funktion Δ definiert, die jedem Term seine Sorte zuordnet. Ein Term τ ist eine atomare Formel, wenn $\Delta(\tau) \in \mathcal{P}$ gilt. Wir definieren:

$$\mathcal{P}_\times := \bigcup_{(s_j)_{j=1}^i \in \mathcal{P}} s_1 \times \ldots \times s_i.$$

Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ ist dann schlicht definiert als Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}_\times$, die Menge aller Strukturen $\mathbb{A}_s$ als Potenzmenge $\wp(\mathcal{P}_\times)$. Die Syntax der Sprache ist festgelegt durch

$$\phi ::= \; p \mid \forall x \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi,$$

wobei p für atomare Formeln steht, x für Variablen. Wir definieren erneut (zuzüglich der entsprechenden Regeln für $\neg$ und $\wedge$) für alle Variablen x, alle konstantenbelegten atomaren Formeln ϕ_c und alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_s$:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \vDash_s \phi_c & \text{gdw} & \phi_c \in \mathfrak{A}(\Delta(\phi_c)). \\ \mathfrak{A} \vDash_s \forall x \phi & \text{gdw} & \text{für alle } \Delta(x)\text{-Konstanten } c \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash \phi\left[\tfrac{c}{x}\right]. \end{array}$$

Man sieht leicht, dass diese Sprache äquivalent ist zu $\mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$ (auf Details verzichten wir), FIN_s kommt allerdings ohne die komplizierte typenlogische Konstruktion aus FIN_t und $\mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$ aus, weshalb man sinnvoller Weise FIN_s anstelle der komplizierteren Sprachkonstruktionen FIN_t und $\mathsf{FIN}_\mathsf{s}^*$ verwenden sollte.

2.1.2 Flexible Funktionenkalküle (die Sprache FUN) ☞ ad (5)

Was sind flexible Funktionen? Ein Funktionenkalkül ist eine Sprache, die lediglich Funktionen enthält, aber keine Prädikate. Man kann jedoch Prädikate dadurch „simulieren", dass man eine Menge von Wahrheitswerten als Zielmenge von Funktionen akzeptiert und den Kalkül mit Identität ausstattet. $f(x) \equiv \texttt{TRUE}$ würde dann soviel bedeuten wie „x hat das Merkmal f". Ein mehrsortiger Funktionenkalkül mit Identität beinhaltet also die Ausdrucksmöglichkeiten einer (mehrsortigen) Prädikatenlogik (eine weitere Möglichkeit in einem Funktionenkalkül Prädikate zu implementieren beschreiben wir in der Gestalt von λ-Abstraktionen im folgenden Abschnitt 2.1.3).

Funktionenkalküle können so charakterisiert werden, dass sie *Zustände in Zustände überführen*, während Prädikatenlogiken lediglich *Zustände beschreiben* (und dementsprechende Wahrheitswerte abliefern). Hat man also, im Fall der Prädikatenlogik (bzw. der Aussagenlogik) die klassische Wittgensteinsche Metapher[4] des Bildes, das wir an die Wirklichkeit anlegen (bzw. der formalen Folie die wir über die Wirklichkeit legen und Kongruenz oder Inkongruenz konstatieren), so wäre im Fall des Funktionenkalküls das passende Bild das einer Manipulation der Wirklichkeit selbst: Zustände werden in Zustände übergeführt. Beispielsweise könnte ein Funktionenkalkül eine Aktion beschreiben, wie das Zerhacken eines Holzscheits:

Holzscheit.Hacken (Resultat sind zwei Holzsscheite)

Der klassische Funktionenkalkül ist der von Alonzo Church entwickelte λ-Kal-

[4]Vgl. Wittgenstein (1963).

kül.[5] In seiner typenfreien Version enthält der λ-Kalkül die Möglichkeit, beliebige Objekte miteinander zu verknüpfen, es wird also nicht zwischen Funktionen und deren Argumenten unterschieden. Analoge Möglichkeiten sieht der hier präsentierte Typ von *flexiblen Funktionenkalkülen* vor, den wir als mehrsortige Sprache definieren werden. Sind a und b zwei Objekte irgendwelcher Sorten, dann ist eine Paarung dieser Objekte ab eine Funktion, im Stil des λ-Kalküls. In einem flexiblen Funktionenkalkül wird von dieser Objektpaarungs-Option noch weiter abstrahiert, durch die Einführung einer Menge $\mathcal{O}$ von *Operatoren*. Es gilt: sind a und b irgendwelche Objekte beliebiger Sorten und ist $\# \in \mathcal{O}$ ein Operator, so ist $a \# b$ eine „Funktion", also ein atomares Objekt der Sprache. (Ist $\mathcal{O}$ einelementig, so resultiert eine λ-Kalkül-ähnliche Konstruktion.)

In gewisser Hinsicht erinnert diese Sprachkonstruktion an Konzepte, wie man sie in der sogenannten objektorientierten Programmierung findet. Beispielsweise könnte . (Punkt) der Operator für Zugriff auf *Merkmale* sein, $>$ der Operator für den Zugriff auf die *Teile* eines Objekts und ! der Operator zum Auslösen einer *Aktion*. Mit etwas Phantasie könnte man sich für identische Objekte so drei Typen von Paarungen mit unterschiedlicher Bedeutung denken:

(1) Würfel.Rot

(2) Würfel ! Rot

(3) Würfel > Rot

Variante (1) würde besagen, dass der Würfel das Merkmal hat, rot zu sein (Zielmenge eine Menge von Wahrheitswerten). (2) hingegen würde so etwas wie die Aufforderung darstellen (den Befehl) den Würfel rot anzumalen, während man (3) als eine Methode ansehen könnte alle roten Teile eines Würfels herauszupicken (so vorhanden).

Partielle Funktionen Eine *partielle Funktion* $f : A \overset{\texttt{NULL}}{\longmapsto} B$ von A nach B ist definiert als Funktion $f : A \mapsto B \cup \{\texttt{NULL}\}$, mit einem arbiträren $\texttt{NULL} \notin B$. Ist die

[5] Vgl. Church (1941).

Menge aller $a \in A$ für die $f(a) \neq \mathtt{NULL}$ gilt endlich, so heißt die partielle Funktion *endlich*.

Ein im unten spezifizierten Sinn entwickelter flexibler Funktionenkalkül führt unweigerlich zu einer unendlichen Menge von Sorten. Man erhält dadurch, so könnte man sagen, eine Reihe von sinnlosen Konstruktionen im Stil von: „die Farbe der Zahl Eins“, „der Krümmungsradius von Rot“, „die Wellenlänge der Eiche“ oder „Waverley ist der Scott von Autor“. – Die Idee ist dann, dass man aus einer unendlichen Menge von – großteils sinnlosen – Termen *eine endliche Menge von sinnvollen Termen* herauspickt (vgl. auch oben, bei der Sprache FIN_t, die Mengen **TYP** und T).

Wir benützen hier Partialität also letztlich nur als ein Werkzeug zum „Finitistisch-Machen“ einer Sprache. Ein wichtiger Aspekt, den wir hier nicht weiter verfolgen werden, ist die Möglichkeit, die Partialität eröffnet, im Zusammenhang von *mehrwertigen* Logiken. Anschaulich kann der Wert NULL als *dritter Wahrheitswert* (undefiniert o. ä.) interpretiert werden, und man erhält eine klassische dreiwertige vulgo partielle Logik.[6] Im Unterschied dazu interpretieren wir NULL als negativen Wahrheitswert (FALSE) und bleiben so im zweiwertigen Rahmen.

Der flexible Funktionenkalkül FUN Wir beschreiben, als stark vereinfachte Vorversion der Sprache SUP (vgl. unten, Abschnitt 2.2), den flexiblen Funktionenkalkül FUN, wobei wir insbesondere auf modale Aspekte nicht eingehen (anders als FIN_t und $\mathsf{FIN}^*_\mathsf{s}$ ist FUN jedoch als *free logic* konzipiert). Anschaulich verknüpft FUN den oben entwickelten Gedanken einer mehrsortigen Sprache, deren nicht-logischen Objekte ausschließlich in Sortenmengen enthalten sind, mit dem Konzept flexibler Funktionen.

Die Sprache ist definiert auf der Basis einer *Domänensignatur* $\mathfrak{D}_f = (\mathcal{S}, \mathcal{O}, \Omega)$. Dabei ist $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von paarweise disjunkten Mengen – die *Grundsorten* der Sprache. $\mathcal{O}$ ist eine endliche und nichtleere Menge von *Operatoren*, Ω ist eine sogenannte *Signaturfunktion*. $\mathcal{S}$ enthält insbesondere die Sorte $w := \{\mathtt{TRUE}\}$.

[6] Zur partiellen und mehrwertigen Logik vgl. Blamey (2002), Gottwald (1989).

Außerdem ist ein arbiträres Element NULL definiert, das die Funktion eines negativen Wahrheitswertes und eines Nullelementes übernehmen wird. NULL ist kein Element einer Grundsorte, wir fassen jedoch NULL unter bestimmten Umständen als eigene (zusätzliche) Sorte $\mathtt{NULL} := \{\mathtt{NULL}\}$ auf, die als einziges Element wiederum NULL enthält.[7] – Wir definieren die *Sortenmengen* $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_{\mathtt{NULL}}$ der Sprache FUN in folgender Weise:

(1) Jede Grundsorte ist eine Sorte. Im Fall von $\mathfrak{S}_{\mathtt{NULL}}$ ist auch NULL eine Sorte.

(2) Sind s, s' Sorten, so ist auch das kartesische Produkt $s \times s'$ eine Sorte.

Natürlich könnte man die Klausel (2) hier auch weglassen. Aber das Zulassen von beliebigen Folgen von Sorten(elementen) als Argumente von Operationen steigert die Ausdrucksmöglichkeiten, ohne die Sprache signifikant komplizierter zu machen. Bei geeigneter Wahl der Signaturfunktion Ω resultiert überdies ohnehin der Sonderfall von Operationen mit ausschließlich einstelligen Argumenten.

Für jede Sorte s und jedes $\chi \in s$ definieren wir die Funktion $\Delta(\chi) := s$. Für alle Sorten s, s' und alle Operationen $\# \in \mathcal{O}$ definiert $(s, \#, s')$ einen *Operationentyp*, für alle $\chi \in s$ und alle $\chi' \in s'$ bezeichnet $\chi \# \chi'$ eine *Operation*. Die Signaturfunktion Ω definiert dann eine endliche (!) partielle Funktion

$$\Omega : \mathfrak{S} \times \mathcal{O} \times \mathfrak{S} \overset{\mathtt{NULL}}{\longmapsto} \mathfrak{S},$$

die jedem Operationentyp eine *Zielmenge* repektive den Wert NULL zuordnet. Für alle Operationentypen $\omega \in \mathfrak{S}_{\mathtt{NULL}} \setminus \mathfrak{S} \times \mathcal{O} \times \mathfrak{S}_{\mathtt{NULL}} \setminus \mathfrak{S}$ setzen wir $\Omega(\omega) := \mathtt{NULL}$.

Eine FUN-*Struktur* $\mathfrak{A}$ ordnet zunächst jeder Grundsorte $\sigma \in \mathcal{S}$ eine möglicher Weise leere Menge $\mathfrak{A}(\sigma) \subseteq \sigma$ zu. Für die Sorte NULL setzen wir $\mathfrak{A}(\mathtt{NULL}) := \mathtt{NULL}$.

[7] Wenn man so will, bzw. wenn man Angst vor Paradoxien hat, ist diese Sorte NULL als arbiträre einelementige Menge definiert, wo man der Menge und ihrem Element *den selben Namen gibt*. Will man auch das nicht, so müsste man etwa die Menge mit $\mathtt{NULL}_1$ bezeichnen, ihr Element mit $\mathtt{NULL}_2$, was allerdings ein überflüssiger Schachzug wäre, da man ohnehin in der folgenden Sprachspezifikation nie in Gefahr gerät, Sorten und ihre Elemente zu verwechseln.

Dadurch ist für alle Sorten s aus $\mathfrak{S}_{\texttt{NULL}}$ ein Wert $\mathfrak{A}(s)$ bestimmt, da wir für alle $s, s', s'' \in \mathfrak{S}_{\texttt{NULL}}$ mit $s = s' \times s''$ in naheliegender Weise $\mathfrak{A}(s) := \mathfrak{A}(s') \times \mathfrak{A}(s'')$ definieren können.

Außerdem ordnet $\mathfrak{A}$ allen Operationen $\chi \# \chi'$ mit $\Omega(\Delta(\chi), \#, \Delta(\chi')) \neq \texttt{NULL}$, sowie $\chi \in \mathfrak{A}(\Delta(\chi))$ und $\chi' \in \mathfrak{A}(\Delta(\chi'))$ einen Wert

$$\mathfrak{A}(\chi \# \chi') \in \mathfrak{A}(\Omega(\Delta(\chi), \#, \Delta(\chi'))) \cup \{\texttt{NULL}\}$$

zu. Für alle übrigen Operationen $\chi \# \chi'$ definieren wir $\mathfrak{A}(\chi \# \chi') := \texttt{NULL}$. Mit $\mathbb{A}_f$ bezeichnen wir die Menge aller Strukturen dieser Art, die, wie man leicht sieht, endlich ist.

Ist die Zielmenge einer Operation o gleich w, so ergeben sich zwei mögliche Werte für $\mathfrak{A}(o)$, nämlich `TRUE` und `NULL`. Aus Anschaulichkeitsgründen schreiben wir gegebenenfalls anstelle von `NULL` auch `FALSE`. Würde die Menge w zwei Werte `TRUE` und `FALSE` enthalten, dann wäre die passende Interpretation von `NULL` die eines dritten Wahrheitswertes (undefiniert o. ä.). Wie oben bereits angedeutet, wollen wir jedoch aus Vereinfachungsgründen unsere Sprachen hier prinzipiell zweiwertig gestalten, weshalb wir diese – durchaus naheliegende – Option hier nicht nützen.

Alle Grundsorten und die Sorte `NULL` identifizieren wir in der üblichen Weise als Konstantenmengen. Außerdem führen wir für jede Grundsorte s, nicht aber für `NULL`, eine abzählbare Menge von Variablen $x_s, x'_s, \ldots$ ein. Die Menge der *Terme* der Sprache FUN ist so definiert:

$$\tau \ ::= \ c \mid x \mid \tau, \tau \mid \tau \# \tau,$$

wobei x für Variablen steht, c für Konstanten und # für Operatoren. – Diese Term-Syntax ist sehr flexibel, da beliebige Folgen von Termen (wir nennen sie auch *Term-Vektoren*) wiederum Terme sind, sowie beliebige Verkettungen von Operationen. Sei . ein beliebiger Operator, dann könnten Terme so aussehen:

c	ein einzelner Term,
c, d	ein Vektor,
$c.d$	eine Operation,
$c.d.e.f$	respektive $((c.d).e).f$ – eine komplexe Operation,
$c.(d, e.f, g)$	usw.

Jeder Term τ ist in eindeutiger Weise einer Sorte $s \in \mathfrak{S}_{\mathtt{NULL}}$ zuzuordnen. Die Funktion $\Delta(\tau)$ bestimmt für jeden Term diese Sorte. Für alle Konstanten c_s und Variablen x_s einer Sorte s usw. definieren wir:

$$\Delta(\mathtt{NULL}) := \mathtt{NULL},$$
$$\Delta(c_s) := s,$$
$$\Delta(x_s) := s,$$
$$\Delta(\tau_1, \tau_2) := \Delta(\tau_1) \times \Delta(\tau_2),$$
$$\Delta(\tau \,\#\, \tau') := \Omega(\Delta(\tau), \#, \Delta(\tau')).$$

Gegeben zwei Terme τ, τ' ist $\tau \equiv \tau'$ definiert als *atomare Formel*. Die Menge der *Formeln* von FUN ist dann definiert als:

$$\phi ::= \ p \mid \forall x \phi \mid \neg \phi \mid \phi \wedge \phi,$$

wobei p für atomare Formeln steht und x für Variablen.

Enthält ein konstantenbelegter Term τ_c keine Operationen, dann ist er, wie man sofort sieht, als Element der Sorte $\Delta(\tau_c)$ eindeutig bestimmt und wir setzen für alle Strukturen $\mathfrak{A}(\tau_c) := \tau_c$. Bilden solche Terme Operationen $\tau_c \,\#\, \tau_c'$, so ist für jede Struktur ein Wert $\mathfrak{A}(\tau_c \,\#\, \tau_c')$ bereits durch obige Definitionen eindeutig bestimmt. So ist *für alle konstantenbelegten Terme* τ_c und alle Strukturen τ ein Wert $\mathfrak{A}(\tau_c)$ eindeutig bestimmt. Dies benützend definieren wir, für alle Formeln ϕ, ψ, alle konstantenbelegten Terme τ_c, τ_c', alle Variablen x und alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}_f$:

$\mathfrak{A} \models \neg\phi$	gdw	nicht $\mathfrak{A} \models \phi$
$\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$	gdw	$\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models \tau_c \equiv \tau_c' & \text{gdw} & \text{(1) } \mathfrak{A}(\tau_c) \in \mathfrak{A}(\Delta(\tau_c)) \text{ und } \mathfrak{A}(\tau_c') \in \mathfrak{A}(\Delta(\tau_c')) \\
 & & \text{(2) } \mathfrak{A}(\tau_c) = \mathfrak{A}(\tau_c'). \\
\mathfrak{A} \models \forall x \phi & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\Delta(x)) = \emptyset \text{ oder} \\
 & & \text{für alle } c \in \mathfrak{A}(\Delta(x)) \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right].
\end{array}
$$

Zwei konstantenbelegten Terme gelten also genau dann als $\equiv$-identisch, wenn beide als *existierende* Werte in der Menge $\mathfrak{A}(s)$ ihrer jeweiligen Sorte s enthalten sind und wenn sie identisch sind. (Grund für die erste Bedingung: die Sprache ist eine *free logic* – vgl. die Ausführungen oben, in Abschnitt 1.2.2.) Es hätte also keinen Sinn, bei einer Operation o, deren Zielmenge w ist, mit $o \equiv$ `NULL` deren Falschheit abzufragen, da diese Formel nie erfüllt wäre (egal ob der Wert von o gleich `TRUE` oder `NULL` ist). Die Abfrage muss immer $o \equiv$ `TRUE` lauten, bzw. – um das Ziel von $o \equiv$ `NULL` zu erreichen – einfach $\neg\, o \equiv$ `TRUE`.

2.1.3 Merkmale und definite Deskriptionen

☞ ad (6)

Formal gesehen stellen definite Deskriptionen und λ-Abstraktionen eher triviale Modifikationen dar, im Kontext eines Prädikatenkalküls. Dennoch führen diese Sprachelemente zu einer signifikanten Steigerung der Ausdrucksmöglichkeiten, weshalb wir hier darauf zurückgreifen wollen.[8] Anschaulich besagen die Ausdrücke $\iota x.\phi$ und $\lambda x.\phi$ folgendes:

$\iota x.\phi$ Das definite x, sodass ϕ.

$\lambda x.\phi$ Das Merkmal eines x zu „ϕen“.

Definite Deskriptionen werden am Besten als Terme eingeführt, die genau dann ein Individuum herauspicken, wenn die entsprechende Formel ϕ von *genau einem* x erfüllt ist. Diese Vorgangsweise setzt allerdings voraus, dass die Grundsprache als *free logic* konstruiert ist, also Terme ohne Referenz zulässt. Die typische Anwendung von definiten Deskriptionen sind natürlich Eigennamen, wie „Cäsar“

[8] Wir definieren hier λ-Abstraktionen nicht als Funktionenterme, sondern als atomare Formeln (λ-Prädikate), in dem Sinn wie Fitting & Mendelsohn (1998, S. 194ff.).

oder „Pegasus“ oder auch „Der gegenwärtige König von Frankreich“, also alle Namen, die (höchstens) genau ein Objekt als Extension besitzen.

Demgegenüber können λ-Abstraktionen als die Merkmale von *Klassen* interpretiert werden, also zur Bezeichnung von entsprechenden *Klassenbegriffen* herangezogen werden. Ist c irgendeine Konstante des Typs x, dann ist die sogenannte λ-*Anwendung*

$$[\lambda x.\phi](c)$$

genau dann erfüllt, wenn die Substitution $\phi\left[\frac{c}{x}\right]$ erfüllt ist. λ-Anwendungen in diesem Sinn treten als atomare Formeln in einer Sprache auf. Sie erfüllen die selbe Funktion wie Prädikate, sind also in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Prädikatenkonzepts, bzw., mit anderen Worten, eine prädikatenunabhängige Möglichkeit, *Merkmale* zu beschreiben. Gegeben eine beliebige Formel ϕ mit der freien Variable x kann das durch ϕ definierte einstellige Prädikat $M(x)$ so spezifiziert werden:

$$M(x) \quad \text{gdw} \quad \lambda x.\phi.$$

Als interessante Anwendung des Merkmalskonzeptes werden wir unten, im Abschnitt 3.2 eine auf Verbandstheorie basierende „Begriffslogik“ entwickeln.

Starre und nicht-starre Designatoren Auf Saul Kripke geht das Konzept der starren Designation zurück[9], also die Auffassung dass Namen in allen „möglichen Welten“ auf das selbe Objekt referieren: Julius Cäsar ist immer und überall das selbe Objekt; der entsprechende Name referiert aufgrund gewisser kausal-sozialer Mechanismen darauf. In einer *free logic*, im Stil der oben beschriebenen Sprachen $\mathsf{FIN_p}$ und $\mathsf{FLAT_p}$, sind Individuenkonstanten als starre Designatoren implementiert. Jedes c bezeichnet ein definites Objekt, das jedoch in einigen Welten existieren kann, in anderen nicht. Die Idee ist die, dass ein Name wie Julius Cäsar zwar in jeder möglichen Welt das selbe Objekt bezeichnen sollte, dass er aber in

[9]Vgl. Kripke (1963, 1980).

einigen möglichen Welten nicht existieren könnte, sodass dort entsprechend alle *materiellen* Aussagen über ihn falsch sein müssten.

Dieses *existenzannahmenfreie Starrheitsprinzip* kann formal durch folgendes Theorem charakterisiert werden:

$$\exists x : x \equiv c \rightarrow (\Box \forall y : y \equiv c \rightarrow y \equiv x).$$

Das heißt: wann immer c ein bestimmtes x denotiert, gilt, dass, wann immer c ein y denotiert, sind diese x und y identisch. Oder: c bezeichnet entweder nichts oder stets ein und das selbe Objekt.

Was aber, wenn ein Name nicht starr referiert? – In der Literatur gibt es reichlich Beispiele für Namen, die offensichtlich nicht immer auf das selbe Objekt referieren. Beispielsweise bezeichnet „der gegenwärtige König von Frankreich“ nicht bloß in einige Welten kein Objekt und in anderen schon eines, sondern es bezeichnet in verschiedenen Welten, in denen dieser Name referiert, jeweils unterschiedliche Objekte: Ludwig der Erste, der Zweite, der Vierzehnte, etc.

