

# Inhalt

<b>1. Einleitung.....</b>	<b>5</b>
<b>2. Die Kegelschnitte.....</b>	<b>7</b>
2.1. Historische Aspekte zu Kegelschnitte.....	7
2.2. Definition und Konstruktion von Kegelschnitten	13
2.2.1. Ellipse.....	17
2.2.2. Hyperbel.....	22
2.2.3. Parabel.....	25
2.3. Formeln: Übersichtstabelle zu Kegelschnitten...	29
<b>3. Der Lehrplan und die Kegelschnitte....</b>	<b>31</b>
3.1. Der Mathematikunterricht im Lehrplan.....	31
3.2. Die Verankerung der Kegelschnitte im Lehrplan	36

<b>4. Neue Medien im Mathematikunterricht</b>	<b>38</b>
4.1. Computereinsatz im Mathematikunterricht...	39
4.2. Computerprogramm – GeoGebra.....	41
4.2.1. Hintergründe zu GeoGebra.....	41
4.2.2. GeoGebra – einige Anwendungen.....	46
<b>5. Beispiele und Arbeitsaufträge zu Kegelschnitten</b>	<b>50</b>
5.1. Schulbuchbeispiele.....	50
5.1.1. Beispiel 1.....	50
5.1.2. Beispiel 2.....	53
5.1.3. Beispiel 3.....	55
5.1.4. Beispiel 4.....	57
5.1.5. Beispiel 5.....	61
5.1.6. Beispiel 6.....	64
5.1.7. Beispiel 7.....	67
5.1.8. Beispiel 8.....	70
5.1.9. Beispiel 9.....	76
5.1.10. Beispiel 10.....	82
5.2. Resümee der Beispiele.....	86
<b>6. Resümee.....</b>	<b>90</b>
<b>7. Bibliographie.....</b>	<b>92</b>
<b>8. Anhang.....</b>	<b>95</b>

## Abbildungsverzeichnis:

Abb. 1: Die vier Kegelschnitte [Thorwartl, S. 7].....	13
Abb. 2: Der Kreis [Köhler, Howelmann, Krämer, S. 10.1].....	14
Abb. 3: Die Ellipse [Köhler, Howelmann, Krämer, S. 10.1].....	14
Abb. 4: Die Parabel [Köhler, Howelmann, Krämer, S. 10.2].....	14
Abb. 5: Die Hyperbel [Köhler, Howelmann, Krämer, S. 10.2].....	15
Abb. 6: Drei Sonderfälle [Köhler, Howelmann, Krämer, S. 10.2]..	15
Abb. 7: Definition Ellipse [erstellt von AS].....	17
Abb. 8: Ellipse 2. HL [erstellt von AS].....	18
Abb. 9: Gärtnerkonstruktion [erstellt von AS].....	20
Abb. 10: Scheitelschmiegunskreise [erstellt von AS].....	20
Abb. 11: Definition Hyperbel [erstellt von AS].....	22
Abb. 12: Hyperbel 2. HL [erstellt von AS].....	23
Abb. 13: Scheitelschmiegunskreise [erstellt von AS].....	24
Abb. 14: Definition Parabel [erstellt von AS].....	25
Abb. 15: Parabel 2. HL [erstellt von AS].....	26
Abb. 16: Parabel 3. HL [erstellt von AS].....	26
Abb. 17: Parabel 4. HL [erstellt von AS].....	27
Abb. 18: Scheitelschmiegunskreise [erstellt von AS].....	28
Abb. 19: Ellipse [erstellt von AS].....	29
Abb. 20: Hyperbel [erstellt von AS].....	29
Abb. 21: Parabel [erstellt von AS].....	29
Abb. 22: Markus Hohenwarter [ <a href="http://www.geogebra.at">www.geogebra.at</a> ].....	41
Abb. 23: Bidirektionale Verbindung [Hohenwarter, 2004, CA-R]	43
Abb. 24: Screenshot GeoGebra.....	44
Abb. 25: Aufgabe 1 geometrisch [Screenshot].....	46
Abb. 26: Aufgabe 1 algebraisch [Screenshot].....	47
Abb. 27: Aufgabe 2 [Screenshot].....	48
Abb. 28: Aufgabe 3 [Screenshot].....	49
Abb. 29: Handskizze Bsp. 1 [erstellt von AS].....	50
Abb. 30: Computergraphik Bsp. 1 [erstellt von AS].....	51
Abb. 31: Konstruktionsprotokoll 1 [erstellt von AS].....	52
Abb. 32: Handskizze Bsp. 2 [erstellt von AS].....	53
Abb. 33: Computergraphik Bsp. 2 [erstellt von AS].....	54
Abb. 34: Konstruktionsprotokoll Bsp. 2 [erstellt von AS].....	54
Abb. 35: Handskizze Bsp. 3 [erstellt von AS].....	55
Abb. 36: Computergraphik Bsp. 3 [erstellt von AS].....	56
Abb. 37: Konstruktionsprotokoll Bsp. 3 [erstellt von AS].....	56
Abb. 38: Handskizze Bsp. 4 [erstellt von AS].....	57
Abb. 39: Computergraphik 1 Bsp. 4 [erstellt von AS].....	59
Abb. 40: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 4 [erstellt von AS].....	59
Abb. 41: Computergraphik 2 Bsp. 4 [erstellt von AS].....	60
Abb. 42: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 4 [erstellt von AS].....	60
Abb. 43: Handskizze Bsp. 5 [erstellt von AS].....	61
Abb. 44: Computergraphik Bsp. 5 [erstellt von AS].....	62
Abb. 45: Konstruktionsprotokoll Bsp. 5 [erstellt von AS].....	63

Abb. 46: Handskizze Bsp. 6 [erstellt von AS].....	64
Abb. 47: Computergraphik Bsp. 6 [erstellt von AS].....	65
Abb. 48: Konstruktionsprotokoll Bsp. 6 [erstellt von AS].....	66
Abb. 49: Handskizze Bsp. 7 [erstellt von AS].....	67
Abb. 50: Computergraphik Bsp. 7 [erstellt von AS].....	68
Abb. 51: Konstruktionsprotokoll Bsp. 7 [erstellt von AS].....	69
Abb. 52: Handskizze Bsp. 8 [erstellt von AS].....	70
Abb. 53: Computergraphik 1 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	72
Abb. 54: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	72
Abb. 55: Computergraphik 2 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	73
Abb. 56: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	73
Abb. 57: Computergraphik 3 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	74
Abb. 58: Konstruktionsprotokoll 3 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	75
Abb. 59: Computergraphik 4 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	75
Abb. 60: Konstruktionsprotokoll 4 Bsp. 8 [erstellt von AS].....	75
Abb. 61: Handskizze Bsp. 9 [erstellt von AS].....	76
Abb. 62: Computergraphik 1 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	77
Abb. 63: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	78
Abb. 64: Computergraphik 2 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	78
Abb. 65: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	79
Abb. 66: Computergraphik 3 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	79
Abb. 67: Konstruktionsprotokoll 3 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	80
Abb. 68: Computergraphik 4 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	80
Abb. 69: Konstruktionsprotokoll 4 Bsp. 9 [erstellt von AS].....	81
Abb. 70: Handskizze Bsp. 10 [erstellt von AS].....	82
Abb. 71: Computergraphik 1 Bsp. 10 [erstellt von AS].....	83
Abb. 72: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 10 [erstellt von AS].....	83
Abb. 73: Computergraphik 2 Bsp. 10 [erstellt von AS].....	84
Abb. 74: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 10 [erstellt von AS].....	85

# 1. Einleitung

Kenntnisse, bloßes nacktes Wissen, machen keine Bildung.  
Der Gelehrte ist nicht immer der Gebildete. Zum Kennzeichen  
der Bildung gehört die innere Aneignung.  
Eduard Spranger<sup>1</sup>

Die nichtlineare analytische Geometrie, jenes mathematische Gebiet, das gemeinhin unter dem Namen ‚Kegelschnitte‘ bekannt ist, ist Teil des konventionellen Mathematikunterrichts. Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse einer AHS-Oberstufe wird dieses Gebiet nahe gebracht. Bei Betrachtung der Schulbücher<sup>2</sup> für die 7. Klasse ist im Bezug auf die Kegelschnitte feststellbar, dass das Thema sehr theoretisch behandelt wird. Die Verankerung der Kegelschnitte im Lehrplan und auch die geschichtliche Entwicklung derselben sind oft wohl die einzigen Gründe für das Unterrichten der Kegelschnitte. In vielen Fällen werden die Kegelschnitte mit dem Lösen quadratischer Gleichungen und mit Wurzelberechnungen<sup>3</sup> in Verbindung gebracht.

Abseits von Lehrplan und Geschichte ist in unserer modernen Zeit der Computer allgegenwärtig. In der Schule soll der Computer laut neuem Lehrplan, BGBl. II, Nr. 277/2004, als Teil der ‚Neuen Medien‘ angewendet werden. Die Entwicklung der Jugendlichen ist ebenfalls zu berücksichtigen, da diese ja, im Gegensatz zum Großteil des Lehrpersonals, schon mit Computern aufwachsen. Das Wissen der Jugendlichen über den Computer ist daher von großem Nutzen für den Einsatz im Unterricht, da aufwändige allgemeine Erklärungen oft nicht notwendig sind. Das für die Behandlung des jeweiligen Themas relevante Computerprogramm kann direkt erklärt und danach sogleich verwendet

---

<sup>1</sup> Skupy S. 97

<sup>2</sup> Götz [2006]; Malle [2006]; Reichel [1992]; Novak [1992]

<sup>3</sup> Die Wurzelberechnungen werden jedoch meist ohne Äquivalenzumformungen durchgeführt.

werden. Dabei wird die graphische Darstellung von mathematischen Konstruktionen ermöglicht.

Die für die folgende Arbeit ausgewählten Beispiele zum Thema Kegelschnitte sollen einen Überblick über die Einsatzmöglichkeiten des Computerprogramms GeoGebra aufzuzeigen. Weiters zeigen die Beispiele auf, inwiefern der Einsatz des Computerprogramms hilfreich ist. Im Mathematikunterricht erleichtert ein Computerprogramm oft mühsame Konstruktionen. Darüber hinaus ermöglicht GeoGebra neben der geometrischen Konstruktion und Visualisierung, eine algebraische Darstellung. Verknüpfungen und Veränderungen von Geometrie und Algebra können daher von den Schülerinnen und Schülern erkannt werden.

Ein persönlicher Vorteil ergibt sich durch diese Diplomarbeit. Auf Grund der Arbeit hatte ich die Möglichkeit mich selbst intensiv mit einem mathematischen Computerprogramm zu beschäftigen. Die Verwendung eines Computerprogramms für den mathematischen Gebrauch fand im Laufe meiner Studienzeit keinerlei Berücksichtigung. Da aber, wie bereits erwähnt, unsere moderne Zeit fast zwingend den Computer im Berufs- und Privatleben integriert, wollte ich auch für meine zukünftige Tätigkeit als Mathematiklehrerin gerüstet sein.

Die Erfahrungen, die ich im Umgang mit GeoGebra sammeln konnte, werden in meinen Unterricht sicherlich einfließen.

## 2. Die Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt (englisch conic section, cone-plane intersection) ist eine Kurve, die entsteht, wenn man die Oberfläche eines unendlichen Kegels bzw. Doppelkegels mit einer Ebene schneidet.<sup>4</sup>

### 2.1. Historische Aspekte zu Kegelschnitte<sup>5</sup>

Zunächst gilt es den Ursprung des Begriffes „Kegelschnitt“ zu finden. Dabei stellt sich die Frage, ob man nun mit dem ersten Auftreten des Wortes „Kegelschnitte“ beginnen soll oder ob der Anfang auf den Beginn des Konstruierens gesetzt werden soll.

Die Fertigkeit des Konstruierens ist für die Kegelschnitte auf jeden Fall wichtig. Konstruiert haben sicher nicht nur die Griechen. Auch in vorgriechischer Zeit wurden Konstruktionen durchgeführt, die Resultate sind bekannt, schriftliche Anweisungen jedoch mangelhaft. In den ‚Sulba Sutras‘<sup>6</sup> wurden Altar Konstruktionen festgehalten. In England, Schottland und der Bretagne wurden Kegelschnitte konstruiert – man betrachte die Grundrisse der aus Megalithen hergestellten Heiligtümer. Bautektonisch wurden auch Konstruktionszeichnungen in Ägypten und Mesopotamien angefertigt. Eine Theorie des Konstruierens kann aber bei all dem Erwähnten nicht nachgewiesen werden.<sup>7</sup> Das Konstruieren ist demnach

---

<sup>4</sup> Aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt>

<sup>5</sup> Vergleiche: Czwalina[1926]; Dingeldey [1903]; Gericke [1984]; Kaiser, Nöbauer [1984], Reichel [1991]

<sup>6</sup> The Sulba Sutras or Sulva Sutras are texts of the Hindu canon dealing with the geometry of altar construction.[...] The Sulbasutras are our only source of knowledge of Indian mathematics of the Vedic period.[...] The name “Sulba Sutra” means rule of chords, which is another name for geometry.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Sulba\\_Sutras](http://en.wikipedia.org/wiki/Sulba_Sutras)

<sup>7</sup> Vergleiche Gericke, Helmuth S. 127

eine Spezialität der Griechen und wird auch noch in diesem Teil behandelt.

Doch nicht nur in den baulichen Überresten alter Kulturen können Kegelschnitte gefunden werden. Kegelschnitte treten in unserer Umwelt auf, wie zum Beispiel beim Schlagschatten oder bei Planetenbahnen zu sehen ist. „Diese Tatsache wird aber erst 2000 Jahre nach der ersten mathematischen Behandlung der Kegelschnitte entdeckt!“ [Kaiser, Nöbauer. S. 152]

Im ersten Buch der „Elemente“ von Euklid<sup>8</sup> werden die Grundlagen des Konstruierens aufgestellt. Durch diese Grundlagenarbeit und auch durch Hippokrates<sup>9</sup>, unter dem sich die Kunst des Konstruierens vermutlich im 5. Jahrhundert vor Christus voll entfaltete, wurde das Arbeiten mit und Untersuchen von Kegelschnitten möglich.<sup>10</sup> Hierbei sei erwähnt, dass das Konstruieren damals eine wirkliche Kunst war, da es auf Zirkel und Lineal – also Kreis und Gerade – beschränkt war. Somit konnte in der Geometrie gewährleistet werden, dass eine Lösung eines Problems zugleich exakt und elementar war. Zirkel und Lineal werden auch als „euklidischen Werkzeuge“ bezeichnet.