In einer Sprache, die im obigen Stil Individuenkonstanten als starr implementiert, kann ein derartiger Name zunächst nicht als Individuenkonstante eingeführt werden. Wir können jedoch problemlos nicht-starre Designatoren anhand von beliebig komplexen Formeln definieren, über das Werkzeug der *definiten Deskription*. Sei K, der Einfachheit halber, das Prädikat das den gegenwärtigen König von Frankreich denotiert. Dann ist der *nicht-starre Designator* k – der den gegenwärtigen König von Frankreich bezeichnet – in folgender Weise definiert:

$$k := \iota x.K(x).$$

Es ist dann nicht bloß so, dass hier keine existenzielle Generalisierung gilt, sondern es gilt auch das oben formulierte Prinzip der Starrheit nicht. Vielmehr gilt eine Art „Prinzip der Nicht-Starrheit“, das wie folgt charakterisiert werden kann:

$$\exists x : x \equiv k \rightarrow (\Diamond \exists y : y \equiv k \wedge \neg y \equiv x).$$

Also: wann immer k ein Objekt x bezeichnet gibt es irgendeine mögliche Welt in der k ein von x verschiedenes Objekt y bezeichnet. Beispiele: Ludwig der Dreizehnte versus Ludwig der Vierzehnte.

Nicht-starre Designatoren haben auch eine wichtige Beispielfunktion im Zusammenhang mit λ-Abstraktionen. Sie illustrieren, dass λ-Abstraktionen nur scheinbar redundante Sprachelemente sind.[10] – Sei G das Prädikat „hat eine Glatze“, sodass $G(k)$ mit dem oben definierten k besagt, dass der gegenwärtige König von Frankreich eine Glatze hat.

Dann kann $\Diamond G(k)$ in zwei verschiedenen Weisen interpretiert werden: (a) Das Ding, das (in der aktualen Welt) der König von Frankreich ist, hat in irgendeiner möglichen Welt eine Glatze, (b) in irgendeiner möglichen Welt hat das Ding, das *dort* der König von Frankreich ist, eine Glatze. Im ersten Sinn wäre $\Diamond\phi$ immer falsch, da es gegenwärtig kein Ding gibt, das der gegenwärtige König von Frankreich ist, im zweiten Sinn könnte es irgendwann einen französischen König gegeben haben, der eine Glatze hatte.

Diese schwerwiegende Ambiguität kann sinnvoll aufgelöst werden nur durch ein Ausdrucksmittel im Stil der λ-Abstraktionen. Dadurch kann man die beiden Varianten präzise unterscheiden, in folgender Weise:

(a) $[\lambda x.\Diamond G(x)](k)$

(b) $\Diamond[\lambda x.G(x)](k)$

2.1.4 Mereologische Strukturen ☞ ad (7)

Mereologien sind Theorien über die Beziehungen zwischen Ganzheiten und Teilen. Historisch geht Mereologie im engeren Sinn auf Husserls Logische Untersuchungen zurück, sowie auf die von Stanisław Leśniewski – unter dieser Bezeichnung – entwickelte Alternative zur klassischen Mengentheorie.[11] Wir sind hier dezidiert weder mit den grundlagenmathematischen Aspekten der Mereologie

[10] Vgl. Fitting & Mendelsohn (1998, S. 194ff.).

[11] Vgl. Husserl (1980, II/1, S. 261-293), Leśniewski (1929), sowie Simons (1987). Zu den ordnungstheoretischen Konzepten, die im Folgenden diskutiert werden, vgl. auch Anhang B und die dortigen Literaturhinweise.

befasst, noch mit damit im Zusammenhang stehenden ontologischen Interpretationen dieser formalen Theorie. Vielmehr setzen wir eine „naive" Mengentheorie als nicht zu hinterfragende Basis unserer Überlegungen an. Außerdem beschränken wir uns, gerechtfertigt durch den finitistischen Grundansatz, auf eine bestimmte Form von *atomistischen* Mereologien.

Das mereologische Schlüsselkonzept „x ist ein Teil von y" – schreib $x < y$ – kann formal zunächst (wenn auch unvollständig) als *partielle Ordnung* charakterisiert werden. Eine partielle Ordnung ist irgendeine zweistellige Relation R über einer Menge X, mit folgenden Eigenschaften, für alle $x, y, z \in X$:

xRx	(Reflexivität)
$(xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$	(Antisymmetrie)
$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$	(Transitivität)

In Worten: x ist ein Teil von x. Ist x ein Teil von y und y ein Teil von x, dann gilt x gleich y. Ist x ein Teil von y und y ein Teil von z, dann ist x ein Teil von z.

Diese Charakterisierung ist unzureichend, weil man von einer mereologischen Struktur gewöhnlich auch die folgenden Optionen fordern wird: für je zwei Elemente x und y sollen die *mereologische Summe* $x + y$ (sprich: die Entität, die genau alle Teile von x und y als Teile enthält) und das *mereologische Produkt* $x \cdot y$ (die Entität, die genau alle gemeinsamen Teile von x und y als Teile enthält) definiert sein. Weiters sollen solche Dinge wie *Disjunktheit* und *Überlappung* von Gegenständen definiert sein.

Die Annahme ist nun die, dass das Konzept des *vollständigen Verbandes* in präziser Weise alle diese mereologischen Wunschvorstellungen implementiert.[12] Ein vollständiger Verband ist eine partiell geordnete Menge $(V, <)$, für die gilt, dass für jede Teilmenge $m \subseteq V$ das *Supremum* $\bigvee m$ (auch kleinste obere Schranke genannt) und das *Infimum* $\bigwedge m$ (auch: größte untere Schranke) existieren. Insbeson-

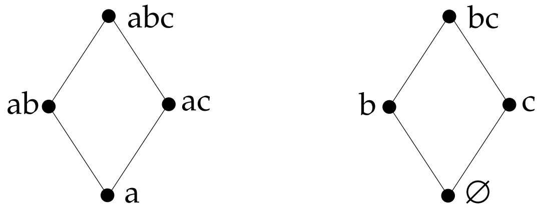
[12]Eine Unterscheidung zwischen vollständigen Verbänden und Verbänden, die nicht zwingend vollständig sind, ist hier unnötig, da wir nur endliche Mengen diskutieren, über denen jeder Verband automatisch ein vollständiger Verband ist.

dere muss für jeden vollständigen Verband $(V, <)$ das *Nullelement* $\mathbf{N} := \bigwedge V$ und das *Einselement* $\mathbf{E} := \bigvee V$ definiert sein.

Im allgemeinen mereologischen Fall würde diese Konstellation eines Nullelementes zu Problemen führen, da man *Disjunktheit* $x|y$ zweier Objekte naheliegender Weise so definieren wird:

$$x|y \quad \text{gdw} \quad x \cdot y = \mathbf{N}.$$

Das Nullelement $\mathbf{N}$ muss jedoch nicht zwingend ein *leeres* Element sein. Folgendes sind die Hasse-Diagramme zweier Verbände:



Während im rechten Beispiel das Nullelement als leere Menge definiert ist, repräsentiert das linke Beispiel einen Verband mit „nicht leerem Nullelement".

Die Lösung des Problems, die wir vorschlagen, ist ein einfacher *atomistischer* Ansatz. Hat eine mereologische Struktur nur endlich viele Elemente, so muss jedes Objekt der Struktur in eine endliche Menge von Teilen zerfallen und es muss Teile geben, die Atome, bzw. – in der hier gewählten Terminologie – *Monaden* sind. – Wir definieren *Benachbartheit* $\prec$ von Objekten p, q:

$$p \prec q \quad \text{gdw} \quad p \neq q \wedge \forall r : p < r < q \rightarrow r = p \vee r = q.$$

Nun ist ein Objekt als *Monade* definiert, genau dann wenn sein „unterer Nachbar" das Nullelement $\mathbf{N}$ ist:

$$\mathbf{mon}(p) \quad \text{gdw} \quad \mathbf{N} \prec p.$$

Hat ein Objekt p nur endlich viele Teile, so muss es anschaulich in Monaden zerfallen, d. h. es muss eine endliche Menge P von Monaden geben, sodass $p = \bigvee P$ gilt, also p das Supremum von P bildet. Die natürliche Explikation eines so konzipierten endlichen Verbandes ist folgende: gegeben eine Menge von Monaden M

ist der Verband V als die *Potenzmenge* $V := \wp(M)$ definiert. Jeden derart über einer Menge M von Monaden mit der Teilmengenrelation $<$ als Potenzmenge von M gebildeten Verband nennen wir einen *mereologischen Verband* $(M, <)$.

Mereologisches Vokabular Wir stellen einen Katalog der wichtigsten mereologischen Konzepte auf der Basis einer verbandstheoretischen Terminologie zusammen. Sei $(M, <)$ ein mereologischer Verband, p, q, r beliebige Elemente von $V := \wp(M)$:

(L1)	$\mathbf{N} := \bigwedge V$		Nullelement
(L2)	$\mathbf{E} := \bigvee V$		Einselement
(L3)	$p < q$		Teil
(L4)	$p \ll q$	gdw $p < q \wedge \neg(p = q)$.	echter Teil
(L5)	$p \lll q$	gdw $p \ll q \wedge \neg p = \mathbf{N}$.	echter Teill
(L6)	$p \prec q$	gdw $p \ll q \wedge \nexists b : p \ll b \ll q$.	benachbart
(L7)	$\mathbf{mon}(p)$	gdw $\mathbf{N} \prec p$	Monade
(L8)	$p\|q$	gdw $p \cdot q = \mathbf{N}$.	disjunkt
(L9)	$p \circ q$	gdw $\exists b : b \lll p \wedge b \lll q$	überlappend
(L10)	$p + q$		Summe
(L11)	$p \cdot q$		Produkt
(L12)	$r = p - q$	gdw $q\|r \wedge p = r + q$.	Differenz
(L13)	$\bar{p} := \mathbf{E} - p$		Komplement

Hier entspricht $<$ dem arithmetischen $\leq$ (kleiner oder gleich), $\ll$ entspricht dem in der Arithmetik üblichen $<$, wogegen $\lll$ zusätzlich sicherstellt, dass der Teil nicht das Nullelement $\mathbf{N}$ ist.[13]

Mereologische Strukturen in einer mehrsortigen Sprache Der mehrsortige Ansatz ermöglicht eine elegante Implementierung mereologischer Verbände als

[13]Hinsichtlich der Notationen unterschiedlicher Autoren vgl. Simons (1987, S. 99).

Sorten, die Potenzmengen anderer Sorten sind. Wir definieren:

Ist s eine Sorte, so auch die Potenzmenge $\wp(s)$.

Bei der Definition eines Strukturbegriffs im Sinne einer *free logic* muss dann zusätzlich noch folgendes berücksichtigt werden. Ist $\mathfrak{A}$ eine Struktur, die jeder Sorte s eine Teilmenge $\mathfrak{A}(s) \subseteq s$ von existierenden Entitäten zuordnet, dann muss gelten, für jede Sorte s und die entsprechende Sorte $s' = \wp(s)$:

$$\mathfrak{A}(s') := \wp(\mathfrak{A}(s)).$$

Die anschauliche Interpretation dieser Restriktion von Strukturen ist folgende: sobald ein $x \in V$ in $\mathfrak{A}(V)$ nicht enthalten ist, muss auch jedes y mit $x < y$ oder $y < x$ nicht in $\mathfrak{A}(V)$ enthalten sein. Formal gesehen bedeutet dies, dass $\mathfrak{A}(V)$ ein vollständiger Teilverband von V sein muss.

2.2 Die Sprache SUP

Die Sprache SUP *ist als direkte Erweiterung der oben, S. 57ff. beschriebenen Sprache* FUN *gestaltet. Sie implementiert zusätzlich zu der dort eingeführten Kombination aus Mehrsortigkeit und flexiblen Funktionen, die oben besprochenen Features flache Semantik, intentionale Zustände, definite Deskriptionen und λ-Abstraktionen, sowie mereologische Strukturen.*

Ontologie Eine *Ontologie* $\mathfrak{O}$ ist eine Liste, die alle Informationen enthält, die man zur semantischen Determination einer (finitistischen) Sprache benötigt. Wie bei der Sprache FUN enthält diese Liste zunächst eine Menge von Sorten $\mathcal{S}$, eine Menge von Operatoren $\mathcal{O}$ und eine Signaturfunktion Ω. Für die *modale* Strukturierung der Sprache (flache Semantik!) ist eine Signaturfunktion Ω_M verantwortlich, sowie eine *modale Struktur* $\mathfrak{M}$. Schließlich wird in SUP noch eine zusätzliche Schicht für *intentionale Zustände* implementiert, durch eine Signaturfunktion Ω_I und eine *intentionale Struktur* $\mathfrak{I}$. Eine Ontologie $\mathfrak{O}$ für die Sprache SUP ist somit definiert durch die folgende Liste:

$$\mathfrak{D} := (\mathcal{S}, \mathcal{O}, \Omega, \Omega_M, \mathfrak{M}, \Omega_I, \mathfrak{I}).$$

Sorten, Operationen Die Menge der Grundsorten $\mathcal{S}$ und die Menge der Operationen $\mathcal{O}$ sind identisch wie bei der Sprache FUN definiert. Auch in SUP gibt es eine Sorte $w := \{\mathtt{TRUE}\}$ und ein (auch als Sorte fungierendes) Nullelement NULL. Analog wird die Menge $\mathfrak{S}_{\mathtt{NULL}}$ aller Sorten definiert, wobei hier zwei Klauseln hinzugefügt werden:

$$s ::= \mathtt{NULL} \mid \sigma \mid \mathbb{A} \mid \mathbb{O} \mid s \times s \mid \wp(s),$$

Die Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{O}$ werden unten noch näher erläutert. Lässt man die Klauseln $\mathbb{A}$ und $\mathbb{O}$ weg, so resultiert die Menge $\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathtt{NULL}}$ aller *nichtmodalen Sorten*. (Auch einen Operationentyp bzw. eine Operation, deren Sorten nichtmodal sind, nennen wir *nichtmodal*.) Lässt man in obiger Definition $s \times s$ weg, so bezeichnen wir die resultierende Menge mit $\mathring{\mathfrak{S}}_{\mathtt{NULL}}$. Zu jeder dieser Sortenmengen existiert außerdem eine Version $\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}, \mathring{\mathfrak{S}}$, die durch Weglassen der Klausel NULL in obiger Definition resultiert.

Die Signaturfunktion Ω ist, wie bei der Sprache FUN, als endliche partielle Funktion

$$\Omega : \tilde{\mathfrak{S}} \times \mathcal{O} \times \tilde{\mathfrak{S}} \overset{\mathtt{NULL}}{\longmapsto} \tilde{\mathfrak{S}},$$

definiert, die jedem *nichtmodalen* Operationentyp eine Zielmenge, bzw. den Wert NULL zuordnet. Wir definieren die Menge aller *nichtmodalen Operationen*:

$$\tilde{\mathbb{O}} := \{\chi \# \chi' \mid \Omega(\Delta(\chi), \#, \Delta(\chi')) \neq \mathtt{NULL}\}.$$

Strukturen Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ ist erneut als Abbildung definiert, die allen Sorten aus $\tilde{\mathfrak{S}}$ und allen Operationen aus $\tilde{\mathbb{O}}$ passende Werte zuordnet.

(1) Sorten: $\mathfrak{A}$ ordnet jeder Grundsorte $\sigma \in \mathcal{S}$ eine möglicher Weise leere Menge $\mathfrak{A}(\sigma) \subseteq \sigma$ zu. Es gilt $\mathfrak{A}(\mathtt{NULL}) := \mathtt{NULL}$. Für alle $s, s' \in \tilde{\mathfrak{S}}$ mit $s = \wp(s')$ definieren wir $\mathfrak{A}(s) := \wp(\mathfrak{A}(s'))$. Für alle $s, s', s'' \in \tilde{\mathfrak{S}}$ mit $s = s' \times s''$ definieren wir analog $\mathfrak{A}(s) := \mathfrak{A}(s') \times \mathfrak{A}(s'')$. Damit ist für jede Sorte $s \in \tilde{\mathfrak{S}}$ ein entsprechendes $\mathfrak{A}(s)$ definiert.

(2) Operationen: Für alle $\chi \# \chi' \in \tilde{\mathrm{O}}$, für die $\chi \in \mathfrak{A}(\Delta(\chi))$ und $\chi' \in \mathfrak{A}(\Delta(\chi'))$ gilt, bestimmt $\mathfrak{A}$ erneut einen Wert

$$\mathfrak{A}(\chi \# \chi') \in \mathfrak{A}(\Omega(\Delta(\chi), \#, \Delta(\chi'))) \cup \{\mathtt{NULL}\}$$

Für alle übrigen $\chi \# \chi' \in \tilde{\mathrm{O}}$ setzen wir $\mathfrak{A}(c \# c') := \mathtt{NULL}$ (für alle $\chi \# \chi' \notin \tilde{\mathrm{O}}$ ist hingegen vorläufig noch kein Wert $\mathfrak{A}(\chi \# \chi')$ definiert!).

Mit $\mathbb{A}$ bezeichnen wir die Menge aller in diesem Sinn definierten Strukturen über einer Domänensignatur. Diese Menge ist endlich.

Modale Aspekte Die modale Signaturfunktion Ω_M ist wieder als endliche partielle Funktion definiert:

$$\Omega_M : \mathfrak{S} \times \mathcal{O} \times \mathfrak{S} \overset{\mathtt{NULL}}{\longmapsto} \mathfrak{S}.$$

Weil $\mathfrak{S}$ auch die nichtmodalen Sorten aus $\tilde{\mathfrak{S}}$ enthält, muss außerdem folgendes *Axiom* gelten, für alle Operationentypen $(s, \#, s')$:

$$\Omega(s, \#, s') \neq \mathtt{NULL} \rightarrow \Omega_M(s, \#, s') = \mathtt{NULL}.$$

Ohne diese Bedingung könnten einige Operationen durch Strukturen $\mathfrak{A}$ und die modale Struktur $\mathfrak{M}$ *konkurrierende Werte* zugewiesen bekommen.

Wie im Fall von $\mathsf{FLAT_a}$ und $\mathsf{FLAT_p}$ wird die modale Struktur $\mathfrak{M}$ auch hier mit *fixen Domänen* definiert (vgl. die dortige Begründung, S. 30). $\mathfrak{M}$ ordnet somit jedem $\chi \# \chi'$ mit $\Omega_M(\Delta(\chi), \#, \Delta(\chi')) \neq \mathtt{NULL}$ ein entsprechendes Element aus seiner Zielmenge zu (das auch gleich $\mathtt{NULL}$ sein kann):

$$\mathfrak{M}(\chi \# \chi') \in \Omega_M(\Delta(\chi), \#, \Delta(\chi')) \cup \{\mathtt{NULL}\}$$

Für alle anderen $\chi \# \chi'$ setzen wir $\mathfrak{M}(\chi \# \chi') := \mathtt{NULL}$.

Sinnvolle Operationen Wir nennen einen Operationentyp ω (bzw. alle Operationen dieses Typs) *sinnvoll*, falls $\Omega(\omega) \neq \mathtt{NULL}$ oder $\Omega_M(\omega) \neq \mathtt{NULL}$ gilt. Für alle

Operationstypen ω definieren wir die Funktion Ω^*:

$$\Omega^*(\omega) := \begin{cases} \Omega_M(\omega) & \text{falls } \Omega(\omega) \text{ undefiniert ist,} \\ \Omega(\omega) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $\mathbb{O}$ bezeichnen wir die (endliche!) Menge aller sinnvollen Operationen:

$$\mathbb{O} := \{\chi \,\#\, \chi' \mid \Omega^*(\Delta(\chi), \texttt{\#}, \Delta(\chi')) \neq \texttt{NULL}\}.$$

Diese Menge ist als Sorte in $\mathfrak{S}$ definiert. Wir müssen daher zusätzlich fordern, dass $\mathbb{O}$ zu allen Grundsorten aus $\mathcal{S}$ disjunkt ist.

Ein mögliches Beispiel für eine Verwendung von Operationen mit $\mathbb{O}$ als Argument sind *dynamische Logiken*.[14] Jede Operation o löst im Sinne einer dynamischen Interpretation eine *Aktion* aus und *verändert somit die Welt*; o in einer bestimmten Struktur $\mathfrak{A}$ *gesetzt* bewirkt anschaulich dass eine bestimmte neue Struktur $\mathfrak{A}'$ resultiert, bzw. eine Gruppe von Strukturen, die mit dem Auslösen der Aktion o konform gehen – steht o für das Zerhacken eines Holzscheites, so resultieren solche Strukturen in denen das Holzscheit zerhackt ist, usw. Man könnte in diesem Sinn einen Operator dyn $\in \mathcal{O}$ definieren, und einen passenden Operationentyp $(\mathbb{A}, \text{dyn}, \mathbb{O})$ mit der Zielmenge $\mathbb{A}$, bzw. auch $\wp(\mathbb{A})$, je nach konkreter Implementierung. Aus Raumgründen gehen wir jedoch nicht näher auf diesen und andere einschlägige Anwendungsfälle ein.

Wir definieren für jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ einen passenden Wert für *alle* Operationen und alle Sorten aus $\mathfrak{S}$. Für jedes $s \in \tilde{\mathfrak{S}}$ bestimmt $\mathfrak{A}$ bereits einen Wert. Gilt $s \notin \tilde{\mathfrak{S}}$, so definieren wir:

$$\mathfrak{A}(s) := s.$$

Außerdem definieren wir, für *alle* Operationen $\chi \,\#\, \chi'$ und alle Strukturen $\mathfrak{A}$ einen Wert $\mathfrak{A}(\chi \,\#\, \chi')$:

$$\mathfrak{A}(\chi \,\#\, \chi') := \begin{cases} \mathfrak{M}(\chi \,\#\, \chi') & \text{falls } \mathfrak{A}(\chi \,\#\, \chi') \text{ undefiniert ist,} \\ \mathfrak{A}(\chi \,\#\, \chi') & \text{sonst.} \end{cases}$$

[14]Zur dynamischen Logik vgl. Goldblatt (1992), Harel et al. (2000).

Syntax Alle Sorten aus $\mathring{\mathfrak{S}}$ identifizieren wir in der üblichen Weise als starre Konstantenmengen. (Die Gesamtmenge aller Konstanten ist somit zwar unendlich, das stellt jedoch kein Problem dar, da stets nur über einzelne Sorten quantifiziert wird.) Außerdem ist `NULL` eine Konstante und es ist eine zusätzliche arbiträre $\mathbb{A}$-Konstante `SELF` definiert. Für jede Sorte $s \in \mathring{\mathfrak{S}}$ existiert weiters eine abzählbare Menge von *Variablen* $x_s, x'_s, x''_s \ldots$ Die Menge aller *Terme* ist dann so definiert:

$$\tau ::= \; c \mid x \mid \tau, \tau \mid \tau \,\#\, \tau \mid \iota x.\phi,$$

wobei x Variablen sind, c Konstanten und # Operatoren. ϕ steht für beliebige *Formeln* im unten noch zu definierenden Sinn. Jeder Term τ ist erneut in eindeutiger Weise einer Sorte $s \in \mathfrak{S}$ zuzuordnen, was die Funktion $\Delta(\tau)$ realisiert. Für alle Konstanten c_s und alle Variablen x_s einer Sorte s, usw. definieren wir:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\texttt{SELF}) := \mathbb{A},\\
&\Delta(\texttt{NULL}) := \texttt{NULL},\\
&\Delta(c_s) := s,\\
&\Delta(x_s) := s,\\
&\Delta(\iota x.\phi) := \Delta(x),\\
&\Delta(\tau, \tau') := \Delta(\tau) \times \Delta(\tau'),\\
&\Delta(\tau \,\#\, \tau') := \Omega^*(\Delta(\tau), \#, \Delta(\tau')).
\end{aligned}$$

Die Menge der *atomaren Formeln* ist definiert als:

$$p ::= \; \tau \equiv \tau \mid [\lambda x.\phi](\tau).$$

Hier sind die τ Terme, ϕ ist eine Formel und es muss innerhalb der λ-Anwendung stets $\Delta(x) = \Delta(\tau)$ gelten. Beliebige, durch Verschachtelung entstehende, $\lambda x_1, \ldots, x_n.\phi$ bezeichnen wir als λ-Abstraktionen *über* $x_1, \ldots, x_n$. Mit $\mathbb{F}_{x_1,\ldots,x_n}$ bezeichnen wir die Menge aller λ-Abstraktionen über $x_1, \ldots, x_n$, in denen ϕ nur genau die freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält.

Schließlich müssen wir noch die Menge $\mathbb{F}$ aller *modalen Formeln* der Sprache SUP definieren:

$$\phi ::= \; p \mid \forall x\phi \mid \forall^* x\phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid z \Vdash \phi.$$

Hier steht p für atomare Formeln, x für Variablen und z für Terme mit $\Delta(z) = \mathbb{A}$.

Semantik Für konstantenbelegte Terme $\tau_c \neq \texttt{SELF}$, die keine definiten Deskriptionen enthalten, ist analog wie in FUN ein Wert $\mathfrak{A}(\tau_c)$ für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ definiert. Wir müssen nur noch einen passenden Wert für alle definiten Deskriptionen $\iota x.\phi$ und die Konstante SELF definieren:

$$\mathfrak{A}(\iota x.\phi) \;:=\begin{cases} c & \text{falls es genau ein } c \in \mathfrak{A}(\Delta(x)) \text{ gibt, mit } \mathfrak{A} \vDash_m \phi\left[\frac{c}{x}\right] \\ \texttt{NULL} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}(\texttt{SELF}) := \mathfrak{A}.$$

Auf dieser Grundlage definieren wir, für alle modalen Formeln ϕ, ψ, alle konstantenbelegten Terme τ_c, τ_c', alle λ-Anwendungen $[\lambda x.\phi](c)$ wo c eine Konstante ist, sowie für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle konstantenbelegten $\mathbb{A}$-Terme $\tau_{\mathbb{A}}$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \vDash_m \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \vDash_m \phi \\
\mathfrak{A} \vDash_m \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \vDash_m \phi \text{ und } \mathfrak{A} \vDash_m \psi \\
\mathfrak{A} \vDash_m \tau_c \equiv \tau_c' & \text{gdw} & (1)\ \mathfrak{A}(\tau_c) \in \mathfrak{A}(\Delta(\tau_c)) \text{ und } \mathfrak{A}(\tau_c') \in \mathfrak{A}(\Delta(\tau_c')) \\
 & & (2)\ \mathfrak{A}(\tau_c) = \mathfrak{A}(\tau_c'). \\
\mathfrak{A} \vDash_m [\lambda x.\phi](c) & \text{gdw} & \mathfrak{A} \vDash_m \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \\
\mathfrak{A} \vDash_m \forall x\phi & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\Delta(x)) = \emptyset \text{ oder} \\
 & & \text{für alle } c \in \mathfrak{A}(\Delta(x)) \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash_m \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \\
\mathfrak{A} \vDash_m \forall^* x\phi & \text{gdw} & \text{für alle } c \in \Delta(x) \text{ gilt } \mathfrak{A} \vDash_m \phi\left[\frac{c}{x}\right]. \\
\mathfrak{A} \vDash_m \tau_{\mathbb{A}} \Vdash \phi & \text{gdw} & \mathfrak{A}(\tau_{\mathbb{A}}) \vDash_m \phi.
\end{array}$$

Die Sprache SUP ist entscheidbar hinsichtlich Erfülltheit und Gültigkeit, was wir durch einen passenden Resolutionsalgorithmus, unten im Anhang A zeigen. Ebenso sollte sich eine Variante der Sprache SUP konstruieren lassen, für die sich zeigen lässt, dass sie finitistisch ist, im Sinne von Definition 1, wir verzichten hier jedoch auf diesen Nachweis.

Prädikate und Aussagenkonstanten Eine sehr elegante Möglichkeit, Prädikate in SUP darzustellen, sind λ-Abstraktionen. Ein beliebiges $\lambda x_1, \ldots, x_n.\phi$ kann alternativ als $P(x_1, \ldots, x_n)$ notiert werden. In solchen λ-Abstraktionen können insbesondere *Identitätsformeln* im Stil von $\lambda x_1, \ldots, x_n.c \,\#\, x_1, \ldots, x_n \equiv \mathtt{TRUE}$ eingebaut werden, die anschaulich als n-stellige Prädikate c interpretiert werden können.

Aussagenkonstanten können sehr einfach als Elemente einer beliebigen Sorte A interpretiert werden. Jedes $a \in A$ ist, als Aussage, genau dann *wahr*, wenn $E(a)$ gilt, wobei E in der üblichen Weise als Existenzprädikat definiert ist:

$$E(c) \quad \text{gdw} \quad \exists x : x \equiv c.$$

Auf diese Weise können die üblichen Elemente aussagen- und prädikatenlogischer Sprachen hier ohne Einschränkung implementiert werden.

Intentionale Erweiterungen Eine große Zahl von Dingen, die man intentionale Zustände nennt, können bereits im Sprachkern von SUP realisiert werden, bzw. in der modalen Erweiterung: Namen, die Gegenstände aus Sorten bezeichnen, bzw. Teilmengen von Sorten, sowie beliebige andere intentionale Zustände, die sich auf Objekte aus Sorten beziehen. Die Grenze ist nur bei solchen intentionalen Zuständen erreicht, die sich auf *Formeln* der Grundsprache beziehen. Etwa wäre dies der Fall bei solchen Dingen, wie sie gewöhnlich in epististemischen oder deontischen Logiken beschrieben werden, also Ausdrücken der Form $\#\phi$, für die die modale Strukturierung von SUP nicht alle denkbaren Ausdrucksmöglichkeiten liefert, weshalb wir diese Ausdrucksmöglichkeiten in der folgenden Spracherweiterung bereitstellen. Vgl. dazu auch oben, Abschnitt 1.2.5.

Operationen der im Folgenden beschriebenen Art haben stets die Form $\chi \,\#\, \phi$, wobei χ ein Element einer Sorte aus $\mathfrak{S}$ ist, # ein Operator und ϕ eine SUP-Formel, im Sinne der unten noch zu definierenden Syntax (man beachte, dass χ insbesondere ein beliebig-dimensionaler Vektor sein kann). Die Signaturfunktion Ω_I ist dann als endliche partielle Funktion

$$\Omega_I : \mathfrak{S} \times \mathcal{O} \xmapsto{\mathtt{NULL}} \mathfrak{S}$$

definiert. Für jedes Paar $(s, \#)$ für das $\Omega_I(s, \#) \neq \texttt{NULL}$ gilt, für jedes entsprechende $\chi \in s$ und jede Formel ϕ im unten zu definierenden Sinn, ist dann $\chi \# \phi$ eine *sinnvolle intentionale Operation*.

Wir definieren die Menge *aller* Formeln der Sprache SUP als Erweiterung der Menge $\mathbb{F}$ aller modalen SUP-Formeln:

$$\phi \ ::= \ \phi_p \mid \tau_c \# \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi.$$

Hier steht ϕ_p für Formeln aus $\mathbb{F}$ ohne freie Variablen, τ_c für konstantenbelegte Terme mit $\Delta(\tau_c) \in \mathfrak{S}$ und # für Operatoren aus $\mathcal{O}$. Mit $\mathbb{I}$ bezeichnen wir die Menge aller Formeln der Form $\tau_c \# \phi$, für die gilt dass $\Omega_I(\Delta(\tau_c), \#) \neq \texttt{NULL}$ ist. Die *intentionale Struktur* $\mathfrak{I}$ ist dann als *endliche Menge*

$$\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{A}$$

definiert. Dies gegeben und gegeben die oben definierte Erfülltheitsrelation $\models_m$ für modale SUP-Formeln definieren wir für alle Formeln ϕ_p, ϕ und ψ, alle konstantenbelegten Terme τ_c mit $\Delta(\tau_c) \in \mathfrak{S}$, alle Operatoren # und alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models \phi_p & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models_m \phi_p \\
\mathfrak{A} \models \tau_c \# \phi & \text{gdw} & (\tau_c \# \phi, \mathfrak{A}) \in \mathfrak{I} \\
\mathfrak{A} \models \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \models \phi \\
\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi.
\end{array}$$

Es ist klar, dass auch die so erweiterte Sprache SUP entscheidbar ist und finitistisch im Sinne von Definition 1.

Zweiter Teil

Kapitel 3

Ontologische Präliminarien

In diesem Kapitel sind zwei Untersuchungen zu ontologischen Schlüsselthemen zusammengefasst. Erstens eine Betrachtung zur Zeitlogik, vor dem Hintergrund finitistischer Sprachen. Zweitens eine Untersuchung zur „Begriffslogik" auf verbandstheoretischer Basis. Durchgängige Grundlage ist dabei die oben beschriebene Sprache SUP.

3.1 Zeit

Eine *zeitliche Struktur*[1] $(\mathfrak{Z}, <)$ sei definiert, als eine Menge $\mathfrak{Z} \subseteq \mathbb{A}$ von Strukturen – auch: die zeitliche *Zustände* eines Universums –, plus einer darüber definierten Relation $<$. Mit $z, z', \ldots$ quantifizieren wir über $\mathfrak{Z}$. Als „Universum" bezeichnen wir die Gesamtheit dessen, was die zeitliche Struktur beschreibt; dabei kann es sich um das Universum im astronomischen Sinn handeln, aber auch um wesentlich „kleinere" Einheiten, wie die Vorgänge in einem Computer u. dgl.

Ein z charakterisiert den Zustand eines Universums, und zwar genau so lange, so lange alle in z erfassten Merkmale konstant bleiben. Erst sobald eine Veränderung stattfindet, wird z durch ein z' abgelöst. Der hier zugrundegelegte Zeitbegriff ist also *diskret*. – In gewisser Hinsicht kann eine finitistische Sprache nur einen diskreten Zeitbegriff implementieren (eine „digitale" Zeit, anstelle einer „analogen"), eben weil es nur einen diskreten endlichen Vorrat $\mathbb{A}$ an möglichen

[1] Zur Zeitlogik vgl. Burgess (2002), Finger et al. (2002), van Benthem (1991, 1995).

Zuständen gibt. Dieser Zeitbegriff ist, wenn man so will, rein *ontologisch*. Ein *Zeitpunkt* z ist hier keine numerische Größe, sondern die Phase, wo das betrachtete Universum durch die Struktur z korrekt beschrieben wird. Dennoch kann man, wie wir unten, S. 84ff. erläutern werden, einen solchen ontologischen Zeitbegriff, sehr leicht *zusätzlich* durch numerische Größen interpretieren.

Klassische Zeitlogik In der klassischen Zeitlogik wird, gegeben eine zeitliche Struktur $(\mathfrak{Z}, <)$ die Relation $<$ als *lineare Ordnung* interpretiert[2], im Sinne von „früher oder gleichzeitig". Wir definieren die folgenden Standardoperatoren (ohne Anspruch auf Vollständigkeit):

$F\phi$	wird irgendwann einmal wahr sein:
	$\exists z : \mathtt{SELF} < z \wedge z \Vdash \phi$
$G\phi$	wird in aller Zukunft wahr sein:
	$\neg F \neg \phi$
$P\phi$	ist irgendwann einmal wahr gewesen:
	$\exists z : z < \mathtt{SELF} \wedge z \Vdash \phi$
$H\phi$	war immer wahr:
	$\neg P \neg \phi$
$\bigcirc\phi$	ist im nächsten Zustand wahr
	$(\iota z.\mathtt{SELF} \prec z) \Vdash \phi$
$U(\phi, \psi)$	bis ϕ gilt ψ (Until-Operator):
	$\exists z : \mathtt{SELF} < z \wedge z \Vdash \phi \wedge \forall z' : \mathtt{SELF} < z' < z \rightarrow z' \Vdash \psi$
$S(\phi, \psi)$	seit ϕ gilt ψ (Since-Operator):
	$\exists z : z < \mathtt{SELF} \wedge z \Vdash \phi \wedge \forall z' : z < z' < \mathtt{SELF} \rightarrow z' \Vdash \psi$
$\blacklozenge\phi$	irgendwann wahr:
	$F\phi \vee P\phi$
$\blacksquare\phi$	immer wahr:
	$\neg \blacklozenge \neg \phi$

[2]Zu den ordnungstheoretischen Grundkonzepten siehe unten, Anhang B.

Man beachte, dass die z, z' stets nur über die Teilmenge $\mathfrak{Z}$ von $\mathbb{A}$ quantifizieren. Wie stets in dieser Arbeit wird $<$ als reflexiv aufgefasst, steht also für „früher *oder gleichzeitig*“.

Der Vorteil linearer Zeitstrukturen liegt in ihrer Einfachheit. Ihr Nachteil ist, dass Linearität gleichbedeutend ist, mit einem *deterministischen* Universum, in dem es nur *einen* möglichen (und somit notwendigen) Weltverlauf gibt. Verwirft man das deterministische Konzept, dann werden auch im zeitlogischen Umfeld erweiterte *modale* Überlegungen virulent. Solche *Kombinationen* von zeitlichen und modalen Überlegungen, vor einem nicht-deterministischen Hintergrund, wollen wir im Folgenden diskutieren.[3]

Nichtlineare zeitliche Ordnungen Im Sinne einer Minimalanforderung sollte eine zeitliche Ordnungsrelation zumindest reflexiv und transitiv sein, da nur eine diese Kriterien erfüllende Relation im Sinne von „früher oder gleichzeitig“ interpretiert werden kann (eine zeitliche Logik sollte also „mindestens“ **S4** sein). Eine solche Relation nennt man *Quasiordnung*. Im Unterschied zu *partiellen Ordnungen* müssen Quasiordnungen nicht zwingend *antisymmetrisch* sein. Die Eigenschaft der Antisymmetrie kann hier deshalb nicht allgemein gefordert werden, weil in einem zeitlichen Ablauf ein und derselbe Zustand *z mehrmals auftreten* könnte (Zirkularitäten, Kreisläufe, die „ewige Wiederkehr der Gleichen“). Genau das wäre durch die Antisymmetrie jedoch ausgeschlossen. Die folgende zeitliche Struktur ist nicht antisymmetrisch:

$$\begin{tikzcd} z_0 \arrow[r] & z_1 \arrow[r] & z_2 \arrow[r] & z_3 \arrow[r] \arrow[ll, bend right] & z_4 \end{tikzcd}$$

Hier liegen in z_3 die beiden „kontrafaktischen Varianten“ vor, einer Rückkehr zum Zustand z_1, sowie eines Überganges zu z_4.

Dennoch wird es in vielen Fällen sinnvoll sein, auch Antisymmetrie einzufordern. Denken wir uns eine zeitliche Struktur als komplette Beschreibung des

[3]Vgl. auch Thomason (2002).

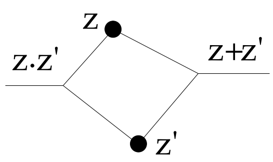
Universums (im astronomisch-physikalischen Sinn), dann wäre die Komplexität dieses Modells so enorm, dass es kaum eine Beschränkung darstellen kann, wenn man einfach per Konvention annimmt, dass es keine Wiederholungen in dem Universum gibt. Der pragmatische Grund der für Antisymmetrie spricht ist der, dass partielle Ordnungen wesentlich angenehmere formale Eigenschaften haben, wie bloße Quasiordnungen. Folgende drei Varianten wollen wir als nicht-lineare Grundtypen zeitlicher Ordnung betrachten:

(1) Quasiordnungen (reflexiv und transitiv)

(2) Partielle Ordnungen (zusätzlich antisymmetrisch)

(3) Verbandsstrukturen (zusätzlich beschränkt)

Beschränktheit bedeutet, dass für je zwei z, z' eine untere Schranke u mit $u < z$ und $u < z'$ existiert und eine obere Schranke o mit $z < o$ und $z' < o$. Wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{Z}$ existieren dann stets auch Supremum und Infimum:



Beschränktheit bedeutet bei einer partiellen Ordnung über einer endlichen Menge also nichts anderes, als dass es *keine nicht-vergleichbaren Welten* gibt. Dies ist eine unverdächtige Annahme, da man nicht-vergleichbare Welten in mehrere Zeitstrukturen zerlegen könnte und somit jederzeit „lokale Beschränktheit“ garantiert hätte: man kann jede partielle Ordnung über einer endlichen Menge so *organisieren* (indem man sie in Teilordnungen aufsplittet), dass sie beschränkt ist und also einen Verband bildet. In solchen zeitlichen Strukturen, die Verbandsstrukturen bilden, sind insbesondere das Nullelement $\mathbf{N}_{\mathfrak{Z}}$ und das Einselement $\mathbf{E}_{\mathfrak{Z}}$ relevant, als Veranschaulichungen der Vorstellung eines *absoluten Anfangs* und eines *absoluten Endes*.

Bei den folgenden Überlegungen beschränken wir uns, im Sinne einer Schwerpunktsetzung, auf den Spezialfall von zeitlichen Strukturen, die Verbände bilden (kurz: *Zeitverbände*). Wir greifen dabei auf das oben, S. 67 präsentierte mereologische Vokabular für Verbandsstrukturen zurück.

Mögliche Welten und Parallelwelten Mögliche Welten in einer nicht-linearen Zeitstruktur können anschaulich als *lineare Ausschnitte* dieser Struktur aufgefasst werden. Gegeben einen Zeitverband $(\mathfrak{Z}, <)$ definieren wir dessen *Graphen*[4] $G(\mathfrak{Z}, <)$ als den gerichteten Graphen über der Knotenmenge $\mathfrak{Z}$, wo (z, z') genau dann eine Kante ist, wenn $z \prec z'$ gilt. Als nichtgerichteten Graphen des Zeitverbandes sei der nichtgerichtete Graph über $\mathfrak{Z}$ definiert, der eine Kante $\{z, z'\}$ enthält, gdw im gerichteten Graphen die Kante (z, z') oder (z', z) existiert.

Die Menge $\mathbf{W}$ aller *möglichen Welten* in einem Zeitverband ist dann definiert als die Menge aller Teilmengen $w \subseteq \mathfrak{Z}$, über denen ein *Weg* in dem gerichteten Graphen von $(\mathfrak{Z}, <)$ existiert. Es ist klar, dass jede solche Menge aus $\mathbf{W}$ linear geordnet ist, mit der Relation $<$.

Mit $\mathbf{Z}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen Z von $\mathfrak{Z}$, für die der durch Z definierte Teilgraph des nichtgerichteten Graphen von $(\mathfrak{Z}, <)$ zusammenhängend ist. Elemente von $\mathbf{Z}$ können somit, im Unterschied zu Elementen von $\mathbf{W}$ beliebig „verzweigt“ sein.

Für irgendeinen bestimmten Zustand z werden dann diejenigen möglichen Welten interessant sein, die bei z beginnen oder enden, oder in denen z zumindest enthalten ist. Wir definieren:

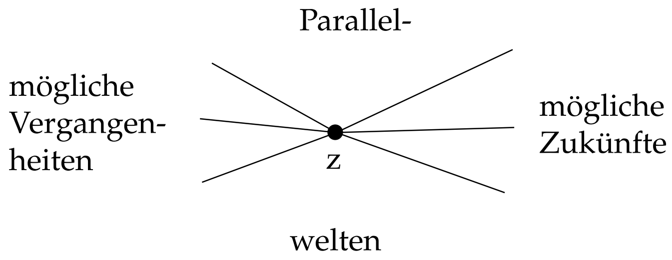
$$
\begin{aligned}
z_+ &:= \{w \in \mathbf{W} \mid z = \bigwedge w \wedge \mathbf{E}_{\mathfrak{Z}} = \bigvee w\} \\
z_- &:= \{w \in \mathbf{W} \mid z = \bigvee w \wedge \mathbf{N}_{\mathfrak{Z}} = \bigwedge w\} \\
z_\pm &:= \{w \in \mathbf{W} \mid z \in w \wedge \mathbf{E}_{\mathfrak{Z}} = \bigvee w \wedge \mathbf{N}_{\mathfrak{Z}} = \bigwedge w\}.
\end{aligned}
$$

Diese Mengen enthalten also alle „möglichen Zukünfte“ bzw. alle „möglichen Vergangenheiten“ eines Zustandes z, wobei nur diejenigen w herausgepickt werden, die bis zum Null- bzw. Einselement des Zeitverbandes reichen.

Zu beachten ist, dass durch $z_\pm$ nicht zwingend alle Zustände aus $\mathfrak{Z}$ abgedeckt

[4]Graphentheoretischen Grundbegriffe sind im Anhang B zusammengestellt.

sind. Es gilt also im Allgemeinen nicht $z_\pm = \mathfrak{Z}$, sondern es existieren *Parallelwelten*, zeitliche Zustände, die weder in einer möglichen Zukunft noch in einer möglichen Vergangenheit von z liegen:

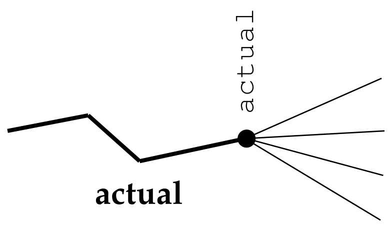


Die Menge dieser Parallelwelten ist so definiert:

$$z_\| := \{z \mid z \notin z_\pm\}.$$

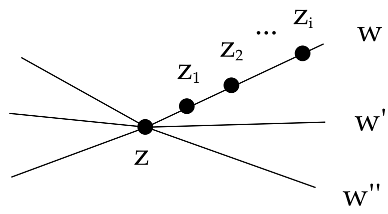
Parallelwelten sind, so kann man sagen, der Punkt, in dem sich rein zeitliche Logiken von *zeitlich-modalen Logiken* unterscheiden, da erst durch Parallelwelten *echte kontrafaktische* Elemente in eine zeitliche Struktur integriert werden.