Drei „klassische Probleme der Antike“ gingen in die Geschichte der Mathematik ein. Sie beschäftigten viele Mathematiker und trieben dadurch die Entwicklungen der Geometrie, im speziellen der höheren Geometrie voran. Die drei klassischen Probleme der Antike sind:

1. „Die Dreiteilung des Winkels“
2. „Die Verdoppelung des Würfels“ oder das Delische Problem
3. Die Quadratur des Kreises

---

<sup>8</sup> Euklid (vermutlich 340 -270 vor Christus) schrieb das aus 13 Büchern bestehende berühmte Werk „Die Elemente“. Im ersten Teil des ersten Buches wurden von Euklid die Grundlagen zur Theorie des Konstruierens zusammengestellt.

<sup>9</sup> Hippokrates von Chios lebte von 460-377 vor Christus. Quadratur krummliniger Flächen

<sup>10</sup> Vgl. Gericke, Helmuth. 1984 S. 130-132

Beim Suchen nach Lösungen zu den drei Problemen entstanden neue Kurven – wie zum Beispiel die Kegelschnitte. Da es schon sehr viel einschlägige Literatur zu den drei klassischen Problemen der Antike gibt, möchte ich mich hier nur kurz mit der Verdoppelung des Würfels beschäftigen. Denn die Lösungsversuche dieses Problems brachten die Entdeckung der Kegelschnitte mit sich. Vorweg aber noch woher stammt dieses Problem.

Eutokios<sup>11</sup> überliefert einen angeblichen Brief des Mathematikers Eratosthenes<sup>12</sup> an König Ptolemaios II. von Ägypten. Der Wortlaut des Briefes war folgender:

„Dem König Ptolemaios wünscht Eratosthenes Glück und Wohlbefinden. Von den alten Tragödiendichtern, sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten ließ, und hörte, daß es auf allen Seiten 100 Fuß haben werde, sagen lassen: ‚Zu klein entwarfst du mir die königliche Gruft. Verdopple sie; des Würfels (Gestalt) jedoch verfehle nicht!‘“  
[Kaiser, Nöbauer; S. 138]

Das würfelförmige Grabmal sollte also verdoppelt werden. Auch in einer griechischen Sage wird eine ähnliche Verdoppelungsaufgabe gestellt:

In der Sage geht es um Delos, eine der Zykladen-Inseln im Ägäischen Meer. Im Vierten Jahrhundert vor Christus wütete die Pest auf dieser Insel. Um die Pest zu besiegen, verlangte das Orakel von Delos den auf dieser Insel stehenden würfelförmigen Apollon-Altar zu verdoppeln. Die Bewohner der Insel waren aber mit dieser Aufgabe überfordert und wandten sich an die Akademie des Platons in Athen. Nachdem nur exakte und elementare Lösungen, nur mit Zirkel und Lineal, akzeptiert wurden, beschäftigten sich Mathematiker über die Jahrhunderte hindurch mit

---

<sup>11</sup> Eutokios wurde in Askalon circa 480 nach Christus geboren. Er war ein späterer Kommentator von Archimedes. Weiters schrieb er auch Kommentare zu Apollonius Werken über die Kegelschnitte. Im Rahmen seiner Werke gibt Eutokios 12 Lösungsmöglichkeiten für die Verdoppelung des Würfels an.

<sup>12</sup> Eratosthenes von Kyrene lebte vermutlich von 276-194 vor Christus. Neben dem Delischen Problem beschäftigte er sich auch mit der Abschätzung des Erdumfangs.

diesem Problem. Durch die Sage erhielt auch das Problem der Würfelverdoppelung seinen Namen – das Delische Problem.

Wie wird nun ein Würfel verdoppelt. Es galt die Gleichung  $x^3 = 2 \cdot a^3$ , wobei  $a$  die Seitenlänge des gegebenen Würfels ist, nach  $x$  zu lösen. Hippokrates wusste, dass diese Gleichung mit der Existenz zweier mittlerer Proportionalitäten gleichbedeutend war:  $a : x = x : y = y : 2a$

Daraus folgen:  $x^2 = a \cdot y$  und  $y^2 = 2a \cdot x$

Menaichmos<sup>13</sup> erkannte, dass diese beiden, aus den Proportionalitäten folgenden, Gleichungen für Parabel und Hyperbel stehen. Er schaffte es, eine Lösung zu finden, in dem er diese beiden Gleichungen miteinander schnitt. „Allerdings wurde diese Lösung des Menaichmos von Mathematikern seiner Zeit nicht akzeptiert.“ [Kaiser, Nöbauer; S. 152]

Nicht nur Euklid mit seinen Büchern „Die Elemente“ war wichtig für die Entwicklung der Geometrie, sondern auch Apollonios<sup>14</sup> von Perga. Speziell für die Kegelschnitte brachte Apollonios „die reifste Darstellung der Kegelschnitte“ [Kaiser, Nöbauer; S. 156] mit seinem Werk „Konika“ das aus 8 Büchern bestand.

„Zum Unterschied von seinen Vorgängern wählte Apollonios einen neuen Ausgangspunkt für seine Diskussion der Kegelschnitte. Er studierte nämlich systematisch beliebige ebene Schnitte an einem Kreiskegel und nicht mehr nur Schnitte im rechten Winkel zur Erzeugenden.“ [Kaiser, Nöbauer, S.156]

Apollonios führte auch die Namen Parabel, Hyperbel und Ellipse ein. Zuvor wurden diese drei Kurven als „Schnitt am spitzwinkligen Kegel“, „Schnitt am stumpfwinkligen Kegel“ und „Schnitt am rechtwinkligen Kegel“ genannt. Bis Apollonios benötigte man drei verschiedene Kegel, um alle Kegelschnitte zu erhalten. Danach war es möglich, an ein und demselben Kegel alle Kegelschnitte darzustellen.

---

<sup>13</sup> Menaichmos lebte im 4. Jahrhundert vor Christus.

<sup>14</sup> Apollonios lebte von 262 bis 212 vor Christus. Er entwickelte die Theorie der Kegelschnitte und ist ein Vorläufer der projektiven Geometrie

Apollonios kann als Vorreiter der analytischen Geometrie gesehen werden, denn er versuchte geometrische Sachverhalte zu algebraisieren. Als analytische Geometrie wurde die Geometrie des 17. und 18. Jahrhunderts gesehen. Fermat<sup>15</sup> und Descartes<sup>16</sup>, die sich beide unter anderem auch mit Kegelschnitten beschäftigten, entwickelten um 1630 eine Form der analytischen Geometrie, die der heutigen schon sehr nahe kommt. Müller-Fonfara erklärt die analytische Geometrie folgendermaßen: „Bei der analytischen Geometrie tritt die rein mathematische Behandlung eines Problems mehr in den Vordergrund; [...] In der analytischen Geometrie werden geometrische Objekte [...] oder Beziehungen [...] durch die Zuordnung mathematischer Objekte (Koordinaten) oder Beziehungen (Gleichungen) strukturiert und arithmetisch fassbar gemacht.“ [Müller-Fonfara, S. 509]

Die „projektive Geometrie“ wird auch als die Geometrie des 19. Jahrhunderts bezeichnet. Als Begründer derselben kann auf jeden Fall Girard Desargues<sup>17</sup> gesehen werden. Er schrieb 1639 ein Buch über Kegelschnitte. Er betrachtete sie als wirkliche Schnitte eines Kegels mit einer Ebene. Seine Untersuchungen und Aufzeichnungen wurden im 19. Jahrhundert, der Blütezeit der projektiven Geometrie, wieder aufgegriffen.

Im 19. Jahrhundert trat auch ein philosophisches Problem auf: Ein Problem der Geometrie wurde algebraisiert und somit gelöst. Man wusste aber nicht, was geometrisch geschehen war. Dies wurde bei den Griechen verhindert, da Lösungen exakt und elementar sein mussten. Geometrisch konnte man die Schritte der Griechen also immer klar nachvollziehen.

---

<sup>15</sup> Pierre de Fermat lebte von 1601 bis 1665

<sup>16</sup> René Descartes lebte von 1596 bis 1650

<sup>17</sup> Girard Desargues lebte 1591 bis 1661

Eine kurze und bündige Zusammenfassung<sup>18</sup> der Geschichte der Kegelschnitte findet man im Schulbuch „Mathematik – Lehrbuch 7“:

„Die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel waren bereits im Altertum bekannt. Man stieß auf sie beim Versuch, das Delische Problem zu lösen, nämlich die Kantenlänge  $y$  eines Würfels zu konstruieren, der das doppelte Volumen eines gegebenen Würfels mit der Kantenlänge  $x$  hat. Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr.) fand heraus, dass dieses Problem äquivalent mit der Lösung der fortlaufenden Proportion  $a : x = x : y = y : 2a$  ist. Menaichmos (um 350 v. Chr.) wandelte das Problem in den Schnitt der Parabel  $x^2=ay$  bzw.  $y^2=2ax$  mit der Hyperbel  $y=2a^2/x$  um. Und diese beiden Kurven fand er als Schnitte eines Kreiskegels mit der Ebene.“ [Götz, S. 212]

---

<sup>18</sup> Die Geschichte der Kegelschnitte kann sicher genauer aufgeführt werden, was aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

## 2.2. Definition und Konstruktion von Kegelschnitten<sup>19</sup>

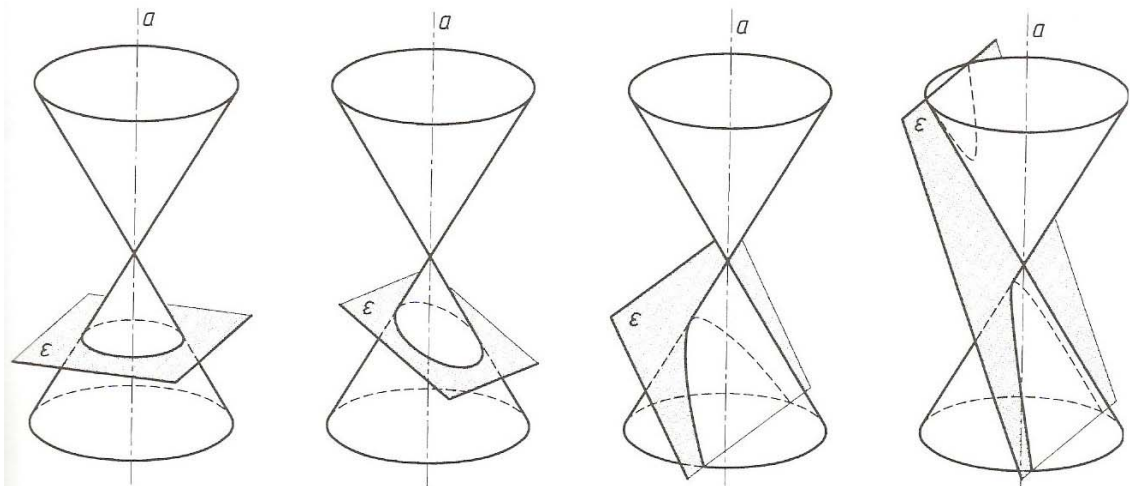


Abb. 1: Die vier Kegelschnitte

‚Kegelschnitt‘ bezeichnet all jene Kurven, die durch Schnitte einer Ebene mit Drehkegeln auftreten. Somit fasst dieser Begriff genau vier Kurven zusammen. Denn durch Variation der Lage der Ebene zur Drehachse des Drehkegels entstehen bei den Schnitten vier Kurven: der Kreis, die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel.<sup>20</sup> Es können dabei auch ‚Entartungen‘ entstehen, besser bezeichnet als Sonderfälle, wenn die Ebene durch die Spitze des Kegels verläuft.

Im Konkreten sollen nun die einzelnen Schnittlinien, die beim Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene entstehen, veranschaulicht werden.

<sup>19</sup> Czwalina [1926]; Dronke [1881]; Graefe [1885]; Köhler u.a. [1971]; Müller-Fonfara [2004]; Schupp [1988]

<sup>20</sup> Vgl. Thorwartl S. 7-75

Die wohl einfachste dieser Schnittlinien ist, wenn als Schnittkurve ein Kreis entsteht. Dies geschieht nämlich dann, wenn zwischen Kegelachse und der Ebene ein rechter Winkel ist:  $\alpha = 90^\circ$ . Mittelpunkt dieses Kreises ist immer der Schnittpunkt der Ebene mit der Kegelachse. Der Radius ändert sich trivialerweise durch die Platzierung der Schnittebene.

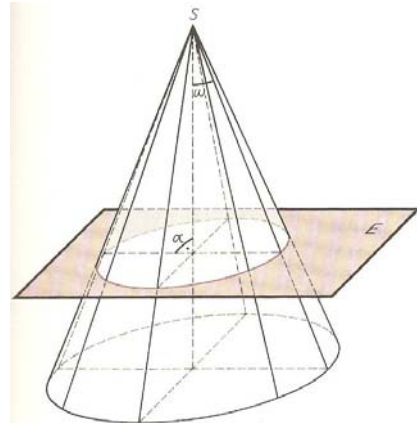


Abb.2: Der Kreis

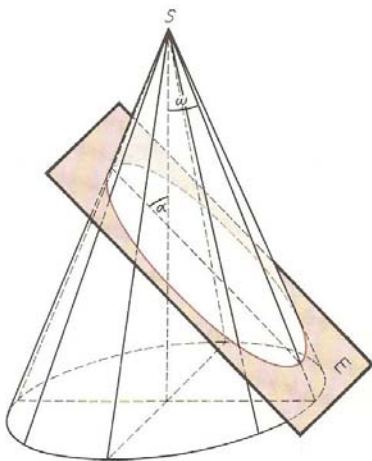


Abb. 3: Die Ellipse

Durch Änderung der Lage der Ebene können nun aus dem Kreis die weiteren Kegelschnitte folgen. Vom Kreis ausgehend wird nun die Ebene um eine der Kreistangenten gedreht. So lange der Schnittwinkel  $\alpha$  der Ebene zur Kegelachse größer ist als der Öffnungswinkel  $\omega$  ist, also  $\alpha > \omega$ , entsteht als Schnittkurve eine Ellipse.

Wird jedoch der Winkel  $\alpha$  verändert, streckt oder verlängert sich die Ellipse. Je kleiner der Winkel  $\alpha$  wird, desto langgezogener wird die Ellipse. Sobald der Punkt erreicht ist, wo Schnittwinkel und Öffnungswinkel gleich sind ( $\alpha = \omega$ ), schneidet die Ebene eine Mantellinie nicht mehr. Denn diese Mantellinie verläuft parallel zur Ebene. Somit öffnet sich die Ellipse zu einer Parabel.