Die aktuale Welt Für einige Überlegungen wird es nötig sein, eine Konstante anzusetzen, die die „aktuale Welt“ festlegt. So muss in einem Computersystem in irgendeiner Form der gerade aktive Zustand (des Systems wie auch der Außenwelt) benannt werden. Wir verwenden dafür die Konstante `actual`. Diese Konstante sollte zweierlei Informationen liefern. Zunächst sollte $\mathtt{actual} \in \mathfrak{Z}$ den jeweiligen Zustand des Universums angeben, dann sollte aber zusätzlich durch $\mathbf{actual} \in \mathtt{actual}_-$ eine mögliche Vergangenheit von `actual` als *die* Vergangenheit fixiert sein:



Während die Zukunft einer aktualen Welt also, in einem nicht-deterministischen System, prinzipiell offen ist, muss die Vergangenheit in irgendeiner Form „festgelegt“ sein.

Standardoperatoren in Zeitverbänden Zeitverbände sind anschaulich nicht als zeitliche „Linien“, sondern als verzweigte Strukturen organisiert:



Hier stehen w, w', w'' für einige mögliche Zukünfte aus der Menge z_+, die $z_1, \ldots, z_i$ hingegen bezeichnen Zustände innerhalb eines dieser Zukunftsverläufe w. (Genau genommen können diese Zukunftsverläufe auch untereinander verzweigt sein, dies ist jedoch hier zunächst von untergeordneter Bedeutung.)

$F\phi$ würde, in einer üblichen linearen Zeitstruktur, bedeuten, dass ϕ in irgendeinem zukünftigen Zustand von SELF erfüllt ist. In einem Zeitverband können wir das Äquivalent dazu folgendermaßen definieren:

$$\bar{F}\phi \quad \text{gdw} \quad \forall w \in \mathtt{SELF}_+ : \exists z \in w : z \Vdash \phi.$$

Also: „ϕ wird irgendwann der Fall sein“. Vergleiche jedoch:

$$F\phi \quad \text{gdw} \quad \exists z : \mathtt{SELF} < z \wedge z \Vdash \phi,$$

das hier so viel bedeutet wie: „ϕ wird *möglicher Weise* irgendwann der Fall sein.“ – In linearen Zeitlogiken hat dieser Operator (mit der identischen Definition) eine völlig andere Bedeutung!

Komplementär zu $\bar{F}$ und F können wir die *Generalisierungen* $\bar{G}$ und G definieren, als $\neg\bar{F}\neg$ und $\neg F \neg$. Auch die entsprechenden Varianten $P, \bar{P}, H, \bar{H}$ für mögliche Vergangenheiten können dann sofort definiert werden.

Der Operator $\bigcirc\phi$ kann nicht im obigen Sinn definiert werden, da es im Allgemeinen mehrere „nächste“ Zustände z mit $\mathtt{SELF} \prec z$ geben wird. Man könnte jedoch analog zu F und $\bar{F}$ entsprechende Varianten $\bigcirc$ und $\bar{\bigcirc}$ definieren („es gibt einen Folgezustand, sodass ϕ“, bzw. „in jedem Folgezustand gilt ϕ“).

Eins zu eins übernehmen können wir die obige, für den linearen Fall eingeführte, Definition von $\blacklozenge$ als:

$$\blacklozenge\phi \quad \text{gdw} \quad F\phi \vee P\phi$$

und erhalten so eine sinnvolle Ausdrucksmöglichkeit für „vielleicht irgendwann wahr". Eine stärkere Alternative wäre $\bar{F}\phi \vee \bar{P}\phi$ für „sicher irgendwann wahr". In jedem Fall unterscheiden sich solche Operatoren $\blacksquare$ und $\blacklozenge$ von den **S5**-Operatoren $\Box, \Diamond$, die auch Parallelwelten mit einbeziehen, indem sie über die ganze Menge $\mathfrak{Z}$ quantifizieren:

$$\begin{aligned} \Box\phi \quad & \text{gdw} \quad \texttt{SELF} \in \mathfrak{Z} \wedge \forall z \in \mathfrak{Z} : z \Vdash \phi, \\ \Diamond\phi \quad & \text{gdw} \quad \texttt{SELF} \in \mathfrak{Z} \wedge \neg\Box\neg\phi. \end{aligned}$$

Analog zu F und P könnte man auch für U und S hier je zwei Varianten $U, \bar{U}, S, \bar{S}$ definieren, im Stil von:

$$\begin{aligned} U(\phi,\psi) \quad & \text{gdw} \quad \exists w : (\texttt{SELF} \equiv \textstyle\bigwedge w) \wedge (\bigvee w \Vdash \phi) \wedge (\forall z \in w : z \Vdash \psi), \\ \bar{U}(\phi,\psi) \quad & \text{gdw} \quad \forall w : (\texttt{SELF} \equiv \textstyle\bigwedge w) \wedge (\bigvee w \Vdash \phi) \rightarrow (\forall z \in w : z \Vdash \psi), \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Parallelwelten und vergleichbare Zeiten Diskrete Zeitstrukturen der hier diskutierten Art haben von Vornherein den Nachteil dass dort keine konsistente Formulierung für *Gleichzeitigkeit* vorliegt. In einem klassischen „baumartigen Modell"[5] über einer Menge W von Welten und einer Menge Z von Zeiten, sind zwei Zustände (w, z) und (w', z') genau dann gleichzeitig, wenn $z = z'$ gilt. In unserer Konstruktion bedeutet für beliebige $z, z' \in \mathfrak{Z}$ die Identität $z = z'$ etwas völlig anderes (nämlich dass die beiden Zustände z, z' hinsichtlich der Wahrheitswerte aller Formeln der Grundsprache identisch sind).

Anschaulich ist vor allem im Umgang mit „Parallelwelten" (vgl. die Abbildung auf S. 82) ein Konzept von Gleichzeitigkeit erforderlich. Solche Parallelwelten sind kontrafaktische Alternativen zu dem Weltverlauf in der aktualen Welt. Frage: Gibt es eine mögliche Welt, in der zum selben *Zeitpunkt*, den z in der aktualen Welt repräsentiert, *das und das anders ist*? Eine mögliche Welt, in der der

[5]Vgl. Thomason (2002).

Großglockner (heute) um 20 Meter niedriger ist, in der es heute in Wien regnet, schneit, minus achtzehn oder plus zweiundvierzig Grad Celsius hat? – Wie lässt sich der für derartige Anwendungen grundlegende Begriff der *Gleichzeitigkeit* in einem diskreten Umfeld definieren?

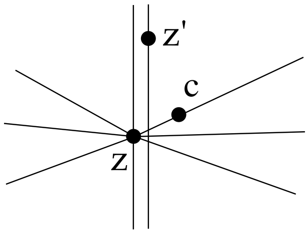
In irgendeiner Form müssen zur Bestimmung von Gleichzeitigkeit die Zustände aus einer Zeitstruktur „zeitlich normiert" werden. – Die einfachste Option wäre es, benachbarte Zustände abzuzählen und zu sagen: z ist der soundsovielte Zustand nach dem Anfang der Zeitstruktur $\mathbf{N}_\mathfrak{Z}$ und alle n-ten Zustände sind gleichzeitig in diesem Sinn. Eine solche diskrete Normierung wäre jedoch mit dem Problem konfrontiert, dass, wie eingangs angedeutet, *die zeitliche Distanz* benachbarter Zustände sehr unterschiedlich sein könnte. – Weil der *nächste* Zustand genau dann eintritt, wenn sich etwas ändert in der Welt, ist die diskrete Zustandszahl folgerichtiger Weise kein geeignetes Maß für die Bestimmung von Gleichzeitigkeit zwischen parallelen Welten. Im Regelfall wird man daher eine *externe* Normierung der Zeit-Werte vornehmen müssen.

Sei K irgendeine linear geordnete Menge, beispielsweise die Menge der ganzen oder reellen Zahlen oder ein endlicher Auszug einer solchen Menge. Dann ist eine *zeitliche Normierung* eines Zeitverbandes $(\mathfrak{Z}, <)$ als Funktion $\mathfrak{t} : \mathfrak{Z} \mapsto K$ definiert, die folgendem Axiom genügt:

$$z \ll z' \rightarrow \mathfrak{t}(z) \ll \mathfrak{t}(z')$$

(Man beachte, dass es sich bei $\ll$ auf der linken und $\ll$ auf der rechten Seite um unterschiedliche Relationen handelt.) Daraus folgt dann insbesondere, da $\mathfrak{Z}$ endlich ist, dass es zwei Zeitwerte b und e geben muss, die das Infimum und das Supremum aller Zeiten bilden, sodass b der Zeitpunkt des Nullelementes ist (absoluter Anfang), und e der Zeitpunkt des Einselementes (absolutes Ende) von $\mathfrak{Z}$.

Wie können wir auf dieser Basis Gleichzeitigkeit definieren? – Das Problem ist, dass für den Zeitpunkt $\mathfrak{t}(z)$ eines Zustandes möglicherweise kein zweiter Zustand $z' \neq z$ mit $\mathfrak{t}(z) = \mathfrak{t}(z')$ existiert, obwohl es parallele Welten gibt, deren Zustände zeitlich *um z herum angesiedelt sind*:



Wir definieren die Funktion $\mathfrak{d}$, die jedem z ein Intervall zuordnet:

$$\mathfrak{d}(z) := \begin{cases} \mathfrak{t}(z) & \text{falls } z = \mathbf{E}_3 \\ [\mathfrak{t}(z), \mathfrak{t}(z')[& \text{mit } z \prec z' \text{ und} \\ & \mathfrak{t}(z) - \mathfrak{t}(z') \text{ kleinstmöglich, sonst.} \end{cases}$$

Auf dieser Grundlage definieren wir die Relation $\approx$ über $\mathfrak{Z}$:

$$z \approx z' \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{d}(z) \cap \mathfrak{d}(z') \neq \emptyset.$$

In obiger Abbildung beispielsweise gilt $z \approx z'$, weil dies vor dem z nächstgelegenen Zustand c liegt. $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation. Wir definieren die entsprechenden **S5**-Operatoren

$$\blacktriangle\phi \quad \text{gdw} \quad \exists z : z \approx \texttt{SELF} \wedge z \Vdash \phi,$$
$$\triangle\phi \quad \text{gdw} \quad \neg\blacktriangle\neg\phi.$$

Anschaulich funktionieren $\blacktriangle$ und $\triangle$ genau *orthogonal* zu den oben definierten Operatoren $\blacklozenge, F, P$, etc. (Vgl. die obigen Beispiele: eine mögliche Welt, in der der Großglockner heute um 20 m niedriger ist, etc.)

3.2 Begriffe

Die folgenden Überlegungen basieren auf verbandstheoretischen Konzepten der „formalen Begriffsanalyse" wie sie in Ganter & Wille (1996) dargestellt sind. Es wird versucht, diese Theorie (unter Zuhilfenahme modallogischer Konzepte) in die Sprache SUP zu integrieren, im Sinne einer *Begriffslogik*, also eine Logik, die Merkmale (λ-Abstraktionen, Prädikate) und Gegenstände einer prädikativen Sprache in bestimmter Weise verknüpft. Dieser Ansatz ist nicht zu verwechseln mit einschlägigen begriffslogischen Überlegungen aus dem Umfeld der *description logics*.[6]

Begriffe über Kontexten Sei $s \in \mathfrak{S}$ irgendeine SUP-Sorte (vgl. oben, S. 69). Dann nennen wir ein $\mathbf{G} \subseteq s$ eine *Gegenstandsmenge* über s. Ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von Variablen, mit $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = s$, dann ist jedes $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{F}_{x_1,\ldots,x_n}$ (vgl. oben, S. 72) eine mit $\mathbf{G}$ *korrespondierende Merkmalsmenge*. Jedes so geartete Paar $\kappa = (\mathbf{G}, \mathbf{M})$ nennen wir eine *Klassifikation* über s. Gilt $\mathbf{G} = s$, so nennen wir die Klassifikation *total*.

Für beliebige Merkmale $m = \lambda x_1, \ldots, x_n.\phi$ und beliebige Gegenstände $g = c_1, \ldots, c_n$ in einer Klassifikation schreiben wir durchwegs einfach $m(g)$ anstelle von $[\lambda x_1, \ldots, x_n.\phi](c_1, \ldots, c_n)$. Man beachte, dass diese $m(g)$ *atomare Formeln* ohne freie Variablen in SUP sind. Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ ist somit die Formel $\mathfrak{A} \Vdash m(g)$ mit einem eindeutigen Wahrheitswert belegt.

Für jede Klassifikation $\kappa = (\mathbf{G}, \mathbf{M})$ und jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ ist die Relation $\mathbb{K} \subseteq \mathbf{G} \times \mathbf{M}$ definiert als:

$$(g, m) \in \mathbb{K} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \Vdash m(g)$$

Wir nennen dieses $\mathbb{K}(\kappa, \mathfrak{A})$ den *formalen Kontext von κ in $\mathfrak{A}$*. Formale Kontexte können in Kreuztabellen dargestellt werden. Ein Beispiel:

	n	r	c
Julius Cäsar (C)	×	×	×
Gaius Maier (G)		×	
Cäsar das Hündchen (H)	×		

n: heißt Cäsar, r: hat den Rubikon überschritten, c: cäsart

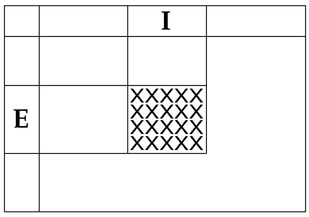
Eine naheliegende Auffassung ist die, einen *Begriff* als ein Paar $(\mathbf{E}, \mathbf{I})$ aus einer Menge von Gegenständen $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{G}$ und Merkmalen $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{M}$ zu interpretieren. Das formale Kriterium, das solche Paare erfüllen sollten, ist die *Übereinstimmung* von

[6]Vgl. Baader et al. (2003).

Extension und Intension: Alle Gegenstände aus **E** weisen genau die Merkmale **I** auf und alle Merkmale aus **I** sind die Merkmale von genau allen Gegenständen aus **E**. Wir definieren, für beliebige **E**, **I**:

$$\mathbf{E}' := \{m \in \mathbf{M} \mid \forall g \in \mathbf{E} : (g, m) \in \mathbb{K}\}$$
$$\mathbf{I}' := \{g \in \mathbf{G} \mid \forall m \in \mathbf{I} : (g, m) \in \mathbb{K}\}$$

Ein *Begriff* **b** ist dann jedes Paar $(\mathbf{E}, \mathbf{I})$ für das $\mathbf{E}' = \mathbf{I}$ und $\mathbf{I}' = \mathbf{E}$ gilt. In einer Kreuztabelle lässt sich ein so definierter Begriff veranschaulichen als größtmögliches Rechteck aus Spalten und Zeilen, in dem alle Felder angekreuzt sind[7]:



Im obigen Beispiel würden etwa Julius Cäsar und Cäsar das Hündchen einen Begriff (CH, n) bilden, weil sie das gemeinsame Merkmal haben, Cäsar zu heißen. Gaius Maier und Cäsar das Hündchen bilden keinen Begriff, weil sie kein gemeinsames Merkmal haben. Julius Cäsar alleine würde im Sinne dieser Vorstellung einen Begriff (C, nrc) bilden, mit den drei Merkmalen *nrc*, usw.

Wir nennen **E** *die Extension* und **I** *die Intension* des Begriffs. Mit $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ bezeichnen wir die Menge aller so definierten Begriffe eines formalen Kontextes. Sind $\mathbf{b}_1 = (\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_1)$ und $\mathbf{b}_2 = (\mathbf{E}_2, \mathbf{I}_2)$ Begriffe, so heißt $\mathbf{b}_1$ ein *Unterbegriff* von $\mathbf{b}_2$, falls $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2$ gilt (was gleichbedeutend ist mit $\mathbf{I}_2 \subseteq \mathbf{I}_1$). $\mathbf{b}_2$ ist dann ein *Oberbegriff* von $\mathbf{b}_1$ und man schreibt $\mathbf{b}_1 < \mathbf{b}_2$. Die mit $<$ geordnete Menge $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ bildet dann, wie in Ganter & Wille (1996, S. 20ff.) gezeigt, einen *vollständigen Verband*, wobei das Infimum $\bigwedge$ und das Supremum $\bigvee$ für jede Menge $B \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ so definiert sind:

[7] Vgl. Ganter & Wille (1996, S. 18).

$$\bigwedge_{(\mathbf{E},\mathbf{I})\in B}(\mathbf{E},\mathbf{I}) := \left(\bigcap_{(\mathbf{E},\mathbf{I})\in B}\mathbf{E}, \left(\bigcup_{(\mathbf{E},\mathbf{I})\in B}\mathbf{I}\right)''\right)$$

$$\bigvee_{(\mathbf{E},\mathbf{I})\in B}(\mathbf{E},\mathbf{I}) := \left(\left(\bigcup_{(\mathbf{E},\mathbf{I})\in B}\mathbf{E}\right)'', \bigcap_{(\mathbf{E},\mathbf{I})\in B}\mathbf{I}\right).$$

Begriffe dieser Art haben gewissermaßen eine Doppelfunktion als Merkmale (bzw. Merkmalsmengen) und als Gegenstände (bzw. Gegenstandsmengen). Irgendein Begriff **b** könnte somit in einem geeigneten Kalkül *sowohl als Term als auch als Prädikat eingesetzt werden*. Sei beispielsweise **w** ein Begriff für Wasser. Dann sind folgende Konstruktionen denkbar:

$\mathbf{w}(c)$ „c ist Wasser",

$P(\mathbf{w})$ „Wasser hat das Merkmal P",

$\forall\mathbf{w} : \phi$ „Für alle Gegenstände, die Wasser sind, gilt ϕ".

Modale Gesichtspunkte Einer logischen Nutzung der eben definierten Konzepte steht vor allem eines im Weg: Klassifikationen führen, sobald sie „kontingente Merkmale" enthalten, in unterschiedlichen Strukturen zu sehr unterschiedlichen formalen Kontexten. Ein in einer Struktur $\mathfrak{A}$ konstruierter Begriff **b** müsste dann in beliebigen anderen Strukturen keineswegs immer als Begriff existieren. Für eine sinnvolle Nutzung von Klassifikationen im Sinne einer Begriffslogik müsste man demnach sicherstellen, dass Kontexte von Klassifikationen in allen (für eine bestimmte Untersuchung relevanten) Strukturen identisch existieren und somit zu den selben Begriffsverbänden führen.

Gegebene sei ein Paar von **S5**-Operatoren $\Box, \Diamond$, die über einer Menge $W \subseteq \mathbb{A}$ von Strukturen quantifizieren, im Stil von:

$$\Box\phi \quad \text{gdw} \quad \forall\mathfrak{A} \in W : \mathfrak{A} \Vdash \phi.$$

(Die Standardanwendung, die wir im folgenden Kapitel diskutieren werden, wird der Fall sein, dass W mit der Grundmenge $\mathfrak{Z}$ einer zeitlichen Struktur identifiziert wird.) Bei den folgenden Überlegungen gehen wir immer von einer gegebenen Klassifikation $\kappa = (\mathbf{G}, \mathbf{M})$ aus und quantifizieren mit den Variablen

$g, g', \ldots$ über **G** und mit $m, m', \ldots$ über **M**. (Dabei können Quantoren stets unverfänglich als endliche Konjunktionen definiert werden, weshalb wir problemlos auch über Merkmale quantifizieren können, obwohl dafür kein elementarer Quantifikationsmechanismus in SUP existiert; diese Technik wurde bereits oben, S. 41 erläutert und angewendet.) Alle Formeln werden in einer arbiträren Struktur $\mathfrak{A} \in W$ ausgewertet.

Die Aufgabe lautet nun zunächst, eine Klassifikation zu finden, deren Kontexte in allen Strukturen aus W identisch sind. Eine einfache Lösung wäre die, einfach nur solche Klassifikationen zuzulassen, für die gilt:

$$\forall^* g \, \forall^* m : \Box m(g) \vee \Box \neg m(g).$$

Jeder Gegenstand hat ein Merkmal entweder immer oder nie. c ist entweder immer Wasser oder nie Wasser. – Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Sprache SUP als *free logic* konzipiert wurde, es könnte also sein dass irgendein c das Wasser ist, in einigen Strukturen nicht existiert. Es wäre keine adäquate Lösung, dieses *c aus diesem Grund* aus der Klassifikation auszuschließen.

Eine modifizierte Variante, die Existenz von Gegenständen berücksichtigt, könnte zunächst so aussehen:

$$\text{(M1)} \quad \forall^* g \, \forall^* m : \Box[E(g) \to m(g)] \vee \Box[E(g) \to \neg m(g)]$$

Also: wenn der Gegenstand g existiert, dann hat er immer das Merkmal m oder er hat es nie. Diese Option erzwingt aber geradezu die Annahme eines weiteren (komplementären) Axioms:

$$\text{(M2)} \quad \forall^* g \, \forall^* m : \Box[\neg E(g) \to \neg m(g)]$$

Das heißt: wenn ein Gegenstand existiert, dann hat er nach (M1) entweder immer oder nie ein Merkmal m, wenn er *nicht* existiert, dann hat er nach (M2) in keinem Fall das Merkmal m (egal ob er es im Existenzfall hätte oder nicht). Axiom (M2) vermeidet Absurditäten wie die, dass ein Gegenstand g nur dann das Merkmal m hat, wenn er nicht existiert. (Dieses Merkmal m könnte beispielsweise als $\neg E(g)$ definiert sein.) – Klassifikationen, die die Axiome (M1) und (M2) erfüllen, nennen wir *normal in* $\Box$.

Wir definieren, für jede in $\Box$ normale Klassifikation $\kappa = (\mathbf{G}, \mathbf{M})$ den Kontext $\mathbb{K}_\Box$ als:

$$(g, m) \in \mathbb{K}_\Box \quad \text{gdw} \quad \Diamond m(g)$$

Dann ergibt sich sofort der Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_\Box)$. Sei $\mathbf{b} = (\mathbf{E}, \mathbf{I})$ irgendein Begriff aus $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_\Box)$ und m das durch Konjunktion aus $\mathbf{I}$ gebildete Merkmal (im Fall von $\mathbf{I} = \emptyset$ definieren wir m anhand einer beliebigen Tautologie ϕ). Sei weiters x eine $\mathbf{G}$-Variable (bzw., im Fall eines mehrdimensionalen $\mathbf{G}$ ein passender Vektor $x = x_1, \ldots, x_n$, wobei $\forall x$ als $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ gelesen werden muss). Dann gilt:

$$\Box[\forall x : x \in \mathbf{E} \leftrightarrow m(x)].$$

Beweis: durch das domänenrelative Quantifizieren erreicht x nur genau alle c für die $E(c)$ gilt (also alle existierenden Entitäten). Die Aussage folgt dann unmittelbar. $\Box$

Ein „Begriffskalkül“ Sei $\mathfrak{B}$ die Begriffsmenge des Kontextes $\mathbb{K}_\Box$ einer normalen Klassifikation. Dann definieren wir dafür eine Menge $B, B', B'', \ldots$ von Variablen, sowie, für jedes einzelne Element von $\mathfrak{B}$, eine Menge von Konstanten $b, b', b'', \ldots$ Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Folge, die genau eine Konstante für jeden Begriff aus $\mathfrak{B}$ enthält. Dann definieren wir:

$$\forall B\phi := \phi\left[\tfrac{b_1}{B}\right] \wedge \ldots \wedge \phi\left[\tfrac{b_n}{B}\right].$$

Konstanten haben dann die oben bereits angedeutete begriffliche „Doppelfunktion“, als Merkmale und Gegenstandsmengen. Sei b eine Konstante eines Begriffs $\mathbf{b} \in \mathfrak{B}$ mit $\mathbf{b} = (\mathbf{E}, \mathbf{I})$ und $I = \{m_1, \ldots, m_k\}$. Sei außerdem x eine Variable respektive ein passender Variablenvektor für die $\mathfrak{B}$ zugrundeliegende Gegenstandsmenge. Dann definieren wir:

$$\forall b\phi := \forall x : x \in \mathbf{E} \rightarrow \phi$$

$$b := \iota g. \forall x : x \in g \leftrightarrow x \in \mathbf{E}$$

$$b(x) := m_1(x) \wedge \ldots \wedge m_k(x)$$

Von dieser Technik eines „Quantifizierens über Begriffe“ werden wir unten, im Abschnitt 4.2 Gebrauch machen.[8]

[8]Man beachte, dass dieser „Begriffskalkül“ ausschließlich aus Definitionen besteht, die Problemlos in der Sprache SUP realisiert werden können, es handelt sich also um keine substanzielle Erweiterung der Sprache SUP.

Kapitel 4

Bausteine einer diskreten Raum-Zeit-Theorie

4.1 Konkrete Geometrie

In dem gesamten (und relativ neu etablierten) Untersuchungsfeld der *Raumlogik*[1] existiert eine Gruppe von diskreten Ansätzen – Stichwort: digitale Geometrie und digitale Topologie. Diese im Bereich Computergrafik (Computer Aided Design, digitale Fotografie) entstandenen Ansätze basieren jedoch weitgehend auf dem Konzept einer regelmäßigen Einteilung kontinuierlicher Räume in „digitale Portionen", also gewissermaßen auf *Rasterungen* kontinuierlicher Hintergrundräume.[2] Es sind dies Varianten diskreter Geometrien, die klar zu unterscheiden sind, von dem hier präsentierten Ansatz einer *konkreten Geometrie*, die von Vornherein ohne kontinuierlichen Hintergrundraum konzipiert ist. Die *Punkte* einer konkreten Geometrie sind konkrete raumzeitliche Objekte: Elementarteilchen, Atome, Moleküle und andere Massekörper. Hervorstechende formale Eigenschaft einer solchen Geometrie ist, dass sie keine elementare *topologische* Interpretation besitzt. Topologie kann nur „lokal", anhand von speziellen Gegenstandstypen etabliert werden (vgl. das Beispiel unten, S. 106).

[1] Vgl. van Benthem et al. (200xa).

[2] Vgl. etwa Herman (1998).

Ein *konkreter Raum* sei definiert als eine Menge $\mathfrak{R}$, die, gegeben eine fundamentale endliche Menge M von *Monaden*, deren Potenzmenge $\mathfrak{R} := \wp(M)$ darstellt. Monaden sind die kleinsten Einheiten, von denen in dem konkreten Raum die Rede sein soll. Dies können, je nach intendierter Anwendung, Quarks sein, Moleküle, Tennisbälle oder Galaxienhaufen.

$\mathfrak{R}$ ist in dem selben Sinn eine Abstraktion wie der $\mathbb{R}^3$ eine Abstraktion ist. Während der $\mathbb{R}^3$ auf der Vorstellung eines Raumes aus ausdehnungslosen Punkten beruht, basiert $\mathfrak{R}$ auf der Vorstellung eines Raumes aus endlich vielen und ausgedehnten kleinsten Massekörpern.

Der generelle Unterschied zu üblichen digitalen Geometrien besteht darin, dass durch den Ansatz einer Menge von primitiven Entitäten als raumzeitliche Massekörper, keine Festlegungen über *Aneinandergrenzen* (Adjazenz) von Entitäten möglich sind: dieses Buch kann einmal adjazent sein mit einem Tisch auf dem es liegt, ein andermal kann sich das Buch Kilometer von dem Tisch entfernt befinden. – Übliche digitale Geometrien werden als *Graphen* definiert, deren Knoten räumliche Entitäten sind, deren Kanten Adjazenz – also Aneinandergrenzen – von räumlichen Entitäten bestimmen.[3] – In unserem Fall existieren anstelle der Festlegungen über Adjazenz fundamentale Festlegungen über *mereologische Beziehungen*, die sich aus dem atomistischen Aufbau von $\mathfrak{R}$ ergeben.

Eine mögliche Welt (ein Zustand, eine Struktur) soll in einer konkreten Geometrie, im Sinne des Konzepts einer *free logic*, durch eine Teilmenge $M_\exists$ von M charakterisiert sein, und den entsprechenden *Teilraum* $\mathfrak{R}_\exists$ von $\mathfrak{R}$ der sich als Potenzmenge $\wp(M_\exists)$ errechnet (vgl. oben, Abschnitt 2.1.4). Für die so definierte *mereologische Ordnung* über $\mathfrak{R}$ verwenden wir das Symbol $\sqsubset$, um Verwechslungen mit der zeitlichen Ordnung $<$ zu vermeiden.

Für die skizzierte Vorstellung ist die Annahme grundlegend, dass Monaden aus der Grundmenge M bestimmte „substanzielle“ Merkmale besitzen. Beispielsweise könnte M aus Molekülen bestehen. Die Konsequenz wäre, dass jede chemische Veränderung in einem Körper b dazu führen müsste, dass dieser Körper in

[3]Vgl. Herman (1998, S. 57ff.)

den folgenden Zuständen durch einen anderen Körper b' ersetzt wird. Beispielsweise könnte b die Seite eines Buches sein, die durch Verbrennung ihre chemische Struktur verändert. In den Folgezuständen würde dieses b durch ein entsprechendes b' ersetzt (Asche statt Papier), aber auch jeder Teil $b'' \sqsubset b$ von b und jedes b''' von dem b ein Teil $b \sqsubset b'''$ ist würden in den Folgezuständen durch andere Entitäten ersetzt. Grob gesprochen: das Universum, in dem die Buchseite verbrannt ist, ist ein anderes als das wo sie noch aus Papier besteht. Um einen konkreten Raum mit einer zeitlichen Struktur zu verknüpfen muss also eine entsprechende Zuordnungsfunktion ρ definiert werden, die bei benachbarten Strukturen $z \prec z'$ die Entitäten aus $z(\mathfrak{R})$ und $z'(\mathfrak{R})$ aufeinander abbildet. Die Idee einer solchen Zuordnung von „Gegenstücken" geht zurück auf die David Lewissche *counterpart theory*.[4]

Gegeben diese Überlegungen formulieren wir die Rahmenbedingungen einer konkreten Geometrie, anhand folgender Definitionen:

Definition 4 (Diskrete Raum-Zeit-Struktur) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}} = (\mathfrak{Z}, <, M, \rho)$ heißt *diskrete Raum-Zeit-Struktur*, wenn folgendes gilt: $(\mathfrak{Z}, <)$ ist eine zeitliche Struktur in SUP (vgl. Kapitel 3.1), M ist eine als SUP-Sorte definierte Menge von Monaden, mit dem darüber definierten konkreten Raum $(\mathfrak{R}, \sqsubset)$ und seinen für alle $z \in \mathfrak{Z}$ definierten Unterräumen $z(\mathfrak{R}) = \wp(z(M))$. (Für alle $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{Z}$ gelte $\mathfrak{A}(M) = \emptyset$.) Für je zwei $z, z' \in \mathfrak{Z}$ mit $z \prec z'$ oder $z' \prec z$ definiert ρ eine *bijektive Abbildung* zwischen $z(\mathfrak{R})$ und $z'(\mathfrak{R})$, genannt die *Einbettung* der diskreten Raum-Zeit-Struktur. Für das derart jedem $b \in z(\mathfrak{R})$ in $z'(\mathfrak{R})$ zugeordnete Element schreiben wir $\rho(b, z, z')$, bzw. $\rho(b, z', z)$.

Definition 5 (Diskrete Weltlinien) Gegeben den Graphen G mit der Knotenmenge $V = \mathfrak{R} \times \mathfrak{Z}$, der für je zwei z, z' mit $z \prec z'$ und für jedes $b \in z(\mathfrak{R})$ und das entsprechende $b' := \rho(b, z, z')$ die Kante $\{(b, z), (b', z')\}$ enthält, definieren wir $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}})$ als die Menge aller größtmöglichen zusammenhängenden Teilgraphen in G. Jedes derartige $\ell \in \mathfrak{L}$ nennen wir eine *diskrete Weltlinie* in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$.

[4]Vgl. Lewis (1983a).

In jedem z ist somit eindeutig ein $b \in \mathfrak{R}$ als Repräsentation der diskreten Weltlinie ℓ definiert, was in natürlicher Weise eine Interpretation von diskreten Weltlinien als $\mathfrak{R}$-*Terme* ermöglicht:

$\mathfrak{A}(\ell) :=$ das definite b, das ℓ in $\mathfrak{A}$ repräsentiert.

Definition 6 Eine diskrete Raum-Zeit-Struktur $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}} = (\mathfrak{Z}, <, M, \rho)$ ist *regulär*, wenn folgendes gilt:

(i) **Eindeutigkeit**: Jedes $b \in \mathfrak{R}$ ist in genau einem $\ell \in \mathfrak{L}$ in irgendeinem Knoten enthalten.

(ii) **Ordnungserhaltung**: Für alle $z, z' \in \mathfrak{Z}$ mit $z \prec z'$ oder $z' \prec z$ und alle $b, b' \in z$ gilt:

$$b \sqsubset b' \rightarrow \rho(b, z, z') \sqsubset \rho(b', z, z').$$

(iii) **Partialität**: Es existiert ein möglicher Weise leerer Unterverband **NULL** von $\mathfrak{R}$, sodass folgendes gilt:

(a) Für alle $\mathfrak{A}$, alle ϕ und alle $b \in \mathbf{NULL}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \Vdash \phi \leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash \phi\left[\tfrac{\mathtt{NULL}}{b}\right].$$

(b) Für alle $b \in \mathbf{NULL}$ existieren z, z' mit $b \in z(\mathfrak{R})$ oder $b \in z'(\mathfrak{R})$ und $\rho(b, z, z') \notin \mathbf{NULL}$. Das heißt: es gibt keine diskrete Weltlinie, die nur aus Nullelementen besteht.

(c) In jedem $\ell \in \mathfrak{L}$ kommt *höchstens ein Element* $b \in \mathbf{NULL}$ vor.

Partialität ist ein Werkzeug, mit dem der denkbare Fall umgesetzt werden kann, dass Partikel ersatzlos aus einer Welt verschwinden, bzw. „aus dem Nichts“ auftauchen, bzw. auch dass sich Partikel in mehrere *aufsplitten* oder zu mehreren *verschmelzen* (näheres weiter unten).

Für jedes $b \in \mathfrak{R}$ ist, nach (i), *die* Weltlinie $\ell \in \mathfrak{L}$ definiert, die einen Knoten enthält, in dem b enthalten ist. Diese Weltlinie bezeichnen wir mit $\mathfrak{l}(b)$. Weiters müssen für das Einselement $\mathbf{E} = \bigvee z(\mathfrak{R})$ und das Nullelemente $\mathbf{N} = \bigwedge z(\mathfrak{R})$ jedes $z \in \mathfrak{Z}$ entsprechend die Weltlinien $\mathfrak{l}_{\mathbf{E}} := \mathfrak{l}(\mathbf{E})$ und $\mathfrak{l}_{\mathbf{N}} := \mathfrak{l}(\mathbf{N})$ definiert sein.

Satz 3 Gegeben die Definition der $\mathfrak{L}$-Relation $\Subset$ als

$$\ell \Subset \ell' \quad \text{gdw} \quad \exists z : z \Vdash \ell \sqsubset \ell'$$

bildet $(\mathfrak{L}, \Subset)$ einen vollständigen Verband.

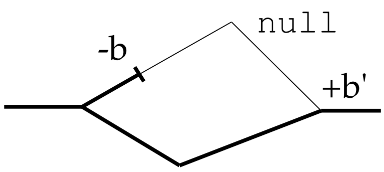
Beweis: Aufgrund des Ordnungserhaltungsaxioms (ii) ist klar, dass die Definition von $\Subset$ eindeutig ist, und es gilt, für alle ℓ, ℓ':

$$\ell \Subset \ell' \leftrightarrow \forall z : z \Vdash \ell \sqsubset \ell'.$$

Umgekehrt gilt:

$$\forall b, b' : b < b' \leftrightarrow \mathfrak{l}(b) \Subset \mathfrak{l}(b') \qquad \square$$

Man beachte, dass diskrete Weltlinien im Allgemeinen nicht „linienförmig“ sein werden, da die zeitliche Ordnung hier nicht zwingend eine lineare Ordnung darstellt. Ist $(\mathfrak{Z}, <)$ beispielsweise eine Verbandsstruktur (dies war oben, im Abschnitt 3.1, der Standardfall), so haben Weltlinien die selbe Verbandsstruktur wie $(\mathfrak{Z}, <)$, sind also anschaulich eher als „Weltnetze“ zu charakterisieren. Im Verein mit Partialität sind dann solche Dinge möglich, wie „zeitweise Abwesenheit“ von Entitäten:



Mögliche Interpretationen Wie die dargestellte Konstruktion im Detail anzusetzen ist, welche Variante im konkreten Fall zum Tragen kommt, hängt einerseits von der physikalischen Realität ab – davon ob Elementarteilchen verschwinden und neu entstehen können etwa, ob sie in mehrere Teilchen zerfallen können, oder ob sie ihre elementaren Merkmale verändern können. Andererseits hängt diese Entscheidung schlicht davon ab, *welche Arten von Teilchen* man als Partikel einer diskreten Raum-Zeit-Struktur ansetzt. – Generell sind die folgenden formalen Optionen hervorzuheben:

In allen Welten die selben Elementarteilchen Der einfachste Fall ist der, wo in allen Zuständen aus $\mathfrak{Z}$ die selben Partikel existieren, also stets $z(M) = M$ gilt. Die formale Auflösung von diskreten Weltlinien ist dann trivial. Für jedes $\ell \in \mathfrak{L}$ existiert ein $b \in \mathfrak{R}$, sodass für alle z gilt dass $z \Vdash \ell \equiv b$ ist.

In allen Welten die selben Teilchen oder Null Als Variante des ersten Falls könnte man annehmen, dass sich Teilchen zwar nie verändern aber entstehen oder vergehen können. In diesem Fall würde für jedes ℓ ein analoges b existieren und ein zusätzliches $N \in$ **NULL**, sodass für alle z gilt: $\ell(z) = b$ *oder* $\ell(z) = N$.

Der Standardfall Teilchen können ihre Repräsentationsform ändern und sie können Null werden. Dies ist die geradlinige Interpretation des Konzepts einer diskreten Raum-Zeit-Struktur.

Teilchen teilen sich und verschmelzen Der komplizierteste Fall ist der, wo Teilchen nicht nur ihre Merkmale verändern, sondern dabei in mehrere Teilchen zerfallen, bzw. auch von mehreren Teilchen zu einem verschmelzen können. Ein Beispiel für diesen Fall wäre die Situation, wo M aus Molekülen, wie H_2O u.dgl. besteht. Zerfällt ein Wasser-Molekül in Wasserstoff- und Sauerstoffatome, so liegt ein Zerfall von Partikeln vor. Reagieren umgekehrt Wasserstoff- und Sauerstoffatome zu einem Wassermolekül, so hat man es mit einer Fusion von Molekülen zu tun.

In diesem Fall könnte man formal so vorgehen, dass man die Weltlinien derjenigen Teilchen, die in irgendwelchen Zuständen kraft Fusion oder Zerfall zusammenhängen, durch ein zusätzliches Sprachelement *bündelt*. – Zwei Mengen von Weltlinien L, L' sind *komplementär*, wenn folgendes gilt:

$L|L'$ (sie sind disjunkt),

entweder sind alle Linien aus L gleich Null oder alle aus L'.

Das heißt: es sind in jedem z *entweder* die Weltlinien aus L existierende Entitäten oder die aus L'. So kann sehr leicht Fusion und Zerfall implementiert werden.

4.2 Skizzen zur Klassifikation raumzeitlicher Objekte

4.2.1 Substanzen

Unter einer *Substanz* wollen wir hier jede Art von Gegenstand verstehen, dessen ausschlaggebende Merkmale im gesamten Untersuchungsbereich (in allen „möglichen Welten") stabil sind. Wir denken dabei an eine Interpretation von Substanzen in einem explizit physikalisch-chemischen Sinn. So hat Wasser immer und überall die „substanzielle" Eigenschaft H_2O zu sein. Hingegen haben solche Dinge wie Schwäne oder Tiger solche „artbestimmenden" Merkmale die tendenziell nur „prototypischer" Natur sind: nicht jeder Tiger ist gestreift, nicht jeder Schwan weiß, aber *typische* Schwäne und Tiger haben diese Merkmale. – Das heißt: wir suggerieren hier, dass man bei der Klassifikation materieller Gegenstände unterschiedliche Modalitäten unterscheiden sollte, unterschiedliche „Härtegrade" bei definitorischen Merkmalen. Im gegenständlichen Abschnitt befassen wir uns mit den härtesten Varianten, während wir in den restlichen Abschnitten dieses Kapitels zusehends weichere Formen behandeln werden.[5]

Gegeben sei eine reguläre diskreten Raum-Zeit-Struktur $\mathfrak{R}_{\mathfrak{z}} = (\mathfrak{Z}, <, M, \rho)$. **S** sei eine normale Klassifikation über $\mathfrak{R}$, im oben, S. 91 definierten Sinn. Anschaulich soll **S** alle „substanziellen Merkmale" in $\mathfrak{R}$ erfassen. (Diese Merkmale könnten etwa solche Dinge sein wie chemische Verbindungen, Aggregatszustände, Temperatur, Druck, kristalline Struktur, etc.) Als Variablen für **S** legen wir $s, s', s'', \ldots$ fest. Mit $b, b', \ldots$ quantifizieren wir über $\mathfrak{R}$, mit $\mathbf{b}, \mathbf{b}', \ldots$ über $\wp(\mathfrak{R})$.

[5]Vergleichbare Überlegungen zu Substanzen findet man in Bunt (1985), Parsons (1970). Zur Problematik prototypischer und essenzieller Merkmale vgl. Kripke (1980), Putnam (1975a, 1983), Rosch (1978), Lakoff (1987). Das Beispiel mit den weißen und schwarzen Schwänen stammt von Popper (1989).

Ein flexibler Atombegriff Die klassische philosophische Vorstellung von Atomen ist (oft in Verbindung mit der Vorstellung der Ausdehnungslosigkeit) die, keinen Teil zu besitzen. Wir wollen, unter Weglassung des Aspekts der Ausdehnungslosigkeit, Atome in diesem Sinn als *Monaden* bezeichnen. Ein entsprechendes Merkmal **mon** kann so definiert werden:

$$\mathbf{mon} := \lambda b.(\nexists b' : b' \lll b).$$

Also: b ist eine Monade gdw es keinen nichtleeren echten Teil besitzt (vgl. oben, S. 67). – Es ist klar, dass es sich bei derartigen Monaden stets nur um Partikel aus der Menge M handeln kann, aus der $\mathfrak{R}$ besteht.

Demgegenüber wollen wir hier ein anderes denkbares Atomkonzept hervorheben. Atome nicht als *unteilbare* Entitäten, sondern als Entitäten mit einem (beliebigen) Merkmal s, für die gilt, dass *kein echter Teil dieses Merkmal besitzt*. Formal definieren wir dieses zweistellige Merkmal $\mathbf{at}(b, s)$ – für: „b ist ein s-Atom“ – als:

$$\mathbf{at} := \lambda b, s.(s(b) \land \forall b' : b' \ll b \rightarrow \neg s(b'))$$

Beispielsweise hätte ein Wasser-Molekül das Merkmal **at**, da kein echter Teil des Moleküls (etwa ein Wasserstoff-Atom, irgendein Elektron, Quark u. dgl.) *selbst die Eigenschaft hat Wasser zu sein*. Demgegenüber wäre ein Wassertropfen kein Wasser-Atom in diesem Sinn, weil viele echte Teile davon die Wasser-Eigenschaft aufweisen. – Eine triviale Konsequenz aus der Definition von **at** ist folgende: ist $\mathbf{b}$ eine Menge von s-Atomen (gilt also $\forall b \in \mathbf{b} : \mathbf{at}(b, s)$), so gilt, dass alle Elemente von $\mathbf{b}$ paarweise disjunkt sind.

Axiome einer Substanzontologie Ausgehend von dem eben definierten Atom-Konzept ergibt sich folgendes Bild für eine Substanzontologie: Ein Gegenstand b, der einer Substanz s angehört muss in eine Menge von Atomen dieser Substanz zerfallen. In allen $z \in \mathfrak{Z}$ und für alle Substanzen s muss also gelten:

$$\text{(S1)} \quad \forall b : s(b) \leftrightarrow \exists \mathbf{b} : \bigvee \mathbf{b} \equiv b \land \forall b' \in \mathbf{b} : \mathbf{at}(b', s).$$

Also: ein b gehört genau dann der Substanz s an, wenn es eine Menge $\mathbf{b}$ gibt, sodass (1) das Supremum $\bigvee \mathbf{b}$ gleich b ist und (2) jedes $b' \in \mathbf{b}$ ein s-Atom darstellt. – Jeder Gegenstand einer Substanz *s zerfällt in s-Atome*. Diese Forderung ist nicht-trivial, da im Allgemeinen eine notwendige Eigenschaft eines Objekts nicht zwingend für irgendeinen Teil des Objekts gelten muss.