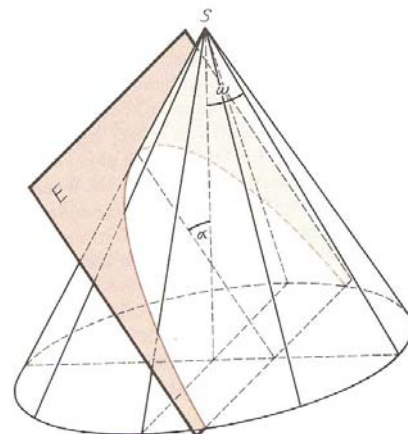


Abb. 4: Die Parabel

Durch weitere Drehung der Ebene wird der Schnittwinkel nun kleiner ( $\alpha < \omega$ ). Die Ebene schneidet daher beide Hälften des Doppelkegels. Bisher wurde nur eine Hälfte (hier die untere) geschnitten, dabei entsteht als Schnittkurve eine Hyperbel. Durch schneiden beider Hälften des Doppelkegels hat die Hyperbel als einzige der hier erwähnten Schnittkurven zwei ‚Äste‘.

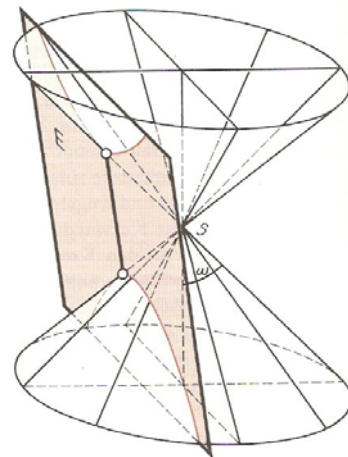


Abb. 5: Die Hyperbel

Als „Entartungen“ im Sinne von Schnittkurven – das heißt, dass weder Kreis, Ellipse, Hyperbel noch Parabel beim Schnitt mit einem Doppelkegel entstehen – können die im Anschluss dargestellten drei Sonderfälle gesehen werden. Diese Sonderfälle treten auf, wenn die Ebene genau durch die Spitze des Kegels geht. Wenn  $\alpha > \omega$  ist, erhält man einen Punkt  $S$  – die Spitze des Kegels als Schnittfigur. Ist  $\alpha = \omega$ , erhält man eine Mantellinie, das heißt, diese Schnittfigur ist eine Tangentialebene des Kegels. Wenn der Schnittwinkel kleiner dem Öffnungswinkel ist,  $\alpha < \omega$ , erhält man eine Schnittfigur bestehend aus zwei Mantellinien.

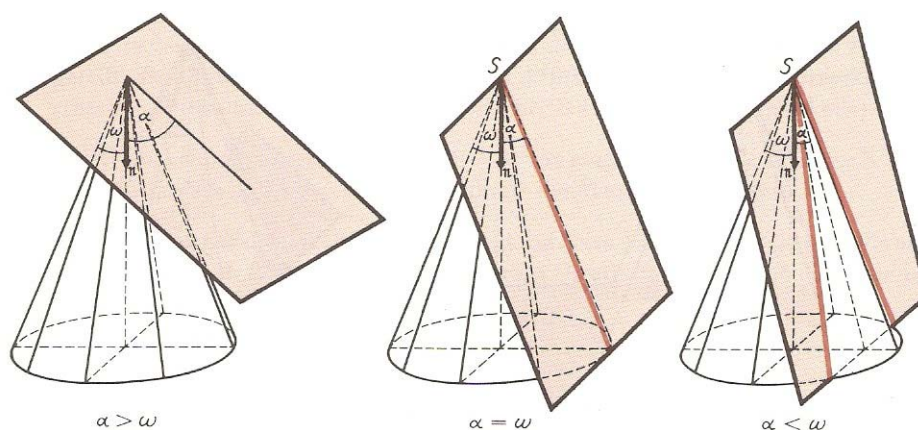


Abb. 6: Drei Sonderfälle

Wie bereits bei der Geschichte der Kegelschnitte festgestellt werden konnte, lassen sich die Kegelschnitte zwar in ein mathematisches Gebiet zu ordnen, die Perspektiven können aber verschieden sein. Einerseits können die Kegelschnitte geometrisch in der ebenen oder der räumlichen Geometrie betrachtet werden, andererseits kann der Blickwinkel ein algebraischer sein, die Betrachtung einer quadratischen Gleichung.<sup>21</sup> Kegelschnitte sind, wie bereits erwähnt, quadratische Gleichungen, weshalb sie auch als Polynome höheren Grades bezeichnet werden können. Interessant ist dabei, dass alle Ableitungen von Kegelschnitten linear sind.

Im Unterricht wird bei der Behandlung der Kegelschnitten oft manches zuvor Gelernte ‚plötzlich‘ wieder gebraucht. So wird zum Beispiel der Satz von Thales<sup>22</sup> angewandt und auch der Satz von Pythagoras – lineare Exzentrizität – tritt auf. Für weiterführende Aufgaben im Zusammenhang mit quadratischen Gleichungen, wird das Lösen von Wurzelgleichungen wieder gebraucht. Weiters können Spiegelung, Drehung und Streckung von Objekten vorkommen.

Wie sehen nun – nicht nur graphisch und räumlich dargestellt – die Kegelschnitte aus, und wie lauten die mathematischen Definitionen für die jeweiligen Kurven? Definition und Konstruktion wird nun für Ellipse, Hyperbel und Parabel einzeln aufgezeigt.

---

<sup>21</sup> Vgl. <http://www.madin.tu-bs.de/madin-offen/oberstufengeometrie/st3/st31/theorie>

<sup>22</sup> Satz von Thales: Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises beträgt  $90^\circ$ . [Bartsch, S. 132]

Satz von Thales: Liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Dreiecksseite, so ist das Dreieck rechtwinkelig. [Müller-Fonfara, S. 234]; Im Halbkreis ist jeder Peripheriewinkel ein rechter Winkel. [Müller-Fonfara, S. 261]

Friedrich Dingeldey fasste in der „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften“ die Apparate zum Konstruieren von Kegelschnitten zusammen:

„[Es] wären noch Apparate zu erwähnen, die je nach ihrer Einstellung irgend einen der drei Kegelschnitte zu zeichnen gestatten. Hier kommen besonders solche Instrumente in Betracht, die die Kurve als Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene erzeugen. Arabische Mathematiker des 10.-12. Jahrhunderts haben derartige Instrumente angegeben[. ...] Aus neuerer Zeit ist zu erwähnen der Kegelschnittzirkel.“ [Dingeldey S. 88]

### 2.2.1. Ellipse<sup>23</sup>

Definition:

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  den konstanten Wert  $2a$  hat.

$$ell = \{X \mid \overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a\}$$

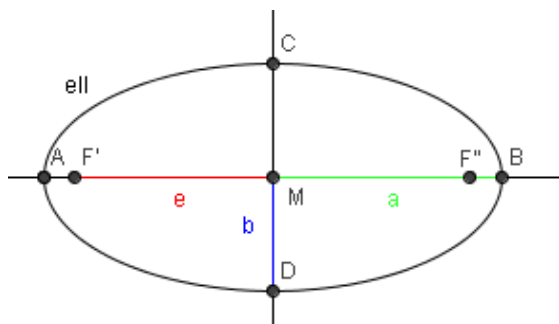


Abb. 7: Definition Ellipse

$F_1$  und  $F_2$ <sup>24</sup> werden dabei die Brennpunkte der Ellipse genannt. Die Strecke AB wird als Hauptachse bezeichnet, auf der sich auch die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  befinden. Die Länge der Hauptachse beträgt  $2a$ . Die

Punkte A und B sind die Hauptscheitel der Ellipse. Auf der Streckensymmetralen von  $F_1F_2$  liegen die Punkte C und D, ihre Bezeichnung lautet Nebenscheitel. Die Strecke CD heißt Nebenachse der Ellipse. Die Länge der Nebenachse ist  $2b$ . Der Abstand zwischen einem Brennpunkt und dem Mittelpunkt der Ellipse wird als lineare Exzentrizität

<sup>23</sup> Graphiken wurden alle in GeoGebra von Annette Schocher erstellt.

<sup>24</sup> In der Graphik wird  $F_1$  als F' und  $F_2$  als F'' beschriftet.

oder Brennweite bezeichnet,  $e$ . Für die Brennweite gilt:  $e^2 = a^2 - b^2$ , wobei  $a \geq b$  ist.

Für die Ellipsengleichung<sup>25</sup> einer Ellipse in erster Hauptlage mit den

Halbachsenlängen  $a$  und  $b$  gilt:  $(x|y) \in ell \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

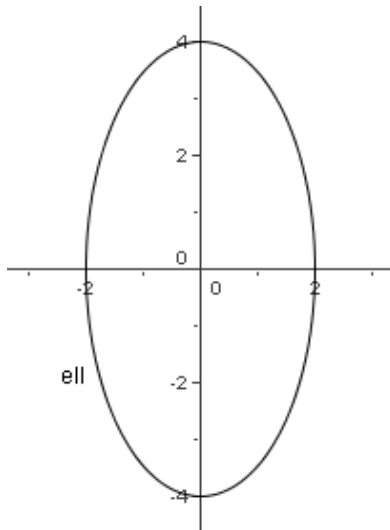


Abb. 8: Ellipse 2. HL

Um eine Ellipse in 2. Hauptlage zu erhalten, wird eine Ellipse 1. Hauptlage an der 1. Mediane gespiegelt. In der Ellipsengleichung werden  $x$  und  $y$  vertauscht. Auch in diesem Fall gilt:  $e^2 = a^2 - b^2$ , und somit  $a \geq b$ .

Für die Ellipsengleichung in zweiter Hauptlage gilt:

$$(x|y) \in ell \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

Als Sonderfall einer Ellipse kann der Kreis gesehen werden. Aus  $e^2 = a^2 - b^2$  folgt  $a \geq b$ . Im Spezialfall ist dabei  $a = b$ . Dadurch fallen die beiden Brennpunkte im Mittelpunkt der Ellipse zusammen, denn  $e = 0$ . Setzt man nun in der Ellipsengleichung für  $a = b = r$  ein, so erhält man:  $r^2x^2 + r^2y^2 = r^2r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$ . Diese Gleichung ist eine Kreisgleichung mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M(0|0)$ .

Die Ellipse wird nicht als Sonderfall eines Kreises betrachtet. Aus einem Kreis kann man aber eine Ellipse bilden, in dem der Kreis gestaucht wird.

<sup>25</sup> Da die Herleitung der Ellipsengleichung in jedem Schulbuch beschrieben wird, wird hier darauf verzichtet.

Dabei wird ein Verkürzungsfaktor  $v = \frac{b}{a}$  verwendet, wobei  $b < a$  ist.  $b < a$

ist dabei die Ellipseneigenschaft.

Von einem gegebenen Kreis  $k(M, a)$  geht der Punkt  $C = (0|a)$  über in den Nebenscheitelpunkt der Ellipse  $\bar{C} = (0|b)$ . Durch den Verkürzungsfaktor kann jedem beliebigen Punkt des Kreises ein Punkt auf der Ellipse zugeordnet werden.

$$\text{Sei } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in k : \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{b}{a} \cdot y \end{pmatrix} \in ell.$$

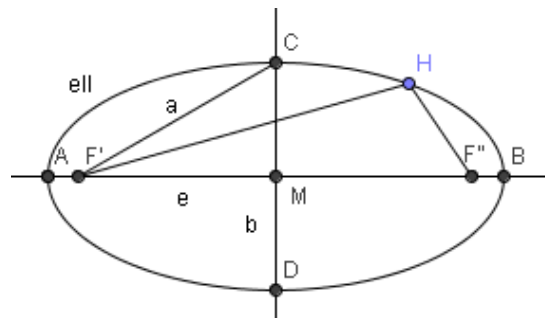
Ellipsen in allgemeiner Lage können durch Drehung und Translation in die erste Hauptlage gebracht werden.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine Ellipse zu konstruieren. Die wohl bekannteste Methode ist die Gärtnerkonstruktion<sup>26</sup>. Oft werden elliptische Blumenbeete angelegt, dabei hat man aber eher selten mathematische Utensilien bei sich, um diese Kurve exakt zu zeichnen. Daher wird auf zwei Stäbe und eine Schnur zurückgegriffen. Die Enden der Schnur werden an den Stäben befestigt. Die beiden Stäbe werden in den Boden gesteckt. Mit einem weiteren Stab oder einer Schaufel wird nun die Schnur gespannt. Zieht man die Schaufel nun mit gespannter Schnur, zeichnet sich eine Ellipse ab. Die beiden Stäbe, die im Boden verankert werden, sind dabei die Brennpunkte, liegen also auf einer Geraden. Die Schnur hat eine konstante Länge, diese beträgt  $2a$  und ist immer länger als der Abstand der beiden Stäbe. Diese Art der Konstruktion einer Ellipse ist daher die direkte Umsetzung der Brennpunktdefinition. Nach dem gleichen Prinzip ist die Punktkeitskonstruktion oder Konstruktion mit Zirkel und Lineal aufgebaut.

<sup>26</sup> Die Gärtnerkonstruktion trat erstmals bei Anthemios von Tralleis (?-534), dem Erbauer der Hagia Sophia in Konstantinopel, auf. [Schupp, S. 19]

Dabei wird lediglich die Strecke  $2a$  nicht als Schnur gesehen, sondern sie wird aufgezeichnet.<sup>27</sup>

Durch Wahl beliebiger Teilungspunkte teilt sich die Strecke in zwei Teilstrecken  $d$  und  $2a - d$ ; in der Skizze ersichtlich als



$d = \overline{F'H}$  und  $2a - d = \overline{HF''}$ . Der

Abb.9: Gärnterkonstruktion

Schnittpunkt der Kreise  $k_1(F', d)$  und  $k_2(F'', 2a - d)$  ergibt einen Punkt auf der Ellipse, hier dargestellt durch H. Somit kann jeder Punkt der Ellipse konstruiert werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Näherungskonstruktion einer Ellipse ist mit Hilfe der Scheitelschmiegunskreise bei gegebenen  $a$  und  $b$  als Halbachsenlängen. Für die Mittelpunkte der Scheitelschmiegunskreise wird zuerst das rechtwinkelige Dreieck CMB zu einem Rechteck CMBE ergänzt.