(S1) fordert nicht nur, dass jede Substanz in Atome zerfällt (die Seite $\rightarrow$) des Axioms, sondern auch ($\leftarrow$), dass jeder Gegenstand, der in s-Atome einer Substanz zerfällt, insgesamt ein Objekt dieser Substanz ist. Ist daher b ein Objekt mit $s(b)$ und ist $\mathbf{b}$ das laut (S1) definierte Objekt, das aus s-Atomen besteht, und dessen Supremum gleich b ist, dann gilt, wie man sofort sieht:

$$\forall b' \, \exists b'' \in \mathbf{b} : b'' < b' < b \rightarrow s(b).$$

Also: ist b' ein Teil von b und enthält es irgendein Atom aus $\mathbf{b}$, dann ist b' stets ein Objekt der Substanz s.

Die zweite wichtige und nichttriviale Forderung, die wir an eine normale Klassifikation stellen, die eine Substanz-Ontologie bildet, ist die, dass sich prinzipiell jedes b in Substanzen zerlegen lässt; jedes b lässt sich als *Partition* darstellen, deren Elemente Substanzen sind:

$$\text{(S2)} \quad \forall b \, \exists \mathbf{b} : [\forall b' \in \mathbf{b} \, \exists s : s(b')] \land b \equiv \bigvee \mathbf{b}.$$

Das zweite Axiom besagt also insbesondere, dass jedes b entweder irgendeiner Substanz s angehört (sodass $s(b)$ gilt) oder aber, im Stil von (S2) in eine Menge $\mathbf{b}$ unterschiedlicher Substanzen zerfällt. Diese Forderung ist deswegen nicht-trivial, weil in einer beliebigen normalen Klassifikation durchaus einige Gegenstände existieren könnten, die in keiner Weise klassifiziert sind, einfach weil in keiner möglichen Welt ein solcher Gegenstand irgendeines der in der Klassifikation erfassten Merkmale aufweist. (S2) garantiert somit die *lückenlose* Klassifikation der Objekte aus $\mathfrak{R}$ in der normalen Klassifikation $\mathbf{S}$.

Reduzierte Weltlinien (Substanzen II) Substanzen respektive normale Klassifikation bilden extrem harte Ontologien, deren tendenzielle Unflexibilität sich in der Vereinigung dieser Konstrukte mit dem diskreten Weltlinienkonzept zeigt. In einer Weltlinie ℓ können die Objekte aus $\mathfrak{R}$, die dieses ℓ repräsentieren, wechseln (aufgrund bestimmter chemischer Prozesse). Nun könnte es aber dennoch sein, dass einige oder alle Repräsentationen einer Weltlinie ein bestimmtes konstantes Merkmal m aufweisen; beispielsweise könnten einige Repräsentationen das Merkmal haben, festen Aggregatszustand zu besitzen (vgl. Abschnitt 4.2.2). Dabei könnte es gleichzeitig innerhalb von ℓ zu verschiedenen chemischen Modifikationen kommen, sodass die Entität aus $\mathfrak{R}$, die ℓ repräsentiert fortwährend wechselt. ℓ würde also in unterschiedlichen Zuständen aus ganz verschiedenen Substanzen im oben definierten Sinn bestehen und hätte dennoch die stabile Eigenschaft „fester Aggregatszustand".

Zunächst hat diese Konstruktion also wenig mit den restriktiven Substanz-Überlegungen der obigen Art zu tun. Wir können keineswegs fordern, dass ein Merkmal m der skizzierten Form, ein *notwendiges* Merkmal ist, in der Weise wie in normalen Klassifikationen. Dennoch hat m, wenn auch in einem ganz anderen Sinn, eine Art von *Stabilität*, die an Substanzen erinnert. Wir entwerfen einen passenden Formalismus. Die Idee ist die, dass man, gegeben ein Merkmal m und einen bestimmten Ausgangszustand z, für jedes b, das in z das Merkmal m aufweist, alle vorhergehenden und nachfolgenden Zustände herauspickt, wo das entsprechende $\mathfrak{l}(b)$ weiterhin das Merkmal m besitzt (die Repräsentation „stoppt", sobald in irgendeinem Zustand das $\mathfrak{l}(b)$ aufhört, das Merkmal m zu haben).

Gegeben ein b und ein Merkmal m definieren wir die *reduzierte Weltlinie* $b@m$ als Term, dem für jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ ein Wert $\mathfrak{A}(b@m)$ zugeordnet ist:

$$\mathfrak{A}(b@m) := \begin{cases} \mathfrak{A}(\mathfrak{l}(b)) & \text{falls } \mathfrak{A} \Vdash m(\mathfrak{l}(b)) \\ \texttt{NULL} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir quantifizieren über reduzierte Weltlinien, indem wir für jedes Merkmal m einen Satz Variablen $\mu, \mu', \ldots$ definieren und eine entsprechende Explikation für $\forall \mu \phi$ angeben:

$$\forall \mu \phi := \forall b : \phi \left[\frac{b@m}{\mu} \right].$$

Das heißt: wir ersetzen in der Formel ϕ jedes vorkommende μ durch $b@m$ und quantifizieren die resultierende Formel über b.

4.2.2 Feste Körper

In einem diskreten Raum $\mathfrak{R}$ existiert zunächst kein konsistentes Konzept für Zusammenhang. Irgendein $b \in \mathfrak{R}$ kann ebenso ein Buch, also einen anschaulich zusammenhängenden Gegenstand bezeichnen, wie es ein Buch plus ein Lichtjahre davon entferntes Wasserstoffatom bezeichnen kann, also etwas das einigermaßen unzusammenhängend ist. Die Hoffnung scheint unbegründet, dass man in $\mathfrak{R}$ eine durchgängige topologische Konzeption entwickeln kann, wie man sie in kontinuierlichen Räumen jederzeit erhält. Vielmehr scheint Topologie hier nur *lokal* möglich, hinsichtlich bestimmter Teilmengen und Teilaspekte. Ein Beispiel für eine solche „lokale Topologie" wollen wir im Folgenden diskutieren. In vieler Hinsicht hat dieser Ansatz Ähnlichkeit mit gängigen Konzepten einer „naiven Physik" aus dem Bereich der KI.[6]

Eine diskrete „Topologie" fester Körper Wir beschränken uns, im Sinne einer Schwerpunktsetzung, bei unseren Überlegungen auf eine Ontologie *fester Körper*. Anschaulich könnte bei festen Körpern *Zusammenhang* in folgender Weise definiert werden:

> *Ein fester Körper ist genau dann zusammenhängend, wenn man keinen seiner Teile isolieren kann, ohne dabei etwas zu zerstören.*

Dieses Buch ist zusammenhängend, *weil* man eine einzelne Seite aus ihm nur dann isolieren kann, wenn man sie gewaltsam herausreißt. – Wie aber definiert man dieses „Herausreißen"?, bzw. Zerstörung fester Körper als solche? – Wir wollen hier den Weg gehen, dass wir derartige Vorgänge quasi-axiomatisch als sprachliche Primitive einführen, als *elementare Operationen* gewissermaßen.

Sei *fest* das Merkmal, festen Aggregatszustand zu besitzen. Dieses Merkmal soll folgendem Axiom genügen:

(F1) $\forall b, b' : (\mathrm{fest}(b) \wedge b' \lll b) \rightarrow \mathrm{fest}(b')$.

[6] Vgl. Hayes (1985), Hobbs & Moore (1985), sowie Russell & Norvig (2003, S. 368).

Das heißt: jeder Teil eines festen Körpers ist fest. – Wir befassen uns hier mit den reduzierten Weltlinien des Merkmals *fest* und quantifizieren darüber mit den Variablen $\mathrm{sol}, \mathrm{sol}', \ldots$ (vgl. die entsprechenden Definitionen am Ende des vorangegangenen Abschnitts).

Als physikalische Operationsprimitive führen wir $\circledast$ ein, für *Zerstörung* eines festen Gegenstandes und $\odot$ für das *Isolieren* respektive „Einsacken" eines festen Objekts. Etwas genauer:

$\odot$ ist hier gedacht als das Merkmal eines sol, sich *in einem vollständig verschlossenen Sack* zu befinden, sodass dieser Sack *genau* dieses sol enthält. Bei der Nutzung dieses Merkmales geht es durchwegs um die Frage, ob es *theoretisch* möglich wäre, irgend ein sol (in irgendeiner möglichen Zukunft) in einem Sack zu verpacken (egal wie groß dieser sein muss, oder wie kompliziert dieser Vorgang wäre), ohne dabei etwas zerstören zu müssen.

$\circledast$ repräsentiert die Vorstellung der *physischen Zerstörung* irgendeines sol: zerbrechen, zerreiben, aufbohren – jeder irreversible Vorgang, nicht aber das temporäre Verbiegen eines flexiblen Gegenstandes beispielsweise. Wir denken uns $\circledast$ hier als ein Merkmal implementiert, das den Moment (den Vorgang) der Zerstörung repräsentiert. $\circledast b$ gilt, sobald b zerstört wird. – Gegeben die Merkmale $\odot$ und $\circledast$ fordern wir die Gültigkeit des Axioms:

(F2) $\forall\, \mathrm{sol} : U(\odot\, \mathrm{sol}, \neg\circledast\, \mathrm{sol})$.[7]

(F2) besagt, dass jeder feste Körper eingesackt werden kann, unter der zusätzlichen Bedingung, dass man bis zum Moment der Einsackung diesen Körper selbst nicht zerstören darf. Das heißt: man kann diese Buchseite einsacken, muss dabei zwar das Buch zerstören, indem man die Seite herausreißt, die Seite selbst muss dabei jedoch nicht zerstört werden. – Dagegen definieren wir:

$$\mathrm{einsackbar} := \lambda\, \mathrm{sol} . U(\odot\, \mathrm{sol}, \forall\, \mathrm{sol}' : \neg\circledast\, \mathrm{sol}').$$

[7] Die hier verwendeten zeitlichen Operatoren wurden oben, S. 83ff. definiert.

Etwas ist *einsackbar*, wenn es eingesackt werden kann, ohne dass dazu *irgendetwas* zerstört werden muss. Ein Buch wäre in diesem Sinn *einsackbar*, nicht aber eine einzelne Seite des Buches. Aber auch unzusammenhängende Gegenstände, wie ganze Bibliotheken, Bienenschwärme oder alle Autos auf einem Parkplatz wären *einsackbar*, weshalb es sinnvoll ist eine Einschränkung dieser Eigenschaft zu definieren:

$$\alpha := \lambda\, \mathrm{sol}\,.[\mathrm{einsackbar}(\mathrm{sol}) \wedge \forall\, \mathrm{sol}' : \mathrm{sol}' \ll \mathrm{sol} \rightarrow \neg\, \mathrm{einsackbar}(\mathrm{sol}')].$$

Ein Gegenstand der α ist, ist zwar *einsackbar*, aber kein echter Teil von ihm hat dieses Merkmal. α ist somit eine im Sinne der Konzeption, oben, S. 100 *atomare* Eigenschaft. Wir nennen solche Objekte daher auch *Festkörper-Atome*.

Festkörper-Atome werden im Regelfall feste Teile haben – das Buch besteht aus Seiten und Molekülen, der menschliche Körper aus Gliedmaßen, Zellen, etc. Wir definieren:

$$\theta := \lambda\, \mathrm{sol}\,.[\neg\, \mathrm{einsackbar}(\mathrm{sol}) \wedge U(\alpha(\mathrm{sol}), \forall\, \mathrm{sol}' : \mathrm{sol}' \ll \mathrm{sol} \rightarrow \neg\alpha(\mathrm{sol}')].$$

Also: der Gegenstand ist nicht einsackbar, aber es gibt eine mögliche Zukunft in der der Gegenstand ein Festkörper-Atom ist und für die gilt dass bis dahin kein echter Teil des Gegenstandes ein α ist. Letztere Bedingung stellt sicher, dass der Gegenstand nicht zwischendurch aus anderen Gegenständen „zusammengeklebt“ wird; der Gegenstand muss bloß „herausgeschnitten“ werden, aus seiner Umgebung. Beispiele für θ sind also solche nichteinsackbaren festen Teile wie die Seite eines Buches, irgendeine Zone auf der Haut meines Körpers. – Für θ sollen die folgenden beiden Axiome gelten:

(F3) $\quad \forall\, \mathrm{sol} : \theta(\mathrm{sol}) \rightarrow \exists!\, \mathrm{sol}' : \alpha(\mathrm{sol}) \wedge \mathrm{sol}' < \mathrm{sol}.$

(F4) $\quad \forall\, \mathrm{sol} : \theta(\mathrm{sol}) \rightarrow \exists!\, \mathrm{sol}' : \theta(\mathrm{sol}) \wedge \mathrm{sol} \,|\, \mathrm{sol}' \wedge \alpha(\mathrm{sol} + \mathrm{sol}').$

(F3) besagt, dass zu jedem θ genau ein α existiert, von dem dieses θ ein Teil ist. (F4) drückt aus, dass es zu jedem θ ein disjunktes θ' gibt, sodass die Summe von θ und θ' ein α ist.

Jedes Festkörper-Atom ist ein völlig homogener zusammenhängender Block von festen Materialien (die jedoch ihrerseits unterschiedlichste chemische Zusammensetzungen haben können). Es bietet sich daher an, derartige α-Objekte anhand seiner θ-Teile topologisch zu analysieren.

Wir quantifizieren mit den Variablen $a, a', \ldots$ über die reduzierten Weltlinien des Merkmals α. Mit $t, t', \ldots$ quantifizieren wir analog über die reduzierten Weltlinien von θ. Wir definieren:

$$t \| t' \quad \text{gdw} \quad t | t' \wedge \theta(t + t') \qquad (t, t' \text{ sind } \textit{angrenzend})$$
$$t \sim t' \quad \text{gdw} \quad \exists a : t < a \wedge t' < a \qquad (t, t' \text{ sind } \textit{affin})$$

Gemäß (F3) muss für jedes t genau ein a existieren, mit $t < a$. Wir bezeichnen dieses a mit *atom*(t):

$$\text{atom}(t) := \iota a.t < a.$$

Die Menge aller $t < a$ als topologischer Raum Abschließend bieten wir eine explizit topologische Interpretation der θ-Objekte an. Wir definieren für alle a die Menge aller t, die dem a angehören:

$$X(a) := \{t \mid t < a\}$$

Außerdem definieren wir die Menge $O(a) \subseteq \wp(X(a))$ der *offenen Mengen* von a als:

$$O(a) := \{o \subseteq X(a) \mid \theta(\bigvee o)\} \cup \{\emptyset\}.$$

Wie man sofort sieht, ist X immer eine offene Menge im Sinne dieser Definition. Außerdem gilt, dass beliebige Vereinigungsmengen und Durchschnittsmengen wieder offen sind, da auch $\emptyset$ offen ist. Das jedem a zugeordnete Paar $(X, O)(a)$ bildet also einen *topologischen Raum*, im Sinne der üblichen[8] Definition: Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, O), wobei X eine Menge ist und O eine Menge von Teilmengen von X – die Menge der *offenen Mengen* von X, sodass gilt:

[8] Siehe etwa Jänich (1994).

(1) Beliebige Vereinigungsmengen von offenen Mengen sind offen.

(2) Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.

(3) $\emptyset$ und X sind offen.

Die Idee ist, dass so in natürlicher Weise ein Begriff für zusammenhängende Teile von festen Körpern u. dgl. definiert werden kann.

4.2.3 Individuen und natürliche Arten

In bestimmten Fällen reicht die Abstraktion reduzierter Weltlinien nicht aus, zur Charakterisierung von „weltlinienartigen" Objekten. Ist b eine Entität, die in einem bestimmten Zustand einen Menschen repräsentiert, so wird die Weltlinie dieses b nicht alle Repräsentationen des Menschen beinhalten, aufgrund des Stoffwechsels, der dazu führt, dass im Laufe der Zeit die materiellen Bestandteile des Menschen aus solchen Dingen gebildet sind, die ursprünglich keine Teile von b gewesen waren. Durch den Stoffwechsel „verwandelt" der Mensch gewissermaßen Teile der Außenwelt in Teile seines Körpers, und er gibt Teile seines Körpers an die Außenwelt ab. Im Folgenden skizzieren wir formale Konzepte zum Umgang mit derartigen Objekten.

Sei m irgendein Merkmal über $\mathfrak{R}$. Dann definieren wir R_m als Relation über $\mathfrak{R} \times \mathfrak{Z}$, sodass gilt, für alle b, z:

$$bR_m z \quad \text{gdw} \quad [z \Vdash m(b)] \wedge [\nexists b' : b \ll b' \wedge z \Vdash m(b')].$$

Das heißt: $bR_m z$ gilt genau dann, wenn b in z das Merkmal m aufweist und wenn zusätzlich gilt, dass kein b', von dem b ein echter Teil ist, dort dieses Merkmal m aufweist. Die Definition fasst also in jedem z alle *größtmöglichen* Dinge heraus, die dort die Eigenschaft m besitzen.

Wir nennen ein m ein *Individualmerkmal* und schreiben $\mathrm{ind}(m)$, genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) **Singularität:** Für jedes z gibt es höchstens ein b mit $bR_m z$.

(2) **Eindeutigkeit:** Gilt $bR_m z$, so existieren keine disjunkten Teile b', b'' von b, sodass $z \Vdash m(b')$ und $z \Vdash m(b'')$ gilt.

(3) **Kontinuität:** Es gibt ein $Z \in \mathbf{Z}$, sodass gilt: für genau jedes $z \in Z$ existiert ein b mit $bR_m z$.

(4) **„Geburt“:** Gegeben ein Z im obigen Sinn, gilt $\bigwedge Z \in Z$, das heißt: das Infimum $\bigwedge Z$ von Z ist ein Element von Z selber. Dieses Infimum $\bigwedge Z$ nennen wir die *Geburt* des Individuums.

(5) **Stetigkeit:** Gegeben ein Z im obigen Sinn, gilt für alle $z, z' \in Z$ dass b, b'' existieren, für die gilt:

$$bR_m z \wedge [z' \Vdash m(b'')] \wedge b'' < \mathfrak{l}(b).$$

Weist ein Merkmal all diese Eigenschaften, außer der ersten auf, so nennen wir es ein *Artmerkmal*. – Die erste Eigenschaft unterscheidet somit Individuen, wie Julius Cäsar, von natürlichen Arten, wie Menschen oder Tiger.

Die Bedingung (2) Eindeutigkeit stellt sicher, dass es sich bei den durch m herausgepickten Objekten immer um Individuen handelt, im Sinne von „Unteilbarkeit“ (auch dann, wenn diese Individuen in einer natürlichen Art mehrfach repräsentiert sind). So existieren anschaulich, bei einem Menschen zwar viele unterschiedliche materielle Objekte, die man beispielsweise als „Julius Cäsar“ identifizieren kann (Julius mit oder ohne Haare, mit oder ohne seinen linken Zeigefinger, etc.), aber es existieren – im Sinne dieser Intuition – nicht zwei disjunkte Objekte, die man beide als Julius Cäsar identifizieren kann.

Bedingung (3) Kontinuität fordert, dass die Repräsentationen eines Individuums oder einer natürlichen Art, in einem zusammenhängenden Komplex von Zuständen $Z \subseteq \mathfrak{Z}$ existieren müssen, das heißt, ein Individuum oder eine natürliche Art kann nicht aus einer Welt verschwinden und dann erneut entstehen – es könnte sich dann niemals um das selbe Individuum, bzw. die selbe natürliche Art wie zuvor handeln.

Bedingung (4) stellt sicher, dass es einen eindeutig bestimmten initialen Zustand – das Infimum $\bigwedge Z$ der Zustandsfolge, in denen m existiert – geben muss, in dem dieses Objekt *entsteht*: seine „Geburt“.

Bedingung (5) schließlich stellt sicher, dass ein Objekt nicht beim Übergang von einem Zustand auf einen nachfolgenden Zustand plötzlich auf einen völlig anderen Weltteil „gebeamt“ werden kann. In gewisser Hinsicht stellt die Bedingung also sicher, dass es so etwas wie „Seelenwanderung“ nicht geben kann.

Dieses – zugegebener Maßen sehr kursorische – Beispiel zeigt, wie man mit wesentlich komplexeren Typen von Objekten in einem formalen Umfeld der hier spezifizierten Art umgehen könnte. Es zeigt, dass man, auf der Basis eine konkreten Geometrie, nicht nur eine Ontologie physikalisch-chemischer Entitäten entwickeln kann, sondern auch eine Ontologie biologischer und anderer komplexerer Gegenstandstypen.

Schlussbemerkung Die in diesem letzten Kapitel zusammengestellten formalen Skizzen sollten illustrieren, wie eine formale Ontologie vor einem konsequent finitistischen Hintergrund konzipiert werden könnte, in dem neuralgischen Punkt einer Raum-Zeit-Theorie die bislang, trotz der klaren Verendlichung der Welt im Rahmen der modernen Physik, als eine Domäne für Modelle des Kontinuums gegolten hatte. Es geht dabei nicht darum, das Kontinuum *auszuschließen* – auch in einem diskreten Umfeld werden die Modelle des Kontinuums unerlässliche Hilfsmittel sein –, sondern darum, zu zeigen, dass eine endliche Betrachtung von Raum und Zeit eine *sinnvolle* Alternative ermöglicht zu solchen Modellen, die von Vornherein *nur* im Kontinuum operieren. So setzt dieses Schlusskapitel gleichsam eine externe Pointe auf den im ersten Teil der Arbeit entwickelten endlichen Ansatz, der dort im Rahmen von sehr abstrakten Überlegungen zur formalen Logik motiviert wurde.

Anhang

Anhang A

Resolutionsalgorithmen

Die Grundidee ist folgende: ist eine finitistische Sprache entscheidbar hinsichtlich Erfülltheit $\mathfrak{A} \vDash \phi$, dann ist sie auch entscheidbar hinsichtlich Gültigkeit, da die Menge aller Strukturen endlich ist, somit Gültigkeit geradlinig durch Checken aller Strukturen konstatiert werden kann. Erfülltheit lässt sich aber in jedem Fall anhand relativ simpler Baumstrukturen entscheiden. Im Folgenden präsentieren wir die Konstruktion solcher Baum-Algorithmen für die wichtigsten im Hauptteil der Arbeit definierten Sprachen. Wegen der Rückführbarkeit aller dieser Sprachen auf die Aussagenlogik FIN_a, im Stil von Definition 1, oben, S. 40, ist jedoch streng genommen nur der Algorithmus $\mathbf{RES}_a$ für FIN_a wirklich erforderlich. Die anderen Algorithmen seien dennoch angeführt, da sie eine gewisse Erläuterungsfunktion besitzen.