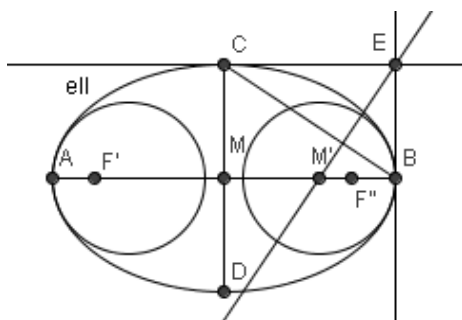


Abb. 10: Scheitelschmiegunskreise

ergänzt. Durch den Punkt E wird eine Normale auf die Diagonale BC errichtet. Der Schnittpunkt der Normalen mit der Hauptachse ergibt den Mittelpunkt des Scheitelschmiegunskreises. Der Radius ist dabei der Abstand zum entsprechenden Scheitelpunkt. Auf diese Weise erhält man auch den

Schnittpunkt mit der Nebenachse. Durch Abschlagen der Strecke  $a$  von Punkt C auf die Hauptachse erhält man die Brennpunkte  $F'$  und  $F''$ . Für eine genauere Zeichnung müssen weitere Ellipsenpunkte in der gleichen Weise konstruiert werden.

<sup>27</sup> Für diese Strecke wird oft auch gleich die Hauptachse verwendet, da diese ja die Länge  $2a$  besitzt.

Da der Kreis und die Ellipse zueinander affin sind, kann diese Eigenschaft zur Konstruktion einer Ellipse aus einem Kreis genutzt werden.

Es sei  $k(0,0, a)$  ein Kreis und  $e//$  eine Ellipse in ersten Hauptlage mit den Achsenlängen  $2a$  und  $2b$ .

Aus einem Punkt des Kreises  $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 > 0 \end{pmatrix} \in k$  kann eindeutig ein

Ellipsenpunkt  $P' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y'_2 > 0 \end{pmatrix} \in e//$ , wobei  $y'_2 = \frac{b}{a} y_2$  gewonnen werden.

Für diese Konstruktion ist die Anfertigung einer Wertetabelle unumgänglich. Die Skizzierung der Ortslinie erfolgt dann aufgrund der gefundenen Ellipsenpunkte.

Beweis:

Seien die Annahmen wie im Satz erläutert getroffen:

Aus der Kreisgleichung erhält man:  $x_1^2 + y_2^2 = a^2$ . Umgeformt bedeutet

$$\text{dies: } x_1^2 = a^2 - y_2^2$$

Eine Ellipsengleichung der Ellipse  $e//$  durch den Punkt  $P'$  lautet:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_2'^2}{b^2} = 1$$

Nun werden Äquivalenzumformungen durchgeführt:

$$\Leftrightarrow b^2(a^2 - y_2^2) + a^2 y_2'^2 = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow -b^2 y_2^2 + a^2 y_2'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2'^2 = \frac{b^2}{a^2} y_2^2 \Leftrightarrow y'_2 = \frac{b}{a} y_2$$

Die letzte Äquivalenz folgt aus der Annahme, dass  $a, b, y_2, y_2' > 0$  gewählt wurden.

### 2.2.2. Hyperbel<sup>28</sup>

Definition:

Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte, für die der Betrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  den konstanten Wert  $2a$  hat.

$$\text{hyp} = \{X \mid |\overline{F_1 X} - \overline{F_2 X}| = 2a\}$$

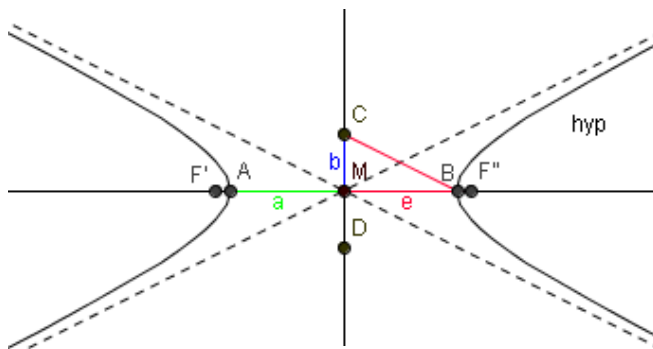


Abb.11: Definition Hyperbel

Die Brennpunkte der Hyperbel werden  $F_1$  und  $F_2$ <sup>29</sup> genannt. Wie auch bei der Ellipse ist die Hauptachse zwischen den Punkten A und B.

Die Länge der Hauptachse beträgt  $2a$ . Die Punkte A und B werden als Hauptscheitel bezeichnet. Die Nebenscheitel der Hyperbel sind die Punkte C und D, diese liegen aber nicht auf der Hyperbel. Die Länge der Nebenachse beträgt  $2b$ . Die Nebenscheitel haben daher jeweils den Abstand  $b$  zum Mittelpunkt der Hyperbel. Die Brennweite oder lineare Exzentrizität der Hyperbel,  $e$ , ist der Abstand eines Brennpunktes zum Mittelpunkt. Für eine Hyperbel mit den Halbachsenlängen  $a$  und  $b$  und der Brennweite  $e$  gilt:  $e^2 = a^2 + b^2$ .

Für die Hyperbelgleichung<sup>30</sup> einer Hyperbel in erster Hauptlage mit den Halbachsenlängen  $a$  und  $b$  gilt:

$$(x|y) \in \text{hyp} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

<sup>28</sup> Graphiken wurden alle in GeoGebra von Annette Schocher erstellt.

<sup>29</sup> In der Graphik wird  $F_1$  als  $F'$  und  $F_2$  als  $F''$  beschriftet.

<sup>30</sup> Herleitung der Hyperbelgleichung wird wie bei der Ellipse hier nicht durchgeführt.

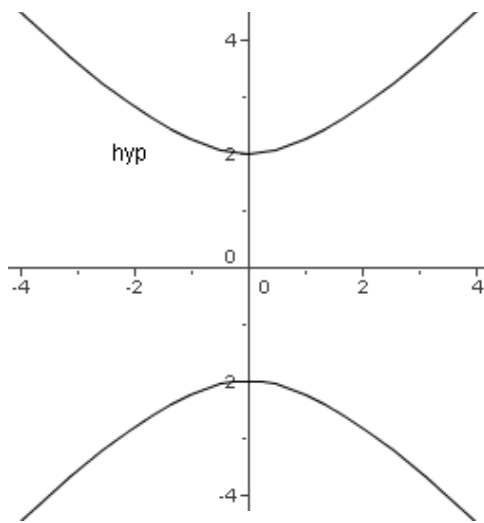


Abb. 12: Hyperbel 2.HL

Spiegelt man eine Hyperbel in erster Hauptlage an der 1. Mediane, erhält man eine Hyperbel in 2. Hauptlage. In der Hyperbelgleichung werden dabei  $x$  und  $y$  vertauscht. Die lineare Exzentrizität bleibt auch in der zweiten Hauptlage:  $e^2 = a^2 + b^2$ .

Hyperbelgleichung in zweiter Hauptlage:

$$(x|y) \in \text{hyp} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow -a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

Der Konstruktionsweg einer Hyperbel kann rasch aus der Brennpunkteigenschaft hergeleitet werden. Bei gegebenen Brennpunkten und gegebener Hauptachsenlänge, werden zuerst die Brennpunkte, sowie der Mittelpunkt gezeichnet. Durch Verbinden der Punkte erhält man auch die Hauptachse. Die Länge  $2a$  wird als Hilfsstrecke gezeichnet. Beliebige Teilungspunkte dieser Strecke teilen  $2a$  in  $d$  und  $2a-d$ . Das Abtragen dieser Teilstrecken mit Hilfe eines Zirkels von den Brennpunkten aus, liefert Punkte der Hyperbel. Durch die Symmetrie bezüglich des Mittelpunktes  $M$  erhält man für jedes gewählte  $d$  vier Punkte der Hyperbel. Dadurch ist eine rasche Skizzierung der Hyperbel möglich. Diese Konstruktionsmethode ist der der Ellipse gleich.

Auch kann eine Näherungskonstruktion der Hyperbel, wie auch bei der Ellipse, durch Scheitelschmiegunskreise erstellt werden. Um die Scheitelschmiegunskreismittelpunkte  $M'$  und  $M''$  zu konstruieren werden die Asymptoten zur Hilfe genommen.

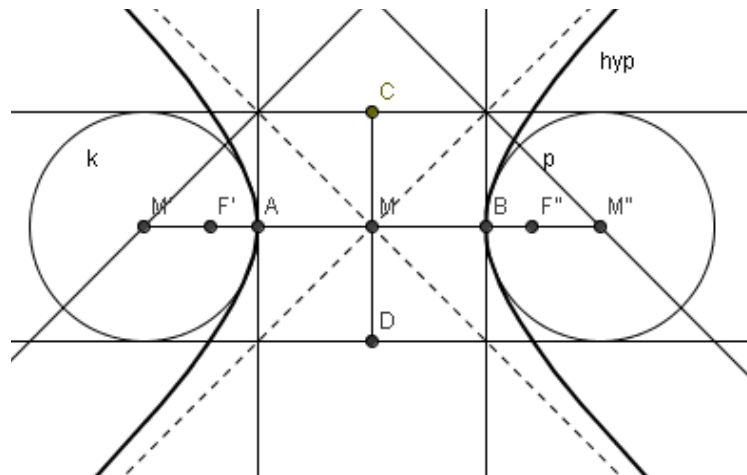


Abb. 13: Scheitelschmiegunskreise

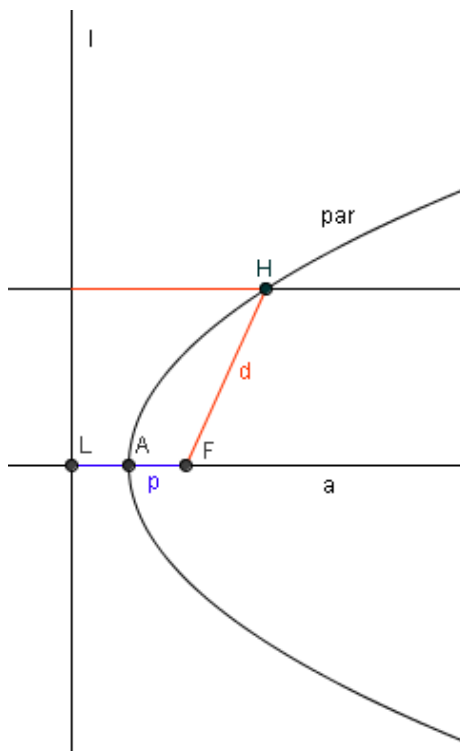
Weitere Punkte müssen für eine genauere Zeichnung konstruiert werden.

### 2.2.3. Parabel<sup>31</sup>

Definition:

Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt  $F$  (Brennpunkt) und von einer gegebenen Geraden  $\ell$  (Leitgerade) den gleichen Abstand hat.

$$par = \{X \mid \overline{FX} = \overline{X\ell}\}$$



Die Gerade  $\ell$  wird Leitlinie oder Leitgerade genannt.  $F$  ist der Brennpunkt der Parabel. Die Parabel besitzt eine zur Leitlinie normale Symmetrieachse, man bezeichnet diese Achse mit  $a$ . Auf dieser Achse liegt der Brennpunkt. Ist Punkt  $L$  der Schnittpunkt von  $a$  und  $\ell$ , so gilt: Der Scheitel  $A$  ist der Halbierungspunkt der Strecke  $LF = p$ . Der Scheitel ist auch Schnittpunkt der Achse  $a$  mit der Parabel selbst. Die Strecke  $p$  wird auch Parameter genannt. Der Abstand vom Scheitel zum Brennpunkt beträgt  $e = \frac{p}{2}$ .<sup>32</sup>

Abb. 14: Definition Parabel

<sup>31</sup> Graphiken wurden alle in GeoGebra von Annette Schocher erstellt.

<sup>32</sup> Die graphische Umsetzung der mathematischen Definition ist in der Zeichnung durch die roten Strecken  $d$  dargestellt.

In einem Koordinatensystem kann eine Parabel jede beliebige Lage einnehmen. Es gibt jedoch vier Hauptlagen von Parabeln. Alle vier Hauptlagen haben gemein, dass ihr Scheitelpunkt A sich im Ursprung befindet. Von erster Hauptlage spricht man, wenn der Brennpunkt der Parabel sich auf der positiven 1. Achse befindet. Für eine Parabel in erster Hauptlage mit dem Parameter  $p$  gilt:  $(x|y) \in par \Leftrightarrow y^2 = 2px$ .

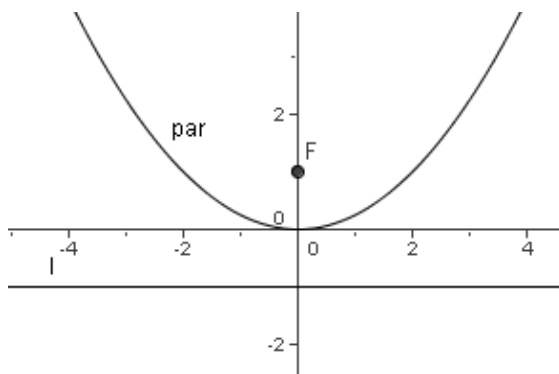


Abb. 15: Parabel 2. HL

Durch Spiegelung der Parabel in erster Hauptlage an der 1. Mediane geht eine Parabel in zweiter Hauptlage hervor. Der Brennpunkt dieser Parabel liegt nun auf der positiven 2. Achse. Die dazugehörige Parabelgleichung lautet:

$$(x|y) \in par \Leftrightarrow x^2 = 2py$$

Zweite, dritte und vierte Hauptlage einer Parabel können auch einfach durch die Drehung um jeweils  $90^\circ$  um den Ursprung hergeführt werden.

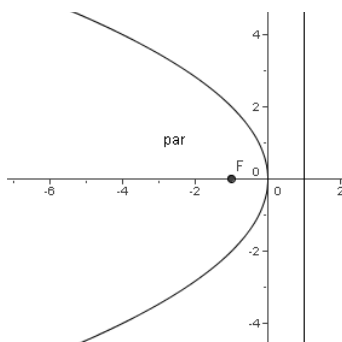


Abb.16: Parabel 3. HL

Befindet sich die Parabel in dritter Hauptlage, ist die dazugehörige Parabelgleichung:

$$(x|y) \in par \Leftrightarrow y^2 = -2px$$

Eine weitere 90° Drehung um den Ursprung führt zur noch fehlenden Hauptlage. Für die Parabelgleichung einer Parabel in vierter Hauptlage gilt:  $(x|y) \in \text{par} \Leftrightarrow x^2 = -2py$

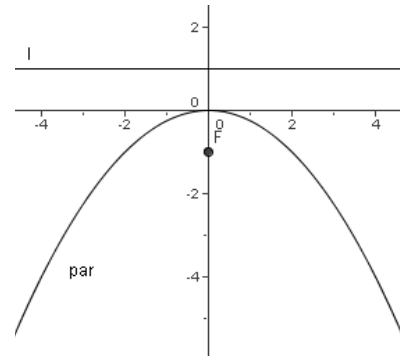


Abb. 17: Parabel 4. HL

Eine Funktion  $f$  mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mit  $a, b$  und  $c$  aus  $\mathbb{R}$ , wobei  $a \neq 0$  besitzt eine Parabel als Graph.