Die Aussagenlogik FIN_a Der im Folgenden beschriebene Algorithmus $\mathbf{RES}_a$ konstruiert für jedes beliebige Paar $(\mathfrak{A}, \phi)$ aus einer Struktur und einer endlichen aussagenlogischen Formel eine Baumstruktur und wertet diese zu einem Wahrheitswert aus. Wir verwenden für die entsprechenden Manipulationen und Abfragen die folgenden metasprachlichen Notationen:

$x :: y ::: z$	wenn (der Knoten die Form) x (hat), dann y, sonst z
$x \rightarrow y$	ersetze y durch x,
$\rightarrow x$	ersetze den aktuellen Knoten durch den Knoten x,

$\downarrow x$	füge an den aktuellen Knoten den Unterknoten x an,
$\downarrow_i x$	füge x als i-ten Unterknoten an,
Blatt	der aktuelle Knoten ist (ab sofort) ein Blatt,
$\forall_\downarrow k$	für alle Unterknoten k des aktuellen Knotens gilt ...,

Die Idee ist die, dass zunächst ein einzelner Knoten $\mathfrak{A} * \phi$ gegeben ist, aus dem dann sukzessive der passende Baum mit atomaren Formeln als Blätter konstruiert wird. Zum Durchsuchen des konstruierten Baumes sind entsprechende Algorithmen erforderlich, wie sie in der computerwissenschaftlichen Standardliteratur zu finden sind.[1] Von Details absehend nehmen wir an, dass folgende drei Algorithmen gegeben sind:

next **i** := Gehe zum nächsten Knoten der kein Blatt ist und der keine Unterknoten hat. Existiert kein solcher Knoten, so liefere `FALSE` zurück.

next **b** := Gehe zum nächsten Knoten der ein Blatt ist aber nicht die Form $\top$ oder $\perp$ hat. Existiert kein solcher Knoten, so liefere `FALSE` zurück.

next **i**′ := Gehe zum nächsten Knoten, dessen Unterknoten Blätter sind. Existiert kein solcher Knoten, so liefere `FALSE` zurück.

Dem Algorithmus $\mathbf{RES}_a(\mathfrak{A}, \phi)$ wird eine Struktur $\mathfrak{A}$ und eine endliche Formel ϕ übergeben. Dies ist der erste Teil des Algorithmus $\mathbf{RES}'_a(\mathfrak{A}, \phi)$:

[1]Siehe beispielsweise Knuth (1997).

$\rightarrow \mathfrak{A} * \phi$

while (next **i**) **do**

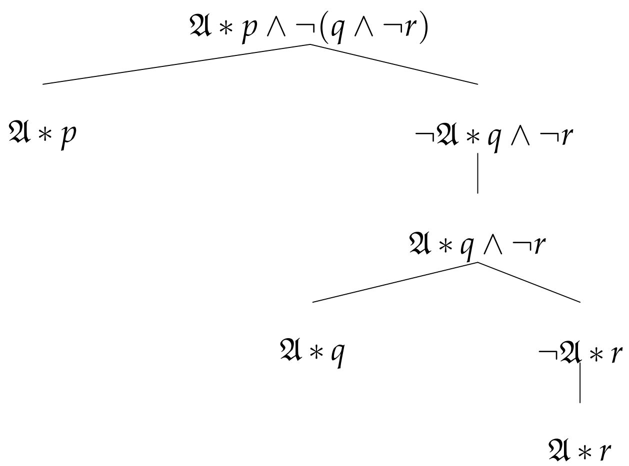
$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} * \neg\phi & :: & \rightarrow \neg\mathfrak{A} * \phi, \quad \downarrow \mathfrak{A} * \phi \\ \mathfrak{A} * \phi \wedge \psi & :: & \downarrow \mathfrak{A} * \phi, \quad \downarrow \mathfrak{A} * \psi \\ \mathfrak{A} * p & :: & \text{Blatt} \end{array}$$

end while

Hier wird zunächst $\mathfrak{A} * \phi$ als aktueller – und bis dahin auch einziger – Knoten festgelegt. Der folgende Block wird aufgerufen, so lange der Algorithmus next **i** nicht den Wert `FALSE` zurückliefert. Hat ein Knoten die Form $\mathfrak{A} * \neg\phi$ so wird die Negation vor den Knoten geschoben und ein Unterknoten $\mathfrak{A} * \psi$ wird angehängt. Bei Konjunktionen werden zwei entsprechende Unterknoten angefügt. Enthält der Knoten eine atomare Formel, so wird festgesetzt dass der Knoten ein Blatt ist.

Man sieht sofort, dass dieser Algorithmus für endliche Formeln ϕ jedenfalls endlich ist. Es gilt: ist n die Anzahl der atomaren Formeln von ϕ und m die Anzahl der Junktoren, so hat der durch $\mathbf{RES}'_a(\mathfrak{A}, \phi)$ konstruierte Baum genau $n + m$ Knoten. Denn: n ist die Anzahl der Blätter, und jeder Knoten der kein Blatt ist repräsentiert genau einen Junktor.

Dies ist ein Beispiel für den durch $\mathbf{RES}'_a$ konstruierten Baum einer Formel $p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$:



Der zweite Teil des Algorithmus $\mathbf{RES}''_a(\mathfrak{A}, \phi)$ sieht folgendermaßen aus:

while (next **b**) **do**

$\mathfrak{A} * p \quad :: \quad (p \in \mathfrak{A} \quad :: \quad \to \top \quad ::: \quad \to \bot)$

end while

while (next **i**′) **do**

$\mathfrak{A} * \phi \wedge \psi \quad :: \quad (\forall_{\downarrow} k : k \equiv \top \quad :: \quad \to \top \quad ::: \quad \to \bot)$

$\neg\mathfrak{A} * \phi \quad :: \quad (\forall_{\downarrow} k : k \equiv \bot \quad :: \quad \to \top \quad ::: \quad \to \bot)$

$\quad :: \quad$ Blatt

end while

Im ersten Block werden mit next **b** alle Blätter aufgerufen, die nicht die Form $\top$ oder $\bot$ haben und werden in intuitiver Weise in eine solche Form übergeführt: $\top$ falls $p \in \mathfrak{A}$, also falls p *wahr* ist, $\bot$ sonst.

Im zweiten Block werden dann alle Knoten bearbeitet, deren Unterknoten Blätter sind. Bei Konjunktionen ist der Wert $\top$ wenn beide Unterknoten den Wert $\top$ liefern. Bei Negationen ist der Wert $\top$, falls der einzige Unterknoten den Wert $\bot$ liefert. Nachdem einer der beiden Arbeitsschritte durchgeführt wurde muss der Knoten noch als Blatt definiert werden.

Es gilt: Nach endlich vielen Schritten stoppt der Algorithmus und es gilt entweder $\mathbf{RES}_a(\mathfrak{A}, \phi) = \top$ oder $\mathbf{RES}_a(\mathfrak{A}, \phi) = \bot$.

Der Beweis dieses Satzes ist trivial. – Wir definieren, für alle $\mathfrak{A}, \phi$: $\mathfrak{A} \vdash_{\mathbf{RES}} \phi$ genau dann wenn die Auswertung des eben beschriebenen Resolutionsalgorithmus $\top$ ergibt. Dann gilt:

$$\mathfrak{A} \vdash_{\mathbf{RES}} \phi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \vDash \phi.$$

Beweisidee: Es muss gezeigt werden, dass der Aufbau und die Auswertung des Baumes $\mathbf{RES}(\mathfrak{A}, \phi)$ präzise der Definition der Semantik entspricht. So ist eine atomare Formel genau dann erfüllt wenn sie im Resolutionsbaum den Wert $\top$ erhält, eine Konjunktion genau dann wenn beide entsprechenden Unterknoten im Resolutionsbaum den Wert $\top$ besitzen, eine Negation führt in jedem Fall zur Umkehrung des Wahrheitswertes von $\top$ auf $\bot$ respektive von $\bot$ auf $\top$. $\square$

Geht man davon aus, dass zum Ermitteln ob p ein Element von $\mathfrak{A}$ ist durchschnittlich $|\mathfrak{A}|/2$ Rechenschritte erforderlich sind und enthält eine Formel n atomare Formeln und m Junktoren, dann kann man folgendes sagen: Es sind m Rechenschritte erforderlich zur Konstruktion des Baumes gemäß $\mathbf{RES}'_a$. Für die Auswertung der Blätter in $\mathbf{RES}''_a$ sind dann durchschnittlich $n|\mathfrak{A}|/2$ Rechenschritte vonnöten, für die Reduktion des Baumes auf die Wurzel m Rechenschritte. Insgesamt erhält man also eine Größenordnung von $n|\mathfrak{A}|/2 + 2m$ Rechenschritten. Will man die *Gültigkeit* einer aussagenlogischen Formel ϕ ermitteln, so muss man die Menge $A(\phi)$ aller atomaren Aussagen in ϕ zugrundelegen und die darüber gebildete Menge $\wp(A(\phi))$ aller Strukturen. Mit $n := |A(\phi)|$ und der Anzahl m der Junktoren aus ϕ ergibt sich somit eine Größenordnung von

$$2^{n+1}m + \frac{n}{2}\sum_k \binom{n}{k} k$$

Rechenschritten.

Die Prädikatenlogik erster Stufe $\mathsf{FIN_p}$ Erneut wird ein zweiteiliger Algorithmus $\mathbf{RES}_p(\mathfrak{A}, \phi)$ definiert. Der erste Teil $\mathbf{RES}'_p(\mathfrak{A}, \phi)$ sieht so aus:

$\rightarrow \mathfrak{A} * \phi$

while (next **i**) **do**

wie oben werden $\neg$ und $\wedge$ aufgelöst

$\mathfrak{A} * \forall x \phi$	::	$\mathfrak{A}(\Delta(x)) = \emptyset$
	::	$\downarrow \top$
	:::	$\forall c \in \mathfrak{A}(\Delta(x)):\quad \downarrow z * \phi\left[\frac{c}{x}\right]$
$\mathfrak{A} * P(t_1, \ldots, t_n)$	::	Blatt
$\mathfrak{A} * t_1 \equiv t_2$	::	Blatt
$\top$	::	Blatt

end while

Die Subsitutionsanweisung ist hier so zu verstehen, dass die Substitution durchgeführt und die resultierende Formel dann eingesetzt wird. Alle entsprechenden Substitutionsformeln werden als Unterknoten an den Quantor $\forall$ angehängt. Zu beachten ist dann insbesondere, dass wegen der derart ausgewerteten Quantoren-Klauseln in allen atomaren Formeln $P(t_1, \ldots, t_n)$ und in allen Identitätsformeln $t_1 \equiv t_n$, sobald diese im Algorithmus zur Auswertung gelangen, alle Terme Konstanten sind (wir werten hier natürlich nur geschlossene Formeln aus!).

Man sieht sofort, dass der resultierende Baum endlich ist. Die Anzahl b der Blätter des aus $\mathbf{RES}'_p$ resultierenden Baumes lässt sich wie folgt ermitteln. Enthält die Formel keine Quantoren, so ist diese gleich der Anzahl a der atomaren Formeln. Ein einzelner Quantor $\forall x \phi$ liefert da Blätter, mit $d = |D_\exists|$ und a als Anzahl der atomaren Formeln in ϕ. Sind n Quantoren in disjunkten Teilformeln enthalten, so errechnet sich die Blätterzahl als Summe der Zahl der jeweiligen Teilformeln. Sind Quantoren jedoch verschachtelt, im Sinne von $\forall x(\forall y(\forall z \phi))$ u. dgl., so resultieren bei einer Verschachtelung i-ter Ordnung genau ad^i Blätter. Gegeben die so ermittelte Anzahl q der Blätter lässt sich die gesamte Zahl der Knoten des Baumes als $2(k+q)$ gut abschätzen.

Dies ist der zweite Teil $\mathbf{RES}''_p(\mathfrak{A}, \phi)$ des Resolutionsalgorithmus:

while (next **b**) **do**

$\mathfrak{A} * P(t_1, \ldots, t_n)$ :: $(t_1, \ldots, t_n) \in \sigma(P)$ :: $\to \top$ ::: $\to \bot$

$\mathfrak{A} * t_1 \equiv t_2$ :: $t_1, t_2 \in D_\exists$ und $t_1 = t_2$ :: $\to \top$ ::: $\to \bot$

end while

while (next **i**′) **do**

$\neg$ und $\wedge$ werden wie oben ausgewertet

$\mathfrak{A} * \forall x \phi$ :: $\forall_\downarrow k : k = \top$ ::$\to \top$ ::: $\to \bot$

:: Blatt

end while

Welche Rechenleistung ist erforderlich, um den Algorithmus $\mathbf{RES}_p$ durchzurechnen? Diese Frage kann anhand der Anzahl b der Blätter des in $\mathbf{RES}'_p$ konstruierten Baumes beantwortet werden (siehe oben). Ist b diese Anzahl, so hat der Baum ungefähr $2b$ Knoten. Wie im Fall der Aussagenlogik ist die ungefähre Anzahl der Rechenschritte die zum Auswerten einer Formel erforderlich sind dann gleich $b|\mathfrak{A}|/2 + 2b$.

Hier ist $|\mathfrak{A}|$ die *Größe der Struktur* $\mathfrak{A}$. Diese Größe ergibt sich aus der Anzahl $n := |D_\exists|$ der Elemente von $D_\exists$ plus, für jedes Prädikat P die durch σ festgelegte Anzahl $|P|$ aller P-Tupel, die das Prädikat erfüllen. Es gilt also:

$$|\mathfrak{A}| = |D_\exists| + \sum_{P \in \mathcal{P}} |P|.$$

Von Bedeutung für die Abschätzung der Komplexität einer finitistischen Prädikatenlogik ist überdies die Gesamtanzahl der Strukturen $|\mathbb{A}_p|$. – Es gibt $2^{|D|}$ mögliche Mengen $D_\exists$ (entsprechend der Mächtigkeit der Potenzmenge $\wp(D)$). Für jedes i-stellige Prädikat P und $d := |D_\exists|$ ist d^i die Anzahl der möglichen i-Tupel über $D_\exists$. Somit gibt es für P genau $2^{(d^i)}$ unterschiedliche Möglichkeiten dieses Prädikat semantisch zu definieren. Es resultiert die Gesamtzahl mit $n := |D|$ als:

$$|\mathbb{A}_p| = \sum_k \left[\binom{n}{k} \sum_{P \in \mathcal{P}} 2^{kP} \right].$$

Die modale Aussagenlogik $\mathsf{FLAT_a}$ Gegeben eine fixe modale Struktur $\mathfrak{M}$ beschreiben wir den Algorithmus $\mathbf{RES}_m(\mathfrak{A}, \phi)$ wie folgt:

$\rightarrow \mathfrak{A} * \phi$

while (next **i**) **do**

$\neg$ und $\wedge$ wie oben

$\mathfrak{A} * \forall a \phi$	::	$\forall \mathfrak{A}' \in \mathbb{A}_a : \ \downarrow \mathfrak{A} * \phi \left[\frac{\mathfrak{A}'}{a} \right]$
$\mathfrak{A} * P(\ldots \tau \ldots)$	::	$\tau = \mathrm{SELF} \ :: \mathfrak{A} \rightarrow \tau$
$\mathfrak{A} * \tau \equiv \mathrm{SELF}$	::	$\mathfrak{A} \rightarrow \mathrm{SELF}$
$\mathfrak{A} * \mathrm{SELF} \equiv \tau$	::	$\mathfrak{A} \rightarrow \mathrm{SELF}$
$\mathfrak{A} * P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$	::	Blatt

$\mathfrak{A} * p$ :: Blatt

$\mathfrak{A} * \mathtt{SELF} \Vdash \phi$ :: $\rightarrow \mathfrak{A} * \phi$

$\mathfrak{A} * \mathfrak{A}' \Vdash \phi$ :: $\rightarrow \mathfrak{A}' * \phi$

end while

while (next **b**) **do**

$\mathfrak{A} * P(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ :: $(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \in \mathfrak{M}(P)$ :: $\rightarrow \top$ ::: $\rightarrow \bot$

$\mathfrak{A} * \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}''$ :: $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$ :: $\rightarrow \top$ ::: $\rightarrow \bot$

$\mathfrak{A} * p$ :: $p \in \mathfrak{A}$ :: $\rightarrow \top$ ::: $\rightarrow \bot$

end while

while (next **i**$'$) **do**

Konjunktionen und Negationen werden wie oben ausgewertet

$\mathfrak{A} * \forall a \phi$ :: $\forall_{\downarrow} k : k = \top$ :: $\rightarrow \top$ ::: $\rightarrow \bot$

:: Blatt

end while

Die modale Prädikatenlogik erster Stufe $\mathsf{FLAT_p}$ Ein passender Algorithmus sieht nicht viel anders aus, wie der für die Sprache $\mathsf{FLAT_a}$. $\mathbf{RES}_q(\mathfrak{A}, \phi)$ ist so definiert:

$\rightarrow \mathfrak{A} * \phi$

while (next **i**) **do**

$\neg$ und $\wedge$ wie oben

$\mathfrak{A} * \forall a \phi$ :: $\forall \mathfrak{A}' \in \mathbb{A}_p :\ \downarrow \mathfrak{A} * \phi\left[\frac{\mathfrak{A}'}{a}\right]$

$\mathfrak{A} * \forall x \phi$ :: $D_{\exists} = \emptyset$

:: $\downarrow \top$

::: $\forall c \in D_{\exists} :\ \downarrow \mathfrak{A} * \phi\left[\frac{c}{x}\right]$

$\mathfrak{A} * \forall^* x \phi$ :: $\forall c \in D :\ \downarrow \mathfrak{A} * \phi\left[\frac{c}{x}\right]$

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} * P(\ldots \tau \ldots) & :: & \tau = \mathtt{SELF} \quad :: \mathfrak{A} \to \tau \\ \mathfrak{A} * \tau \equiv \mathtt{SELF} & :: & \mathfrak{A} \to \mathtt{SELF} \\ \mathfrak{A} * \mathtt{SELF} \equiv \tau & :: & \mathfrak{A} \to \mathtt{SELF} \\ \mathfrak{A} * P(\tau_1, \ldots, \tau_n) & :: & \text{Blatt} \\ \mathfrak{A} * \mathtt{SELF} \Vdash \phi & :: & \to \mathfrak{A} * \phi \\ \mathfrak{A} * \mathfrak{A}' \Vdash \phi & :: & \to \mathfrak{A}' * \phi \end{array}$$

end while

while (next **b**) **do**

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{A} * P(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) & :: & (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \in \mathfrak{M}(P) & :: \to \top & ::: \to \bot \\ \mathfrak{A} * P(c_1, \ldots, c_n) & :: & (c_1, \ldots, c_n) \in \alpha(P) & :: \to \top & ::: \to \bot \\ \mathfrak{A} * \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}'' & :: & \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'' & :: \to \top & ::: \to \bot \\ \mathfrak{A} * c \equiv c' & :: & c, c' \in D_\exists \text{ und } c = c' & :: \to \top & ::: \to \bot \end{array}$$

end while

while (next **i**′) **do**

Konjunktionen und Negationen werden wie oben ausgewertet

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{A} * \forall a \phi & :: & \forall_{\downarrow} k : k = \top & :: \to \top & ::: \to \bot \\ \mathfrak{A} * \forall x \phi & :: & \forall_{\downarrow} k : k = \top & :: \to \top & ::: \to \bot \\ \mathfrak{A} * \forall^* x \phi & :: & \forall_{\downarrow} k : k = \top & :: \to \top & ::: \to \bot \\ & :: & \text{Blatt} & & \end{array}$$

end while

Der mehrsortige Funktionenkalkül SUP Als erstes beschreiben wir den Algorithmus **Term**$(\mathfrak{A}, \tau)$, der für jeden Term τ und jede Struktur $\mathfrak{A}$ einen Wert ermittelt:

$\textbf{Term}(\mathfrak{A}, \tau)$

$\rightarrow \mathfrak{A} * \tau$

while (next **i**) **do**

$\mathfrak{A} * \tau, \tau'$	::	$\downarrow_1 \mathfrak{A} * \tau, \quad \downarrow_2 \mathfrak{A} * \tau'.$
$\mathfrak{A} * \tau \,\#\, \tau'$	::	$\downarrow_1 \tau, \quad \downarrow_2 \tau'.$
$\mathfrak{A} * \iota x.\phi$	::	$\mathfrak{A}(\Delta(x)) = \emptyset$
		:: $\downarrow \bot$
		::: $\forall c \in \mathfrak{A}(\Delta(x)) : \quad \downarrow \textbf{Formel}(\mathfrak{A}, \phi\left[\frac{c}{x}\right])$
$\mathfrak{A} * c \mid \mathfrak{A} * \mathtt{SELF} \mid \top \mid \bot$	::	Blatt

end while

while (next **b**) **do**

$\mathfrak{A} * \mathtt{SELF}$	::	$\rightarrow \mathfrak{A} * \mathfrak{A}$

end while

while (next **i**′) **do**

$\mathfrak{A} * \tau, \tau'$	::	$\rightarrow \mathfrak{A} * U_1, U_2$
$\mathfrak{A} * \tau \,\#\, \tau'$	::	$\rightarrow \mathfrak{A} * \mathfrak{A}(U_1 \,\#\, U_2)$
$\mathfrak{A} * \iota x.\phi$	::	$\exists!_{\downarrow} x : x = \top \quad :: \rightarrow \top \quad ::: \rightarrow \bot$
	::	Blatt

end while

Erlaubt man keine definiten Deskriptionen $\iota x.\phi$, dann können Terme auch unabhängig von dem im Folgenden beschriebenen Formelalgorithmus ausgewertet werden. Voraussetzung für ein erfolgreiches Auswerten ist in jedem, dass der Term *geschlossen* sein muss, also keine freien Variablen enthalten darf. Im Übrigen sieht man sofort, dass diese Auswertung für jeden Term endlich ist – vorausgesetzt natürlich, die entsprechenden Auswertungen von $\textbf{Formel}(x, y)$ sind endlich. Dieser zweite Algorithmus sieht so aus:

Formel$(\mathfrak{A}, \phi)$:

$\to \mathfrak{A} * \phi$

while (next **i**) **do**

$\mathfrak{A} * \neg\psi$	::	$\to \neg\mathfrak{A} * \psi, \quad \downarrow \mathfrak{A} * \psi$
$\mathfrak{A} * \psi \wedge \psi'$	::	$\downarrow \mathfrak{A} * \psi, \quad \downarrow \mathfrak{A} * \psi'$
$\mathfrak{A} * \forall x \phi$	::	$\mathfrak{A}(\Delta(x)) = \emptyset$
		$:: \quad \downarrow \top$
		$::: \ \forall c \in \mathfrak{A}(\Delta(x)) : \quad \downarrow \mathfrak{A} * \phi\left[\frac{c}{x}\right]$
$\mathfrak{A} * \forall^* x \phi$	::	$\forall c \in \Delta(x) : \quad \downarrow \mathfrak{A} * \phi\left[\frac{c}{x}\right]$
$\mathfrak{A} * \tau \equiv \tau'$	::	$\to \mathfrak{A} * \mathbf{Term}(\tau) \equiv \mathbf{Term}(\tau'), \quad$ Blatt
$\mathfrak{A} * [\lambda x.\psi](\tau)$	::	$\to \mathfrak{A} * \psi\left[\frac{\mathbf{Term}(\tau)}{x}\right]$
$\mathfrak{A} * \tau \Vdash \psi$	::	$\to \mathbf{Term}(\tau) * \psi$

end while

while (next **b**) **do**

$\mathfrak{A} * c \equiv c'$	::	$c \in \Delta(c) \wedge c' \in \Delta(c') \wedge c = c'$
		$:: \to \top \quad ::: \to \bot$

end while

while (next **i**$'$) **do**

$\mathfrak{A} * \phi \wedge \psi$	::	$\forall_\downarrow k : k \equiv \top$	$:: \to \top$	$::: \to \bot$
$\neg\mathfrak{A} * \phi$	::	$\forall_\downarrow k : k \equiv \bot$	$:: \to \top$	$::: \to \bot$
$\mathfrak{A} * \forall x \phi$	::	$\forall_\downarrow k : k = \top$	$:: \to \top$	$::: \to \bot$
$\mathfrak{A} * \forall^* x \phi$	::	$\forall_\downarrow k : k = \top$	$:: \to \top$	$::: \to \bot$
	::	Blatt		

end while

Im Stil der oben präsentierten Resolutionsalgorithmen sieht man auch hier sehr leicht, dass der Algorithmus endlich ist (inklusive der eventuell nötigen Aufrufe des Term-Algorithmus) und mit der Definition der Semantik von SUP übereinstimmt. Somit ist Erfülltheit jeder Formel für jede Struktur entscheidbar.

Anhang B

Mathematisches Handwerkzeug

Mit $\wp(M)$ bezeichnen wir die Potenzmenge einer Menge. Ist A irgendeine Menge, so bezeichnen wir mit A^n das n-fache kartesische Produkt von A mit sich selbst. Mit $[A]^k$ bezeichnen wir die Menge aller k-elementigen Teilmengen von A.

Bezeichnet $|M|$ die Mächtigkeit einer Menge, dann gilt $|\wp(M)| = 2^{|M|}$. Fallweise benötigen wir auch folgende kombinatorischen Formeln: Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten n Elemente in unterschiedlicher Reihenfolge aneinanderzuordnen. Aus k Zeichen kann man genau k^n Zeichenfolgen der Länge n bilden. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Relationen und Ordnungen Eine *binäre Relation* R zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$. Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir auch aRb oder $R(a, b)$. Ist $A = B$, so sprechen wir von einer binären Relation *über* der Menge A. Die wichtigsten Merkmale von Relationen über A sind, für alle $a, a', a'' \in A$:

(i) aRa (Reflexivität)

(ii) $\neg aRa$ (Irreflexivität)

(iii) $aRa' \to a'Ra$ (Symmetrie)

(iv) $(aRa' \wedge a'Ra) \to a = a'$ (Antisymmetrie)

(v) $aRa' \wedge a'Ra'' \to aRa''$ (Transitivität)

(vi) $aRa' \vee a'Ra \vee a = a'$ (Konnexivität)

Eine Relation, die reflexiv und transitiv ist, nennt man *Quasi-Ordnung*, ist sie außerdem antisymmetrisch heißt sie *partielle Ordnung*, ist sie zusätzlich noch konnexiv nennt man sie *lineare Ordnung*. Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation*.

Wir verwenden hier stets das Symbol $<$ für solche reflexiven Ordnungen, die in der Arithmetik gewöhnlich mit $\leq$ bezeichnet werden. Analog verwenden wir für die in der Arithmetik oft mit $<$ bezeichneten irreflexiven Ordnungen das Symbol $\ll$.

Wir nennen a und a' in einer partiellen oder linearen Ordnung *benachbart* und schreiben $a \prec a'$, falls $a \ll a'$ gilt und es kein a'' gibt, mit $a \ll a'' \ll a'$. (Vgl. auch die Zusammenstellung, oben, S. 67.)

Sei $(M, <)$ eine partielle Ordnung, und A eine Teilmenge von M. Eine *untere Schranke* von A ist ein Element $a \in M$ mit $a < a'$ für alle $a' \in A$. Eine *obere Schranke* ist ein solches a mit $a' < a$ für alle $a' \in A$. Gibt es in der Menge aller unteren Schranken ein größtes Element, so ist dies das *Infimum* $\bigwedge A$ von A, gibt es in den oberen Schranken ein kleinstes Element, so ist dies das *Supremum* $\bigvee A$ von A. Ist $A = \{a', a''\}$ zweielementig, so schreiben wir für das Infimum $a' \cdot a''$ und für das Supremum $a' + a''$.

Graphen Ein *nicht-gerichteter Graph*[1] ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$. Die Elemente von E – zweielementige Teilmengen von V – nennt man die *Kanten*, die Elemente von V die *Knoten* (oder *Ecken*) des Graphen. Zwei Kanten sind *benachbart*, falls sie eine gemeinsame Ecke haben. Eine Folge von Kanten $k = k_1, \ldots, k_i$ ist ein *Weg*, falls jeweils k_j und k_{j+1} benachbart sind. Ist e eine Ecke aus k_1 und e' eine Ecke aus k_i, so nennen wir k einen Weg *zwischen* e und e'. Ein Graph ist *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Ecken einen Weg gibt.

Ein *Teilgraph* E' eines Graphen ist eine Teilmenge $E' \subseteq E$ seiner Kantenmenge.

[1] Vgl. Diestel (1996), Knuth (1997).

Ist $V' \subseteq V$ irgendeine Knotenmenge so ist *der* Teilgraph von G *in* V' definiert als jener Graph $G' = (V', E')$ der für alle Elemente aus V' genau dann eine Kante k enthält, wenn $k \in E$ gilt. Ein Knoten ist *enthalten* in einem Graphen, wenn er in irgendeiner der Kanten des Graphen enthalten ist. Ein zusammenhängender Teilgraph E' eines Graphen ist *maximal*, wenn es keinen Teilgraphen E'' gibt, mit $E' \subset E''$, der zusammenhängend ist.

Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $G_r = (V, E_r)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq V^2$. Der komplementäre Graph zu G_r ist der nicht-gerichtete Graph $G(G_r) = (V, E(E_r))$, der eine Kante $\{n, m\}$ enthält, für irgendwelche $n, m \in V$, gdw es in G_r eine Kante (n, m) oder (m, n) gibt. Wir definieren den Begriff eines Teilgraphen, analog wie bei nicht-gerichteten Graphen. Den Begriff des Zusammenhanges und des maximal zusammenhängenden Teilgraphen definieren wir in intuitiver Weise anhand des komplementären Graphen.

Bäume Ein *Baum* sei hier nicht als Graph definiert, sondern unmittelbar als endliche Menge T von „Knoten", für die gilt:

(1) Es gibt einen speziellen Knoten $R \in T$: die *Wurzel* des Baumes.

(2) Die übrigen Knoten $T \setminus \{R\}$ zerfallen in eine möglicher Weise leere Menge von disjunkten Mengen, von denen jede ein Baum ist. Diese Mengen sind die *Teilbäume* von R. (Ist R das einzige Element von T, so nennen wir den Baum *trivial*.)

Die Teilbäume nennen wir auch die *Unterknoten* eines Knotens, ist u ein Unterknoten eines Knotens o, so nennen wir o den *Oberknoten* von u.

Verbände Eine partielle Ordnung $(V, <)$ ist ein *Verband*[2], wenn für je zwei Elemente x und y das Supremum $x + y$ und das Infimum $x \cdot y$ existiert. Sie ist ein *vollständiger Verband*, wenn für jede Teilmenge X von V das Supremum $\bigvee X$ und das Infimum $\bigwedge X$ existiert. Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element $\bigvee V$ – das *Einselement* E –, sowie ein kleinstes Element $\bigwedge V$ – das *Nullelement* N.

[2]Vgl. Davey & Priestley (2002), Ganter & Wille (1996).

Literaturverzeichnis

D. M. Armstrong (1978): *Universals and Scientific Realism*. Cambridge University Press, Cambridge.

Franz Baader, Deborah L. Mc Guinness, Daniele Nardi & Peter F. Patel-Schneider (Hg.) (2003): *The Description Logic Handbook. Theory, Implementation and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.

Jon Barwise (Hg.) (1977): *Handbook of mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford, 7. Auflage.

Ermanno Bencivenga (1986): Free Logics. In Gabbay & Guenthner (2001, V, S. 147-196).

Karel Berka & Lothar Kreiser (Hg.) (1971): *Logik-Texte*. Akademie-Verlag, Berlin.

Peter Bieri (Hg.) (1997): *Analytische Philosophie des Geistes*. Beltz Athenäum, Weinheim, 3. Auflage.

Patrick Blackburn, Maarten de Rijke & Yde Venema (2001): *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Stephen Blamey (2002): Partial Logic. In Gabbay & Guenthner (2001, V, S. 261-353).

George S. Boolos, John P. Burgess & Richard C. Jeffrey (2002): *Computability and Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 4. Auflage.

Franz Brentano (1874): *Psychologie vom empirischen Standpunkt. Erster Band*. Duncker & Humblot, Berlin.

Robert Bull & Krister Segerberg (2001): Basic Modal Logic. In Gabbay & Guenthner (2001, III, S. 1-82).

Harry Bunt (1985): The Formal Representation of (Quasi-) Continuous Concepts.

In Hobbs & Moore (1985, S. 37-70).

John P. Burgess (2002): Basic Tense Logic. In Gabbay & Guenthner (2001, VII, S. 1-42).

Hans Burkhardt & Barry Smith (Hg.) (1991): *Handbook of Metaphysics and Ontology*. Philosophia Verlag, München.

Rudolf Carnap (1934): Die Aufgabe der Wissenschaftslogik. *Einheitswissenschaft* 3. Auch in Schulte & McGuinness (1992, S. 90-117).

— (1960): *Symbolische Logik*. Springer-Verlag, Wien New York, 2. Auflage.

— (1968): *Logische Syntax der Sprache*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

— (1972): *Bedeutung und Notwendigkeit*. Springer-Verlag, Wien New York, 2. Auflage.

— (1998): *Der logische Aufbau der Welt*. Felix Meiner Verlag, Hamburg.

Alonzo Church (1941): *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton University Press, Princeton.

Nino B. Cocchiarella (1991): Formal Ontology. In Burkhardt & Smith (1991, S. 640-647).

B. A. Davey & H. A. Priestley (2002): *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage.

Donald Davidson (1967): Wahrheit und Bedeutung. In Davidson (1990, 40-67). Deutsche Fassung von: Truth and Meaning. *Synthese* 17, 304-323.

— (1970): Mentale Ereignisse. In Bieri (1997, S. 73-92).

— (1990): *Wahrheit und Interpretation*. Suhrkamp, Frankfurt / Main.

Donald Davidson & Gilbert Harman (Hg.) (1972): *Semantics of Natural Language*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 2. Auflage. Synthese Library / Volume 40.

Rainer Diestel (1996): *Graphentheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Heinz-Dieter Ebbinghaus & Jörg Flum (1995): *Finite Model Theory*. Springer-

Verlag, Berlin Heidelberg New York.

— (2001): Mathematics of Logic Programming. In Gabbay & Guenthner (2001, S. 313-370).

Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum & Wolfgang Thomas (1996): *Einführung in die mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 4. Auflage.

Herbert B. Enderton (2001): *A Mathematical Introduction to Logic*. Harcourt / Academic Press, 2. Auflage.

Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Moses Yoram & Moshe Y. Vardi (1995): *Reasoning about Knowledge*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

Hartry Field (2001): Correspondence Truth, Disquotational Truth, and Deflationism. In Lynch (2001, S. 483-503).

M. Finger, D. Gabbay & M. Reynolds (2002): Advanced Tense Logic. In Gabbay & Guenthner (2001, VII, S. 43-204).

Melvin Fitting & Richard L. Mendelsohn (1998): *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Synthese Library / Volume 277.

Gottlob Frege (1892): Über Sinn und Bedeutung. *Ztschr. F. Philos. und philos. Kritik,* NF100, S. 25-50. Auch in Frege (1986, S. 40-65).

— (1986): *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Herausgegeben und eingeleitet von Günther Patzig*. Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen, 6. Auflage.

Dov M. Gabbay & Franz Guenthner (Hg.) (1983–1989): *Handbook of Philosophical Logic*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

— (2001): *Handbook of Philosophical Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2. Auflage. Bis Anfang 2005 erschienen: Bände 1 bis 12, geplant: 18 Bände.
URL `http://www.dcs.kcl.ac.uk/research/groups/gllc/philo/`

Dov M. Gabbay, C. J. Hogger & J. A. Robinson (Hg.) (1995): *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Band 4. Oxford University Press, New York Oxford.

Dov M. Gabbay & John Woods (Hg.) (2004): *Handbook of the History of Logic*. Elsevier Science, Amsterdam. Bis Anfang 2005 erschienen: Band 1 und 3, insgesamt 11 Bände geplant.
URL http://people.uleth.ca/~woods/HHPL_WP/hhpl.html

Bernhard Ganter & Rudolf Wille (1996): *Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. Englische Version (1999): *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

James W. Garson (2001): Quantification in Modal Logic. In Gabbay & Guenthner (2001, III, S. 267-324).

Lou Goble (Hg.) (2001): *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Blackwell Publishers, Malden.

Robert Goldblatt (1992): *Logics of Time and Computation*. Center for the Study of Language and Information, Stanford, 2. Auflage.

— (2003): Mathematical Modal Logic: A View of ist Evolution. Web-Version von: *Journal of Applied Logic*, 1, S. 309-392. Erscheint auch in Gabbay & Woods (2004, Band 6).
URL http://www.mcs.vuw.ac.nz/~rob/papers/modalhist.pdf

Georg Gottlob (1999): Remarks on a Carnapian Extension of S5. In Woleński & Köhler (1999, S. 243-259).

Siegfried Gottwald (1989): *Mehrwertige Logik*. Akademie-Verlag, Berlin.

David Harel, Dexter Kozen & Jerzy Tiuryn (2000): *Dynamic Logic*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

Nicolai Hartmann (1949): *Der Aufbau der realen Welt. Grundriß der allgemeinen Kategorienlehre*. Westkulturverlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, 2. Auflage.

Patrick J. Hayes (1985): The Second Naive Physics Manifesto. In Hobbs & Moore (1985, S. 1-36).

Leon Henkin (1950): Completeness in the Theory of Types. *Journal of Symbolic Logic* 15, S. 81-91.

Gabor T. Herman (1998): *Geometry of Digital Spaces*. Birkhäuser, Boston Basel Berlin.

Jerry R. Hobbs & Robert C. Moore (Hg.) (1985): *Formal Theories of the Commonsense World*. Norwood.

Wilfrid Hodges (1997): *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

John E. Hopcroft & Jeffrey D. Ullmann (1996): *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie*. Addison-Wesley, Bonn, 3. Auflage.

G.E. Hughes & M.J. Cresswell (1996): *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London New York.

Edmund Husserl (1980): *Logische Untersuchungen*. Niemeyer, Tübingen.

Dale Jacquette (Hg.) (2002): *A Companion to Philosophical Logic*. Blackwell Publishers, Malden.

Klaus Jänich (1994): *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage.

Donald E. Knuth (1997): *The Art of Computer Programming. Fundamental Algorithms*, Band 1. Addison-Wesley, Bonn, 3. Auflage.

Saul A. Kripke (1963): Semantical Considerations on Modal Logic. *Acta Philosophica Fennica* 26, S. 83-94.

— (1980): *Naming and Necessity*. Harvard University Press, Cambridge. Zuerst erschienen in Davidson & Harman (1972, S. 253-355 und S. 763-769).

Franz von Kutschera (1976): *Einführung in die intensionale Semantik*. Walter de Gruyter, Berlin New York.

George Lakoff (1987): *Women, Fire, and Dangerous Things. What Categories Reveal about the Mind*. The University of Chicago Press, Chicago.

Wolfgang Lenzen (1980): *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik*. Springer-Verlag, Wien New York.

Stanisław Leśniewski (1929): Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. *Fundamenta Mathematicae* 14, S. 1-81.

Clarence Irving Lewis & Cooper Harold Langford (1932): *Symbolic Logic*. New York.

David Lewis (1983a): Counterpart Theory and Quantified Modal Logic. In Lewis (1983b, S.26-46).

— (1983b): *Philosophical Papers. Volume I*. Oxford University Press, New York Oxford.

Michael P. Lynch (Hg.) (2001): *The Nature of Truth. Classic and Contemporary Perspectives*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

María Manzano (1996): *Extensions of First Order Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Richard Montague (1972): Pragmatics and Intensional Logic. In: Davidson & Harman (1972, S. 142-168).

Otto Neurath, Rudolf Carnap & Charles Morris (Hg.) (1939–1970): *Foundations of the Unity of Science. Toward an International Encyclopedia of Unified Science*.

Erhard Oeser (1976): *Wissenschaft und Information*. Oldenbourg Verlag, München Wien.

Erhard Oeser & Franz Seitelberger (1995): *Gehirn, Bewußtsein und Erkenntnis*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 2. Auflage.

Terence Parsons (1970): An Analysis of Mass Terms and Amount Terms. *Foundations of Language* 6, S. 362-388.

Karl R. Popper (1989): *Logik der Forschung*. J.C.B.Mohr (Paul Siebeck), Tübingen, 9. Auflage.

Hilary Putnam (1975a): The meaning of „meaning". In Putnam (1975b, S. 215-271).

— (1975b): *Mind, Language and Reality. Philosophical Papers, Volume 2*. Cambridge University Press, Cambridge.

— (1983): Reference and Truth. *Realism and Reason, Philosophical Papers, Volume III, Cambridge University Press*, 69-86.

Willard Van Orman Quine (1980a): *From a Logical Point of View*. Harvard University Press, Cambridge, 2. Auflage.

— (1980b): On what there is. In Quine (1980a, S. 1-19).

Hartley Rogers (1967): *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*.

McGraw-Hill Book Company, New York.

Eleanor Rosch (1978): Principles of Categorization. *Eleanor Rosch and Barbara B. Lloyd (ed): Cognition and Categorization. Hillsdale,* S. 28-48.

Bertrand Russell (1905): On denoting. *Mind* 14, S. 479-493. Auch in Russell (1988, S. 41-56).

— (1988): *Logic and Knowledge*. Routledge, London New York.

Stuart Russell & Peter Norvig (2003): *Artificial Intelligence. A Modern Approach*. Pearson Education International, Upper Saddle River New Jersey, 2. Auflage.

Joachim Schulte & Brian McGuinness (Hg.) (1992): *Einheitswissenschaft*. Suhrkamp, Frankfurt / Main.

Gerhard Schurz (1999): Tarski and Carnap on Logical Truth – or: What ist Genuine Logic? In Woleński & Köhler (1999, S. 77-94).

Stewart Shapiro (2005a): Higher-order Logic. In Shapiro (2005b, S.751-780).

Stewart Shapiro (Hg.) (2005b): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, New York Oxford.

Joseph R. Shoenfield (1967): *Mathematical Logic*. Association for Symbolic Logic, Natick Massachusetts.

Peter Simons (1987): *Parts. A Study in Ontology*. Oxford University Press, Oxford.

Raymond M. Smullyan (1995): *First-Order Logic*. Dover Publications, New York.

John F. Sowa (2000): *Knowledge Representation. Logical, Philosophical and Computational Foundations*. Pacific Grove.

Göran Sundholm (2001): Systems of Deduction. In Gabbay & Guenthner (2001, II, S. 1-52).

Alfred Tarski (1935): Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica Commentarii Societatis philosophicae Polonorum,* Vol I, Leopoli, S. 261-405. Auch in Berka & Kreiser (1971, S. 447-559).

Richmond H. Thomason (Hg.) (1974): *Formal Philosophy. Selected Papers of Richard Montague*. Yale University Press, New Haven London.

Richmond H. Thomason (2002): Combinations of Tense and Modality. In Gabbay

& Guenthner (2001, VII, S. 205-234).

Pavel Tichý (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Walter de Gruyter, Berlin New York.

Johan van Benthem (1988): *A Manual of Intensional Logic*. Center for the Study of Language and Information, Stanford, 2. Auflage.

— (1991): *The Logic of Time. A Model-Theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2. Auflage. Synthese Library / Volume 156.

— (1995): Temporal Logic. In Gabbay et al. (1995, S. 241-350).

— (2001): Correspondence Theory. In Gabbay & Guenthner (2001, III, S. 325-408).

Johan van Benthem, Marco Aiello & Ian Pratt-Hartmann (200xa): Introduction: What is Spatial Logic? Entwurf der Einleitung zu van Benthem et al. (200xb). URL `http://dit.unitn.it/~aiellom/hsl/intro.pdf`

Johan van Benthem, Marco Aiello & Ian Pratt-Hartmann (Hg.) (200xb): *The Logic of Space. A proposal for a book on all aspects of logics of space*. URL `http://dit.unitn.it/~aiellom/hsl/`

Johan van Benthem & Kees Doets (2001): Higher-Order Logic. In Gabbay & Guenthner (2001, I, S. 189-244).

Jean van Heijenoort (Hg.) (1967): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press, Cambridge.

Ludwig Wittgenstein (1963): *Tractatus logico-philosophicus*. Suhrkamp, Frankfurt / Main.

Jan Woleński & Eckehart Köhler (Hg.) (1999): *Alfred Tarski and the Vienna Circle. Austro-Polish Connections in Logical Empiricism*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Vienna Circle Institute Yearbook 6 [1998].

Edward N. Zalta (1988): *Intensional Logic and The Metaphysics of Intentionality*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts London England.

Curriculum Vitae

- Geboren in St. Pölten (NÖ), am 28.9.1968.
- Matura 1987 in St. Pölten (Höhere Technische Lehranstalt für Maschinenbau).
- Studium der Philosophie an der Universität Wien, mit zusätzlichen Schwerpunkten in Mathematik und Geschichte. Sponsion 1998, mit einer Diplomarbeit über „Bedeutungstheorie“.
- Seit 1989: Arbeit in der Erwachsenenbildung (Mathematik, Computerthemen).
- 2000-2002: freiberufliche Tätigkeit im Bereich Computerprogrammierung und -schulung.
- 2002: Mitarbeit an der Organisation des Karl Popper Centenary Congress in Wien.
- Seit September 2002: Wissenschaftlicher Mitarbeiter in dem vom FWF geförderten „Moritz-Schlick-Editionsprojekt“ am Institut Wiener Kreis (Wien). Seit April 2002 zusätzlich wissenschaftlicher Mitarbeiter in dem Projekt „Vertreibung und Rückkehr der Wissenschaftstheorie“ (ebenfalls vom FWF gefördert).