Beweis:<sup>33</sup>

Der Graph der Funktion  $f_0$  mit  $f_0(x) = x^2$  besteht aus allen Punkten  $(x|y)$  mit  $y = x^2$  bzw.  $x^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y$ . Er ist also eine Parabel in 2. Hauptlage mit

$$p = \frac{1}{2}.$$

Durch Umformung des Terms für  $f(x)$  erhält man:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$f(x) = a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

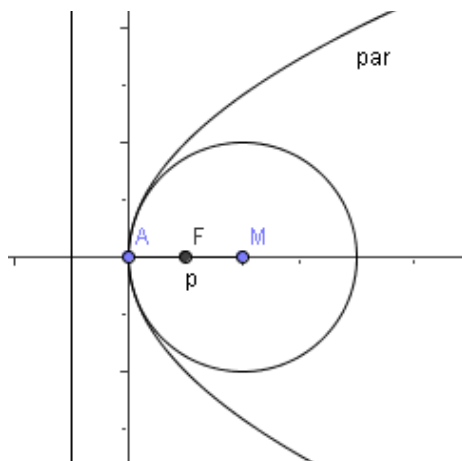
Daraus ist zu erkennen, dass durch Verschiebung des Graphen von  $f_0$  um  $\frac{b}{2a}$  in Gegenrichtung der 1. Achse, eine darauf folgende Streckung mit dem Faktor  $a$  in Richtung der 2. Achse und eine anschließende Verschiebung in Richtung der 2. Achse um  $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$  der Graph von  $f$

<sup>33</sup> Übernommen von Malle (2006): Mathematik verstehen 7. S. 177-178.

hervorgeht. Der Graph von  $f_0$  ist eine Parabel. Bei Streckung oder Verschiebung geht aus einer Parabel wieder eine Parabel hervor. Daher ist auch der Graph von  $f$  eine Parabel.

Die Konstruktion einer Parabel ist meist eine Punktekonstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Bei der Parabel werden bei gegebenem  $p$  zuerst auf der Achse  $a$  die Punkte  $L$ ,  $A$  und  $F$  konstruiert. Die Leitlinie wird darauf als Normale der Achse durch  $L$  gezogen. Anschließend wird eine parallele Hilfslinie zur Leitlinie gezogen. Der Normalabstand von Leitlinie und Hilfslinie wird dann vom Brennpunkt aus abgeschlagen. Somit erhält man zwei Punkte der Parabel. Durch Zeichnen weiterer Parallelen nach dem gleichen Verfahren können weitere Punkte der Parabel konstruiert werden.

Die Näherung an die Parabel kann durch Scheitelschmiegunskreise durchgeführt werden. Bei Scheitelschmiegunskreisen muss zuerst der Mittelpunkt des Kreises gefunden werden. Der Mittelpunkt liegt auf der Achse  $a$  und hat vom Scheitel  $A$  den Abstand  $p$ . Der Radius des Kreises

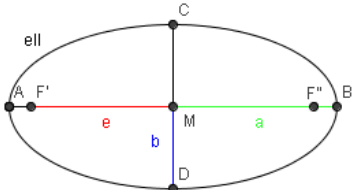
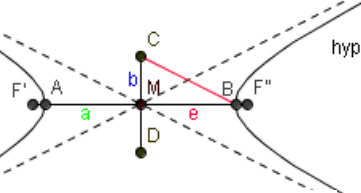
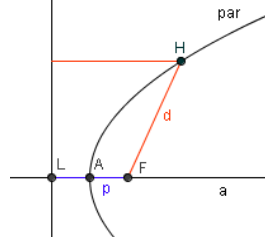


beträgt daher auch  $p$ :  $r = \overline{MA} = p$ .

Weitere Punkte müssen wiederum durch Punktekonstruktion mit Zirkel und Lineal gefunden werden.

Abb. 18: Scheitelschmiegunskreise

### 2.3. Formeln: Übersichtstabelle zu Kegelschnitten

Ellipse	Hyperbel	Parabel
 <p>Abb. 19: Ellipse</p>	 <p>Abb. 20: Hyperbel</p>	 <p>Abb. 21: Parabel</p>
Angaben in Bezug auf 1. Hauptlage		
<p>Mittelpunkt <math>M(0 0)</math></p> <p>Hauptscheitel <math>A(-a 0), B(a 0)</math></p> <p>Hauptachse <math>AB = 2a</math></p> <p>Nebenscheitel <math>C(0 b), D(0 -b)</math></p> <p>Nebenachse <math>CD = 2b</math></p> <p>Parameter <math>p = \frac{b^2}{a}</math></p> <p>Brennpunkte <math>F_1(-e 0), F_2(e 0)</math></p> <p>Lineare Exzentrizität <math>e = \overline{MF_1} = \overline{MF_2}</math> <math>e^2 = a^2 - b^2</math></p> <p>Numerische Exzentrizität <math>\frac{e}{a}</math></p>	<p>Mittelpunkt <math>M(0 0)</math></p> <p>Hauptscheitel <math>A(-a 0), B(a 0)</math></p> <p>Hauptachse <math>AB = 2a</math></p> <p>Nebenscheitel <math>C(0 b), D(0 -b)</math></p> <p>Nebenachse <math>CD = 2b</math></p> <p>Parameter <math>p = \frac{b^2}{a}</math></p> <p>Brennpunkte <math>F_1(-e 0), F_2(e 0)</math></p> <p>Lineare Exzentrizität <math>e = \overline{F_1M} = \overline{F_2M}</math> <math>e^2 = a^2 + b^2</math></p> <p>Numerische Exzentrizität <math>\frac{e}{a}</math></p>	<p>Scheitel <math>A(0 0)</math></p> <p>Parameter <math>p = 2e</math></p> <p>Brennpunkt <math>F(e 0)</math></p> <p>Leitgerade <math>\ell: x = -\frac{p}{2}</math></p>

Definition über Brennpunkteigenschaft:		
$\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$	$ \overline{XF_1} - \overline{XF_2}  = 2a$	$\overline{FX} = \overline{X\ell}$
Definition über Scheitelform:		
$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a}x^2$		
$\frac{p}{a} < 0$	$\frac{p}{a} > 0$	$\frac{p}{a} = 0$
Parameterdarstellung:		
$x = a \cdot \cos t$ $y = b \cdot \sin t$ $t \in [0; 2\pi[$	$x = \pm a \cdot \cosh t$ $y = b \cdot \sinh t$ $t \in \mathbb{R}$	$x = \frac{t^2}{2p}$ $y = t$ $t \in \mathbb{R}$
Lage einer Geraden zu einem Kegelschnitt		
Sekante: $g \cap K = \{S_1; S_2\}$		
Tangente: $g \cap K = \{T\}$		
Passante: $g \cap K = \{ \}$		
Berührbedingung		
$d^2 = a^2k^2 + b^2$	$d^2 = a^2k^2 - b^2$	$p = 2kd$
Tangentengleichung:		
$b^2xx_T + a^2yy_T = a^2b^2$	$b^2xx_T - a^2yy_T = a^2b^2$	$yy_T = p(x + x_T)$
1. Hauptlage		
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	$y^2 = 2px$
2. Hauptlage		
$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$	$-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$	$x^2 = 2py$
		3. Hauptlage $y^2 = -2px$
		4. Hauptlage $x^2 = -2py$

### 3. Der Lehrplan<sup>34</sup> und die Kegelschnitte

Indem wir lehren, lernen wir.  
Seneca<sup>35</sup>

#### 3.1. Der Mathematikunterricht im Lehrplan

Einerseits beinhaltet der Lehrplan notwendige Vorgaben, die die Vereinheitlichung des zu vermittelnden Wissens aufzeigt. Auf der anderen Seite bietet er aber auch Freiräume, die die individuelle Gestaltung der jeweiligen Schulstandorte ermöglicht. Im ersten Teil des Lehrplans, der dem „Allgemeine[n] Bildungsziel“ gewidmet ist, werden folgende Vorgaben und Freiräume aufgelistet für welche die Verwendung des Lehrplans als Grundlage dient:

- die Konkretisierung des Erziehungsauftrags der Schule,
  - die Planung und Steuerung des Unterrichts in inhaltlicher und in methodischer Hinsicht
  - die Gestaltung des Erweiterungsbereichs und für schulautonome Lehrplanbestimmungen
  - die Planung der schulpartnerschaftlichen Gremien,
  - das standortbezogene Bildungsangebot,
  - die Berücksichtigung der individuellen Interessen und persönlichen Lebensqualität der Schülerinnen und Schüler.
- [AHS-Lehrplan 1. Teil]

Durch diese Grundlagen wird aufgezeigt, dass das Unterrichten eines Faches nicht nur rein fachspezifisch ist, sondern in die Gesamtheit der Schule mit allen Fächern hineinfließt. Die im ersten Teil des Lehrplans formulierten Bildungsbereiche unterstreichen diese Gesamtheit, indem sie in den Lehrplänen der einzelnen Unterrichtsfächer erneut aufscheinen und

<sup>34</sup> Der Lehrplan für die Oberstufe ist mittlerweile nur mehr elektronisch zur Verfügung gestellt. Informationen zum Lehrplan stehen unter:

[www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/abs/ahs\\_lehrplaene\\_oberstufe.xml](http://www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/abs/ahs_lehrplaene_oberstufe.xml)

Vertiefende Kommentare unter [www.gemeinsamlernen.at](http://www.gemeinsamlernen.at)

<sup>35</sup> <http://shop.bk-teachware.com>

mit dem jeweiligen Unterrichtsfach in Verbindung gebracht werden. Die Bildungsbereiche können auch als „Grundlage für die fächerverbindende und fächerübergreifende Zusammenarbeit“ [AHS-Lehrplan 1. Teil] dienen. Im Folgenden werden die Beiträge zu den einzelnen Bildungsbereichen des Unterrichtsfachs Mathematik erwähnt.

#### Bildungsbereich Sprache und Kommunikation

Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, sie präzisiert Aussagen und verdichtet sie, neben der Muttersprache und den Fremdsprachen wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache.

[Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004]

Der Mathematikunterricht dient nicht nur der Aneignung neuer mathematischer Fähigkeiten, sondern auch der Erwerbung einer ‚neuen Sprache‘. Aus diesem Grund ist es besonders wichtig, Schülerinnen und Schüler zu motivieren, mathematische Vorgänge auch durch die Sprache der Mathematik zu formulieren.

#### Bildungsbereich Mensch und Gesellschaft

Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt.

[Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004]

Bei Betrachtung der vielen Bereiche des Lebens, die im Unterricht mit Mathematik in Verbindung gebracht werden sollen, reicht es nicht den Schülerinnen und Schülern die Wichtigkeit der Mathematik im Alltag nur aufzuzeigen. Die Herstellung einer Verbindung geschieht best-möglich durch anwendungsorientierte Beispiele.

### Bildungsbereich Natur und Technik

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit verstehen; die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden.

[Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004]

Ähnlich dem Bildungsbereich ‚Mensch und Gesellschaft‘ soll auch beim Bildungsbereich ‚Natur und Technik‘ die Anwendungsorientiertheit ein umfassend behandeltes Anliegen sein. Weiters bietet dieser Bildungsbereich den Rahmen für das selbstständige Suchen nach Antworten zu einer oft gestellten Frage in Bezug auf Naturphänomene, zum Beispiel: „Warum?“

### Bildungsbereich Kreativität und Gestaltung

Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden.

[Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004]

Obwohl mathematische Lösungen eindeutig sind, können die Lösungswege dennoch verschieden sein. Aus diesem Grund fördert besonders der Mathematikunterricht die Kreativität der Schülerinnen und Schüler. Um diesem Bildungsbereich gerecht zu werden soll der Mathematikunterricht daher auch die Möglichkeiten bieten, selbständig zu arbeiten und zu experimentieren

## Bildungsbereich Gesundheit und Bewegung

Durch die Bearbeitung mathematisch beschreibbarer Phänomene aus dem Gesundheitswesen und dem Sport können Beiträge zu diesem Bildungsbereich geleistet werden.  
[Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004]

Der Beitrag des Mathematikunterrichts zu den Bildungsbereichen ist ein Beitrag zur Allgemeinbildung. In allen Phasen des Mathematikunterrichts soll dies daher berücksichtigt werden. Die Definition des Mathematikunterrichts im Lehrplan wird neben den Beiträgen zu den Bildungsbereichen besonders durch mathematische Kompetenzen definiert. Der Lehrplan unterscheidet drei mathematische Kompetenzen<sup>36</sup>. Die erste Kompetenz bezieht sich auf Kenntnisse. Schülerinnen und Schüler sollen mit Grundkenntnissen und Grundwissen mathematischer Inhalte vertraut werden. Die mathematischen Inhalte sind in den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik verankert.

Die zweite Kompetenz nimmt Bezug auf Begriffe. Die Schülerinnen und Schüler können Mathematik als Sprache erleben. Probleme können dargestellt werden und Untersuchungen der Probleme werden ermöglicht. Die Begriffe können als Werkzeuge der Mathematik gesehen werden.

Auf die mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten bezieht sich die dritte Kompetenz. Die Aneignung dieser Fertigkeiten und Fähigkeiten basiert auf mathematischen Aktivitäten wie darstellen und interpretieren, formales und operatives Arbeiten, experimentelles und heuristisches Arbeiten, sowie kritisches und argumentatives Arbeiten.

---

<sup>36</sup> Vergleiche Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004

Der Lehrplan, BGBl. II Nr. 277/2004, liefert auch mögliche Antworten auf die Frage „Was ist Mathematik noch?“, indem er die Aspekte der Mathematik auflistet:

Schöpferisch – kreativer Aspekt:

Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden.

Sprachlicher Aspekt:

Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden.

Erkenntnistheoretischer Aspekt:

Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.

Pragmatisch – anwendungsorientierter Aspekt:

Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder.

Autonomer Aspekt:

Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktive geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen – von festgelegten Prämissen ausgehend – stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess.

Kulturell – historischer Aspekt:

Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung.

Die Schülerin und der Schüler soll verinnerlichen, dass Mathematik nicht lediglich ein Pflichtgegenstand in der Schule und für ausgewählte Studien und Berufsfelder Voraussetzung ist, sondern darüber hinaus dazu beiträgt, ihre Persönlichkeit und ihr Denken durch das Erlernen von Problemlösungen und die Schulung des logischen Denkens positiv beeinflussen und formen kann. Eine besondere Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler in diesem Entwicklungsprozess stellen die Kegelschnitte dar, denn das mathematische Vorwissen der Schülerinnen und Schüler muss angewandt und gleichzeitig neues Wissen erworben werden. Die Schulung der räumlichen Vorstellungskraft der Schülerinnen und Schüler geht Hand in Hand mit der Behandlung der Kegelschnitte.

### 3.2. Die Verankerung der Kegelschnitte im Lehrplan

Die Kegelschnitte sind im Lehrplan für Mathematik [BGBl. II Nr. 277/2004] im Lehrstoff der 7. Klasse verankert:

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen
- Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten<sup>37</sup>

Mit dem neuen Lehrplan, der für die AHS-Oberstufe seit dem Schuljahr 2004/2005 gültig ist, kehrten die Kegelschnitte wieder vermehrt in den Mathematikunterricht zurück. Im alten AHS-Oberstufen Lehrplan traten die Kegelschnitte im Bereich der nichtlinearen analytischen Geometrie auf, besaßen aber offensichtlich eine Randposition.

---

<sup>37</sup> Der Lehrplan erwähnt bei diesem Bereich des 7. Klasse Lehrstoffes weiters zwei Punkte

- Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen
- *Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen*

Das analytische Beschreiben von geometrischen Objekten durch nichtlineare Gleichungen (Herleiten von Gleichungen), das analytische Untersuchen von geometrischen Beziehungen und das rechnerische Lösen von geometrischen Problemen sollte die Hauptaktivität der Schüler sein. Eine umfassende Behandlung der Kegelschnitte ist nicht erforderlich. [AHS-Lehrplan, 7. Klasse, S.392, 1989]

Eine Behandlung der Kegelschnitte im Mathematikunterricht konnte lediglich durch die historische Bedeutung der Kegelschnitte gerettet werden.

Allgemein gilt, dass die Behandlung der Kegelschnitte eine enge Verknüpfung von Geometrie und Algebra darstellt. Meist sind für die Behandlung bekannte Verfahren und fundamentale Ideen des Mathematikunterrichts ausreichend. Diese allgemeinen mathematischen Fähigkeiten werden dabei vertieft und wiederholt.

## 4. Neue Medien im Mathematikunterricht

Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen.  
Hans Schupp<sup>38</sup>

In unser aller Leben ist Zeit von großer Bedeutung. Mit vielen, vor allem raschen, Änderungen müssen wir uns auseinandersetzen. Technologien entwickeln sich weiter und es wird vor allem im Unterricht Wert darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler auf das Leben nach der Schule vorbereitet werden. Es wird erwartet, dass sich Schulabgänger mit diesen geänderten alten und den neuen Technologien zumindest eine Weile beschäftigt haben. Der Schluss daraus ist eindeutig zu fassen: ‚Die Schule muss mit der Zeit gehen.‘ Das wichtigste Schlagwort, die neuen Technologien betreffend, ist ‚Neue Medien‘. Betrachtet man Neue Medien als Unterrichtsmittel kann man einen „ersten Überblick bezüglich der auf Neuen Medien basierenden Werkzeuge, die derzeit für den Mathematikunterricht zur Verfügung stehen [...] [geben:] Funktionenplotter, Computeralgebrasysteme (CAS), Dynamische Geometriesysteme (DGS) und [...] Tabellenkalkulationssysteme.“ [Hischer, Seite 244]. Das Internet als Neues Medium darf nicht vergessen werden – durch das Internet ist eine ständige bereitstehende Informationsquelle gewährleistet. Besonders zu beachten in Bezug auf das Medium Internet ist, dass Schülerinnen und Schüler durch die Lehrer einen kritischen Umgang mit diesem Medium erlernen sollen.

Auch wenn es sehr viele Mathematikprogramme gibt und die Neuen Medien eigentlich im Lehrplan<sup>39</sup> verankert sind, schrecken noch immer viele Lehrerinnen und Lehrer vor dem Gebrauch dieser Medien zurück. Einerseits liegt es sicher daran, dass die meisten wenig beziehungsweise

---

<sup>38</sup> <http://shop.bk-teachware.com>

<sup>39</sup> Vergleiche AHS Lehrplan, BGBl. II, Nr. 277/2004

gar keine Erfahrungen mit diesen Medien haben, andererseits ist sicherlich auch die allgemeine abwertende Haltung Grund für das Nicht-Verwenden. Im Allgemeinen<sup>40</sup> gilt für die Anwendung von Neuen Medien in jeglichem Unterrichtsfach, dass auf einen kritischen Umgang zu achten ist, dass die Lernziele stets im Auge behalten werden müssen, dass auf das Verständnis des Lehrstoffes zu achten ist und dass auch die Sinnhaftigkeit des Einsatzes, nicht nur im pädagogischen Sinn, gewährleistet wird.

#### **4.1. Computereinsatz im Mathematikunterricht**

Der Einsatz des Computers sollte immer begründet sein dadurch, dass er eine pädagogisch erwünschte Lernsituation schafft, dass er das Erreichen des fachlichen Unterrichtsziels begünstigt oder dass er selbst als Gegenstand der Betrachtung dient. [Teiwes, S. 61]

Der speziell mit Mathematikprogrammen ausgerüstete Computer kann, so er gezielt benutzt und eingesetzt wird, ein wertvoller Beitrag zum Mathematikunterricht sein. Dabei müssen nur einige Grundregeln beachtet werden.

[Der Schüler/ die Schülerin] steht im Mittelpunkt:  
An die Spiellust [der Schülerinnen und Schüler] anknüpfend besteht die Chance, [den] Forscherdrang aufzugreifen und experimentelles Arbeiten zu fördern. Selbständiges Entdecken und Ausprobieren stärkt die Identifikation mit dem Produkt[.]  
[Teiwes, S. 62]

Nicht die Tatsache der bloßen Verwendung sollte im Fordergrund stehen, sondern wie bereits bekannte, sowie neue Lehr- beziehungsweise Lernstoffe mit Hilfe des Computers erarbeitet werden können. In der heutigen Zeit wird durch die Präsenz des Computers im alltäglichen Leben dies erleichtert. Selten müssen grundlegende Informationen, die Nützung

---

<sup>40</sup> Teiwes, S. 61

des Computers betreffend, zuerst mühsam von der Schülerin oder dem Schüler erarbeitet und erlernt werden. Die Konzentration kann direkt auf das Mathematikprogramm und den fachlichen Inhalt gerichtet werden.

Der Fachunterricht wird unterstützt:

[...] Das Herausfinden der zugrunde liegenden Strukturen und Funktionsmechanismen bietet einen direkten Zugang zum formalen und mathematischen Denken. In einer geeigneten Sprachumgebung werden die Schüler [und Schülerinnen] zu einer selbständigen Konstruktion und Formulierung mathematischer Begriffe geführt. [Teiwes, S. 62]

Mathematik trägt, wie im Lehrplan<sup>41</sup> verankert, einen Beitrag als neue Sprache. Meist dient das Computerprogramm auch als Unterstützung zur tieferen Verankerung der Lehrinhalte im Gedächtnis der Schülerinnen und Schüler. Ein Computerprogramm kann sehr viele mathematische Problemstellungen lösen, oft ist aber das mathematische Grundwissen zu der jeweiligen Thematik notwendig, um die passenden Befehle einzugeben. Unterstützend wirkt ein Computerprogramm mit graphischen Darstellungen besonders in mathematischen Bereichen, in denen geometrische Konstruktionen angefertigt werden müssen, da Handskizzen oft sehr zeitaufwändig sind und gerade für Schülerinnen und Schüler mit noch nicht trainiertem Vorstellungsvermögen sehr mühsam und schwierig sein können. Eine geometrische Konstruktion mit Hilfe eines Computerprogramms gelingt innerhalb kürzester Zeit und in einer Genauigkeit, die von Hand kaum erreicht werden kann.

Relativ unbestritten ist der Wert des Computers als entlastendes und weiterführendes Instrument bei der Bewältigung numerischer Probleme. Durch seine numerischen und graphischen Möglichkeiten unterstützt der Computer auch das Bemühen um eine vertiefte Anwendungsorientierung. [GDM, S. 278]

Beim Einsatz des Computers im Mathematikunterricht können dennoch gelegentlich Probleme auftreten. Das häufigste Problem ist die mangelnde Verfügbarkeit der Computer. An vielen Schulen sind Laptopklassen bereits

---

<sup>41</sup> Siehe Kapitel 3 und vergleiche AHS-Lehrplan, BGBl. II, Nr. 277/2004

Usus, ansonsten bedeutet der Einsatz des Computers meist ‚Rängeleien‘ mit Lehrerkollegen um das PC-Labor. Weiters sind kaum Computerprogramme als ‚Open Source‘ frei erhältlich, Generalizenzen für den Schul- und Schülergebrauch sind oft nicht leistbar.

## 4.2. Computerprogramm – GeoGebra

### 4.2.1. Hintergründe zu GeoGebra<sup>42</sup>

Das Programm GeoGebra wurde von Markus Hohenwarter entwickelt, der 1976 in Salzburg geboren wurde. 1994 begann er das Diplomstudium der Angewandten Informatik und das Lehramtsstudium für Mathematik und Psychologie. GeoGebra ist das Ergebnis seiner Diplomarbeit von, die er 2001 zu schreiben begann. Seit 2002 ist das Programm als Open Source auf der Homepage <http://www.geogebra.org> erhältlich. Nach Abschluss des Studiums und der Fertigstellung der Diplomarbeit wurde GeoGebra von Markus Hohenwarter weiterentwickelt. Von 2004 bis 2006 verfasste er seine Dissertation mit dem Titel: „GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht“. In diesem Zeitraum wurde das Programm von Übersetzern in viele Sprachen übersetzt und ist nun in 24 Sprachen<sup>43</sup> erhältlich. Unterstützung bei der Entwicklung erhielt Markus Hohenwarter durch Yves Kreis im Jahr 2005, 2006 erweiterte sich das



Abb. 22: Markus Hohenwarter

<sup>42</sup> Vergleiche <http://www.geogebra.org> und die persönliche Homepage von Markus Hohenwarter <http://www.math.fau.edu/~mhohen/>

<sup>43</sup> Alle Sprachen sind im Programm enthalten und jeder Benutzer kann jederzeit die Sprache des Programms ändern. Bis dato ist GeoGebra in folgenden Sprachen erhältlich: Baskisch, Bosnisch, Katalanisch, Chinesisch, Kroatisch, Tschechisch, Dänisch, Holländisch, Englisch, Französisch, Galizisch, Griechisch, Ungarisch, Italienisch, Norwegisch, Occitanisch, Portugiesisch, Serbisch, Slowakisch, Slowenisch, Spanisch, Deutsch und Österreichisch. Besonders zu Beachten ist, dass es zwei verschiedene Deutsche Versionen gibt, da die Schulnotation berücksichtigt werden muss. Zwischen Österreichischen und Deutschen Mathematikunterricht gibt es einige Unterschiede.

Team durch Loic Le Coq. Markus Hohenwarter ist seit August 2006 als Gastprofessor an der Florida Atlantic University tätig.

Bei der Entwicklung der Software GeoGebra war es Markus Hohenwarter wichtig, dynamische Geometrie Software (DGS)<sup>44</sup> und Computeralgebra Systeme (CAS)<sup>45</sup> in einer Software zu vereinen. Dynamische Geometrie Systeme sowie Computeralgebra Systeme sind aus dem modernen Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken. Ihre Verwendung wurde auch im Lehrplan der AHS-Oberstufe [BGBl. II Nr. 277/2004] verankert:

Mathematische Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar.

Mit GeoGebra werden „Geometrie und Algebra als gleichwertige Partner“ [Hohenwarter, 2004, PM] gesehen und behandelt. Die Software GeoGebra basiert dabei auf den Ideen von Computeralgebra-System und dynamischer Geometrie Software. Um dies zu verdeutlichen, zieht man Vergleiche zwischen dynamischer Geometrie und Computeralgebra-Systemen. Für DGS und CAS können jeweils zwei grundlegende Eigenschaften hervorgehoben werden:

Dynamische Geometrie Software:

- Zugmodus
- Konzentration auf geometrische/grafische Repräsentation mathematischer Objekte

Computeralgebra Systeme:

- symbolisches Rechnen
- Konzentration auf algebraische und numerische Repräsentation mathematischer Objekte<sup>46</sup>

Beide Systeme können geometrische Figuren visualisieren, wobei die Sichtweise von DGS und CAS auf die mathematischen Objekte verschieden sind. Im Falle der DGS wird von einem geometrischen

---

<sup>44</sup> Prominente Vertreter von DGS sind Cabri, Cinderella, Geometer's Sketchpad und Euklid Dynageo.

<sup>45</sup> Für den Schulgebrauch sind hier CAS wie Derive, Mathematica, Maple und MuPad zu nennen.

<sup>46</sup> Vergleiche Hohenwarter, M. 2004. GeoGebra: dynamische Geometrie, Algebra und Analysis für die Schule.

Repräsentanten ausgegangen, während sich CAS auf algebraische Repräsentanten stützt. Ein weiterer Unterschied ist die Möglichkeit der dynamischen Veränderung. CAS bietet nur in Ausnahmefällen<sup>47</sup> eine dynamische Veränderung an. Zwar können mathematische Objekte grafisch dargestellt werden, jedoch nicht verändert werden. Umgekehrt verhält es sich bei DGS. Eine dynamische Veränderung ist möglich, eine direkte mathematische Eingabe aber nicht.

Eine reine Verbindung von DGS und CAS ist nicht wirklich machbar und auch nicht notwendig, denn diese Verbindung wäre nur technischer Natur durch das Programmieren. Es geht viel mehr darum, eine bidirektionale Verbindung zwischen DGS und CAS herzustellen. Markus Hohenwarter [2004, CA-R] gibt hierzu ein konkretes Beispiel:

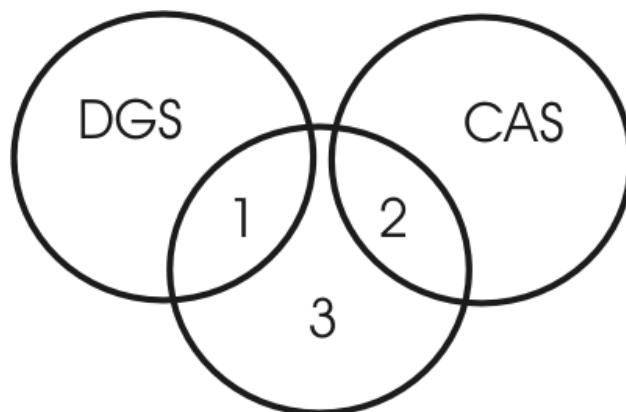


Abb. 23: Bidirektionale Verbindung

- Bereich 1: Ein Kreis kann in einem DGS dynamisch konstruiert und seine Gleichung angezeigt werden.
- Bereich 2: Ein Kreis kann in einem CAS mit Hilfe seiner Gleichung eingegeben und als statisches Bild dargestellt werden.
- Bereich 3: Ein Kreis kann mit Hilfe seiner Gleichung eingegeben und dynamisch mit der Maus verschoben werden.

Ein System, das alle drei Bereiche abdeckt, erlaubt damit einen bidirektionalen Wechsel zwischen Kreisbild und Kreisgleichung.

<sup>47</sup> Bei LiveMath werden Parameter und grafische Darstellungen dynamisch gekoppelt.

In diesem Fall werden dazu im Bereich 3 die Möglichkeiten des CAS und die Dynamik des Zugmodus erweitert.

GeoGebra stellt den Bereich 3 dar. Die Realisierung der bidirektionalen Verbindung zweier Systeme ist durch die dynamische Geometrie und den Algebraanteil in GeoGebra gegeben. Synthetische und analytische Geometrie lassen sich durch GeoGebra dynamisch verbinden. Die zwei Repräsentanten von DGS und CAS spiegeln sich im Programm durch zwei Fenster wieder: Algebrafenster und Geometriefenster.

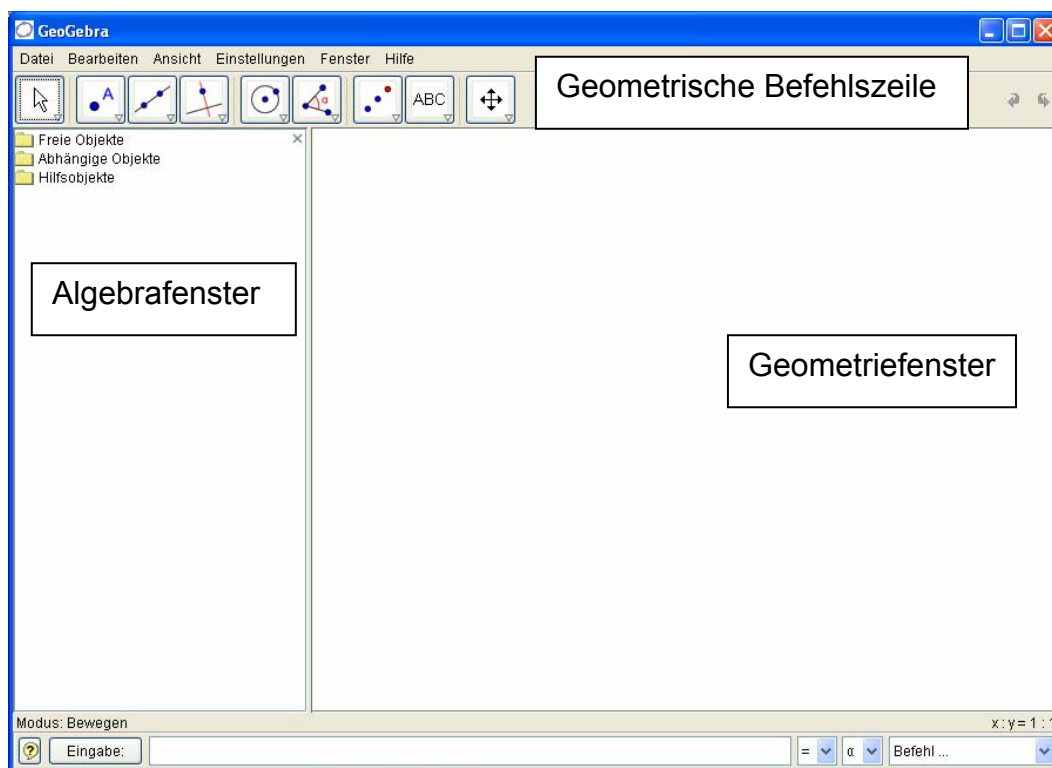


Abb. 24: Screenshot GeoGebra

GeoGebra wurde in der plattformunabhängigen Programmiersprache Java geschrieben und kann somit in Windows, Linux, MacOS X und Unix verwendet werden. Durch die Tatsache, dass GeoGebra [noch]<sup>48</sup> eine Open Source ist, besteht nicht nur die Möglichkeit, das Programm im

<sup>48</sup> Markus Hohenwarter gibt keine Angaben ob oder wie lange GeoGebra als Open Source zur Verfügung steht.

Unterricht zu nützen, sondern jeder einzelne Schüler kann zu GeoGebra zu Hause verwenden.

Durch die geometrische Befehlszeile (vgl. Abb. 24) und die gut strukturierte Hilfsdatei besitzt GeoGebra eine hohe Benutzerfreundlichkeit. Entdeckendes Lernen wird dadurch stark gefördert. Ein weiterer Vorteil von GeoGebra ist seine grafische Stärke. Innerhalb kurzer Zeit können exakte Konstruktionen dargestellt werden, deren manuelle Konstruktionsvorgang gestaltet sich mühsam und ergibt oft nur unleserliche Skizzen.

Nicht nur für entdeckendes Lernen kann GeoGebra im Mathematikunterricht verwendet werden, sondern auch zu Demonstrationszwecken. Lehrstoffe, in denen Schülerinnen und Schüler visuelle Vorstellungen von mathematischen Objekten benötigen, können durch GeoGebra unterstützt werden. Im Speziellen handelt es sich bei diesen Lehrstoffen um Themengebiete wie Kegelschnittsgeometrie, Vektorrechnung, Funktionen und Gleichungslehre.

[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) bietet noch mehr als nur den Download der Software, auch Erklärungen zu Handhabung und Verwendung, sowie Beispiele werden angeboten. Zusätzlich existiert GeoGebraWiki<sup>49</sup>, ein freier Pool von Unterrichtsmaterialien zu GeoGebra, wo eigene Materialien eingetragen werden können und dann anderen zur freien Verfügung stehen.

Hoch honoriert wurden die Vorteile von GeoGebra auch auf internationaler Ebene, so gewann GeoGebra mittlerweile viele renommierte Preise<sup>50</sup>, beispielsweise den European Academic Software Award 2002.

---

<sup>49</sup> Besonders Erwähnenswert sind hier die dynamischen Arbeitsblätter die für den Unterricht erstellt werden können. Die Möglichkeit fertige Arbeitsblätter zu verwenden, erleichtert den Einstieg für Neulinge bei Geogebra.

<sup>50</sup> Für eine Auflistung aller Preise und weitere Informationen zu den einzelnen Preisen vergleiche <http://www.geogebra.org>

## 4.2.2. GeoGebra – einige Anwendungen<sup>51</sup>

Anstelle einer Erklärung des Programms an Hand der Befehle werden nun drei Aufgaben konkret durchgeführt und Anleitungen dazu bereitgestellt.

### Aufgabe 1: Umkreis eines Dreiecks

Zeichnen Sie mit GeoGebra ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und konstruieren Sie dessen Umkreis.

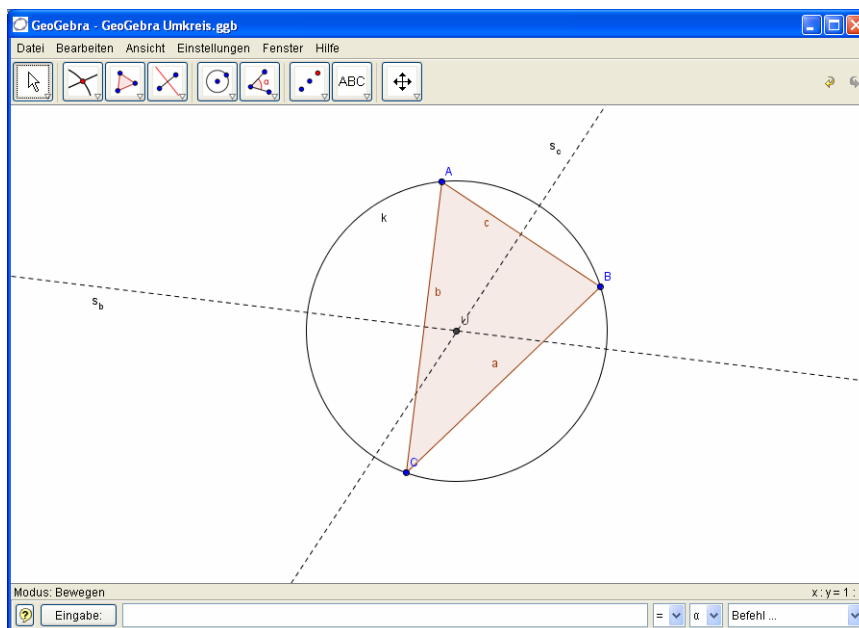


Abb. 25: Aufgabe 1 geometrisch

Die Aufgabenstellung kann auf zwei Arten gelöst werden; entweder wird die Konstruktion dynamisch mittels Maus erstellt, oder sie wird mit Hilfe der Eingabezeile durchgeführt. Bei der Konstruktion mit der Maus werden folgende Schritte zurückgelegt. Man wählt zuerst den Modus „Vieleck“ in der Geometrischen Befehlszeile. Dann wird ein beliebiges Dreieck erstellt. Der Befehl „Streckensymmetrale“ wird als nächstes gewählt. Der Schnittpunkt dieser beiden Streckensymmetralen ist der

<sup>51</sup> Markus Hohenwarter bietet als Quickstart für GeoGebra drei Beispiele an, die selbständig ausprobiert werden sollen. Hier werden genau diese drei Beispiele verwendet.

Umkreismittelpunkt. Abschließend muss noch „Kreis mit Mittelpunkt durch Punkt“ eingegeben werden. Die Benennung der einzelnen Objekte kann durch einen Mausklick auf das Objekt geändert werden.

Bei der Konstruktion mit Hilfe der Eingabezeile müssen folgende Schritte durchgeführt werden, wobei nach jeder Zeile dabei die Eingabetaste gedrückt werden muss:

```
A=(2,1)
B=(12,5)
C=(8,11)
Vieleck[A,B,C]
s_b=Streckensymmetrale[b]
s_c=Streckensymmetrale[c]
U=Schneide[s_b,s_c]
k=Kreis[U,A]
```

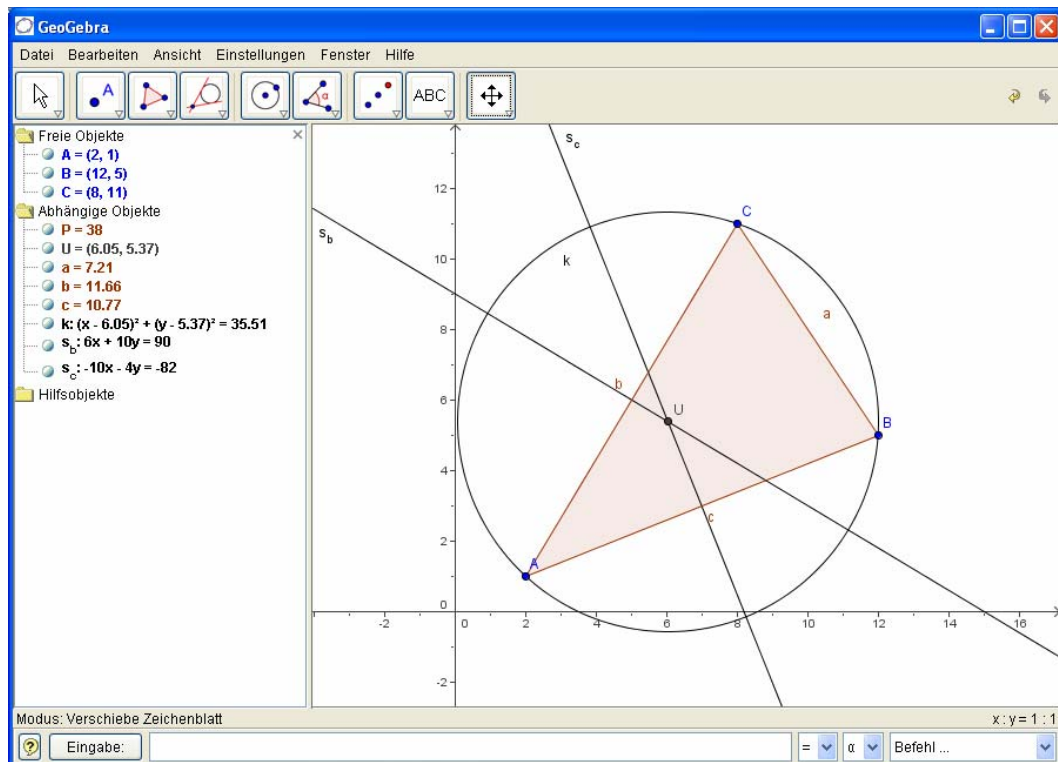


Abb. 26: Aufgabe 1 algebraisch

## Aufgabe 2: Tangenten an einen Kreis

Konstruieren sie mit GeoGebra den Kreis  $k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$  und seine Tangenten durch den Punkt  $A = (11,4)$ .

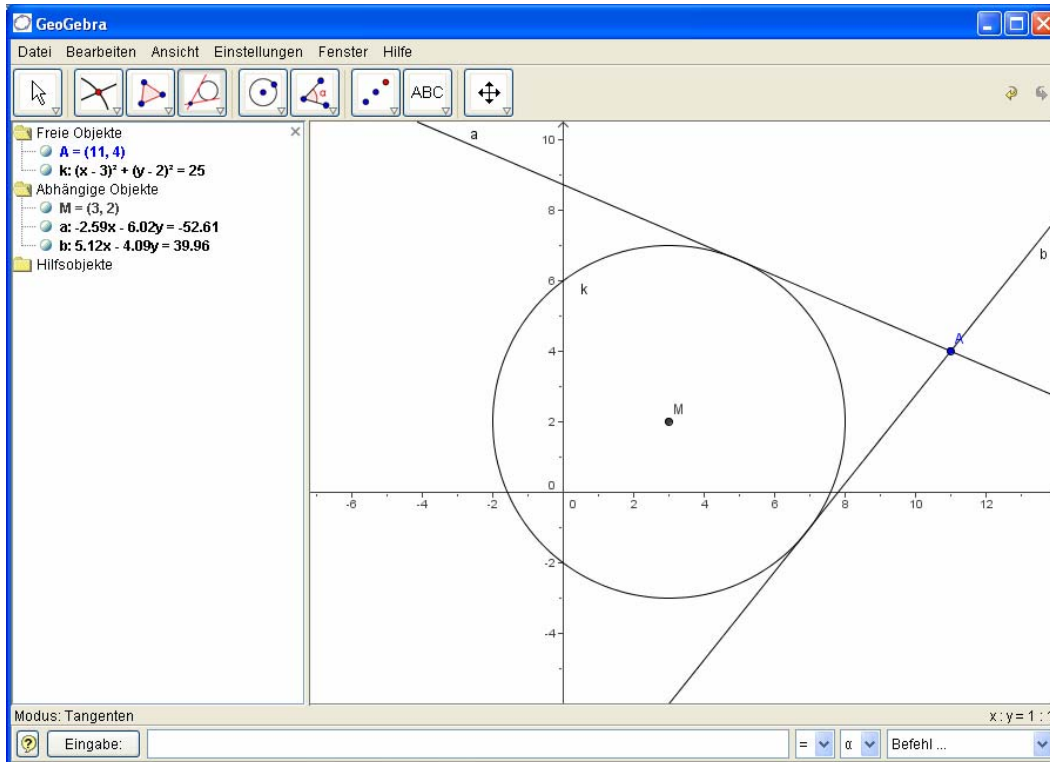


Abb. 27: Aufgabe 2

Bei diesem Beispiel können die Konstruktion mit der Maus und die Konstruktion mit Hilfe der Eingabezeile verbunden werden. Anfangs wird mit der Eingabezeile gearbeitet:

$$k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$M = \text{Mittelpunkt}[k]$$

$$A = (11,4)$$

Anschließend wird der Modus „Tangenten“ gewählt und die Aufgabe ist gelöst.

## Aufgabe 3: Ableitung und Tangente einer Funktion

Zeichnen Sie mit GeoGebra die Funktion  $f(x) = \sin(x)$ , ihre Ableitung sowie die Tangente samt Steigungsdreieck in einem Punkt auf  $f$ .

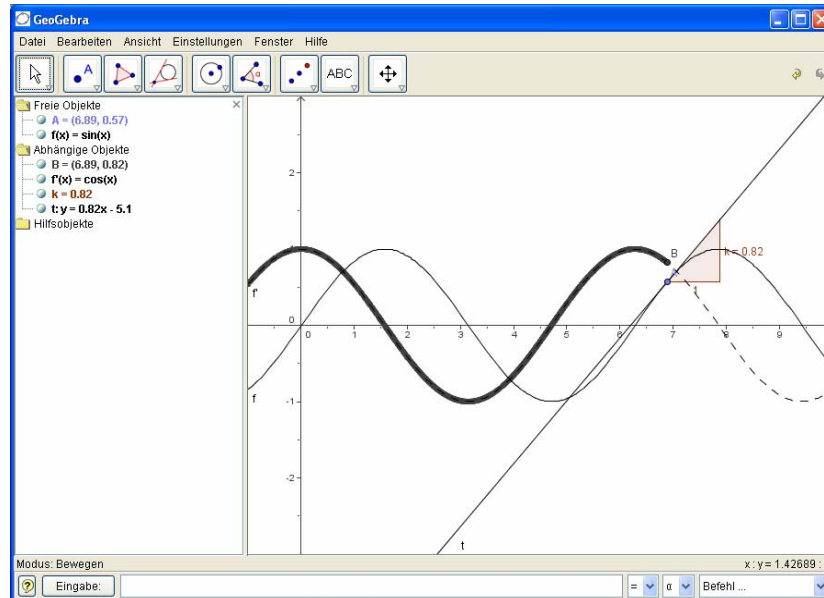


Abb. 28: Aufgabe 3

Auch bei diesem Beispiel können Mauskonstruktion und Eingabezeilenkonstruktion verbunden werden.

Eingabezeile:  $f(x) = \sin(x)$

Mit der Maus wird „Neuer Punkt“ gewählt und die Funktion  $f$  angeklickt.

Der nächste Schritt ist die Erstellung der Tangente auch durch den Modus „Tangenten“. Das Steigungsdreieck erhält man durch die Eingabezeile:

$k = \text{Steigung}[t]$ ; ebenso  $\text{Ableitung}[f]$ .

Zuvor kann man noch einen weiteren Punkt  $B = (x(A), k)$  angeben. Wählt man bei diesem Objekt „Spur an“ und bewegt nun Punkt  $A$  kann man die Spur direkt verfolgen und erkennen, dass es die Ableitung ist.

Die Verwendung von Geogebra im Mathematikunterricht macht die Auseinandersetzung mit als kompliziert und aufwendig geltende Themen auch für weniger talentierte Schülerinnen und Schüler interessant.

## 5. Beispiele und Arbeitsaufträge zu Kegelschnitten

Ich höre und ich vergesse;  
 Ich sehe und ich erinnere mich;  
 Ich tue und ich verstehe.  
 Unbekannt<sup>52</sup>

### 5.1. Schulbuchbeispiele

Zehn ausgewählte Beispiele, die zum Thema Kegelschnitte in Schulbüchern auftreten werden nun behandelt. Dabei werden zwei Lösungswege beschrrieben. Zuerst wird jedes Beispiel auf klassischem Wege berechnet. Eine Handskizze wird dabei zur Hilfe genommen.<sup>53</sup> Anschließend wird das Beispiel unter Anwendung von GeoGebra gelöst.

#### 5.1.1. Beispiel 1

Eine Ellipse und eine Hyperbel haben dieselben Brennpunkte  $F_1 (-3/0)$  und  $F_2 (3/0)$  und gehen durch den Punkt  $S (4/-1)$ . Ermittle (1) die Gleichungen der beiden Kegelschnitte und (2) den Schnittwinkel.

[Bernhard, S. 19]

Klassische Lösung:

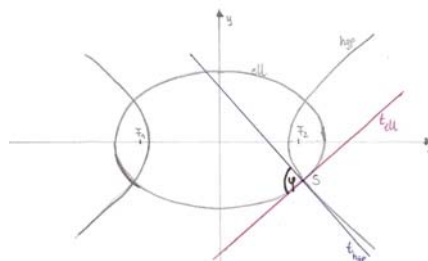


Abb. 29: Handskizze Bsp. 1

<sup>52</sup> <http://shop.bk-teachware.com>

<sup>53</sup> Für Schülerinnen und Schüler ergeben die Handskizzen oft die größten Probleme. Einerseits besteht die Schwierigkeit darin, eine Skizze anzufertigen, andererseits ist oft das ‚Abzeichnen‘ von der Tafel eine Herausforderung.

$$e^2 = 9$$

(1)

$$\text{ell} : 16b^2 + a^2 = a^2b^2 \quad e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 + b^2 = a^2$$

$$16b^2 + 9 + b^2 = 9b^2 + b^4 \Rightarrow b^4 - 8b^2 - 9 = 0 \Rightarrow b_{1,2}^2 = 4 \pm \sqrt{16+9}$$

$$\Rightarrow b_1^2 = 9 \text{ und } (b_2^2 = -10) \Rightarrow a^2 = 9 + 9 = 18$$

$$\text{ell} : 9x^2 + 18y^2 = 162 \quad (\text{oder } x^2 + 2y^2 = 18)$$

$$\text{hyp} : 16b^2 - a = a^2b^2 \quad e^2 = a^2 + b^2 = 9$$

$$16b^2 - 9 + b^2 = 9b^2 - b^4 \Rightarrow b^4 + 8b^2 - 9 = 0 \Rightarrow b_{1,2}^2 = -4 \pm \sqrt{16+9}$$

$$\Rightarrow b_1^2 = 1 \text{ und } (b_2^2 = -9) \Rightarrow a^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\text{hyp} : x^2 - 8y^2 = 8$$

(2)

$$t_{\text{ell}} : 4x - 2y = 18 \Rightarrow 2x - y = 9 \Rightarrow n_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_{\text{hyp}} : 4x + 8y = 8 \Rightarrow x + 2y = 2 \Rightarrow n_{\text{hyp}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{|n_{\text{ell}} \cdot n_{\text{hyp}}|}{|n_{\text{ell}}| \cdot |n_{\text{hyp}}|} = \frac{2-2}{5} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 90^\circ}}$$

Computerunterstützte Lösung:

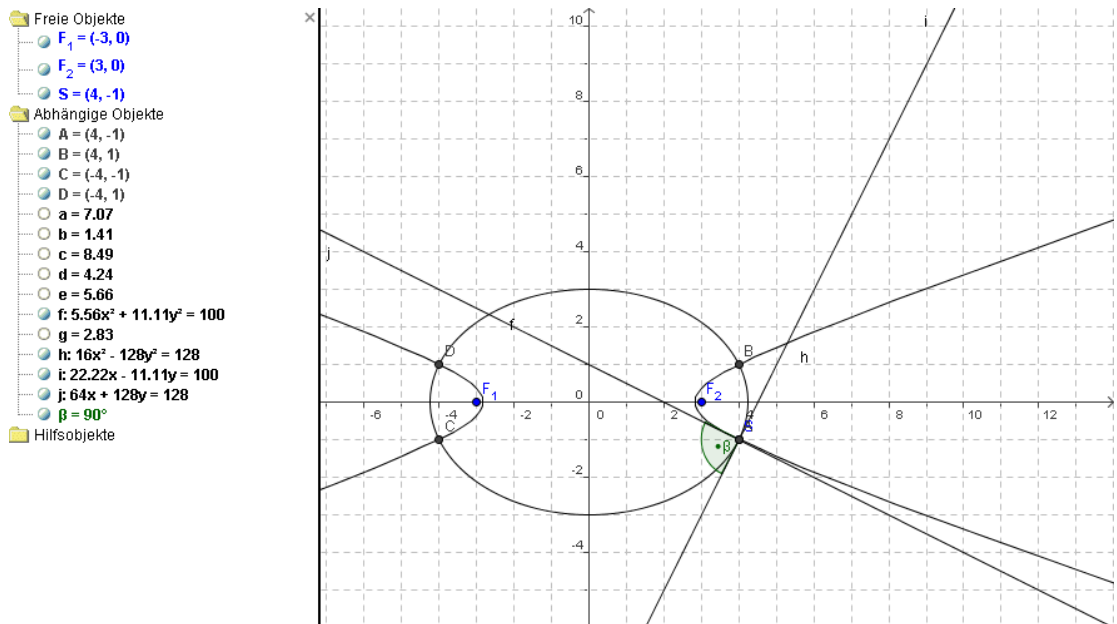


Abb. 30: Computergraphik Bsp. 1

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Punkt $F_1$			$F_1 = (-3, 0)$
2	Punkt $F_2$			$F_2 = (3, 0)$
3	Punkt S			$S = (4, -1)$
4	Zahl a	Abstand zwischen $F_1$ und S	Abstand[ $F_1$ , S]	$a = 7.07$
5	Zahl b	Abstand zwischen $F_2$ und S	Abstand[ $F_2$ , S]	$b = 1.41$
6	Zahl c	$a + b$	$a + b$	$c = 8.49$
7	Zahl e	$a - b$	$a - b$	$e = 5.66$
8	Zahl d	$c / 2$	$c / 2$	$d = 4.24$
9	Ellipse f	Ellipse mit Brennpunkten $F_1, F_2$ und Hauptachsenlänge d	Ellipse[ $F_1, F_2, d$ ]	$f: 5.56x^2 + 11.11y^2 = 100$
10	Zahl g	$e / 2$	$e / 2$	$g = 2.83$
11	Hyperbel h	Hyperbel mit Brennpunkten $F_1, F_2$ und Hauptachsenlänge g	Hyperbel[ $F_1, F_2, g$ ]	$h: 16x^2 - 128y^2 = 128$
12	Punkt A	Schnittpunkt von f, h	Schneide[f, h]	$A = (4, -1)$
12	Punkt B	Schnittpunkt von f, h	Schneide[f, h]	$B = (4, 1)$
12	Punkt C	Schnittpunkt von f, h	Schneide[f, h]	$C = (-4, -1)$
12	Punkt D	Schnittpunkt von f, h	Schneide[f, h]	$D = (-4, 1)$
13	Gerade i	Tangente durch A an f	Tangente[A, f]	$i: 22.22x - 11.11y = 100$
14	Gerade j	Tangente durch A an h	Tangente[A, h]	$j: 64x + 128y = 128$
15	Winkel $\beta$	Winkel zwischen j, i	Winkel[j, i]	$\beta = 90^\circ$

Abb. 31: Konstruktionsprotokoll Bsp. 1

### 5.1.2. Beispiel 2

Die Hyperbel  $hyp: x^2 - 25y^2 = 64$  wird von der Geraden  $g: 3x + 5y + 36 = 0$  geschnitten. Man berechne a) die Menge S der Schnittpunkte b) die Sehnenlänge s c) die Tangentengleichungen  $t_1, t_2$  in den Schnittpunkten und d) den Tangentenschnittpunkt P!

[Novak, S. 14]

Klassische Lösung:

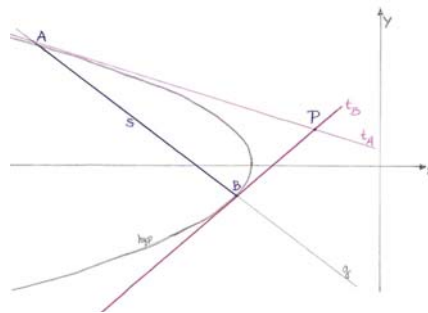


Abb. 32: Handskizze Bsp. 2

a)

$$hyp: x^2 - 25y^2 = 64$$

$$g: 3x + 5y + 36 = 0$$

$$hyp \cap g: 25y^2 + 360y + 1296 = 576 + 225y^2 \Rightarrow 5y^2 - 9y - 18 = 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 360}}{10} \Rightarrow y_1 = 3; \quad x_1 = -17 \Rightarrow \underline{\underline{S_1(-17|3)}}$$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{6}{5}; \quad x_2 = -10 \Rightarrow \underline{\underline{S_2(-10|-\frac{6}{5})}}$$

b)

$$s = |\overrightarrow{S_1 S_2}| = \left| \begin{pmatrix} -10 + 17 \\ -\frac{6}{5} - 3 \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{8,163 = s}}$$

c)

$$-17x - 25 \cdot 3y = 64 \Rightarrow \underline{\underline{t_1: 17x + 75y = -64}}$$

$$-10x - 25 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)y = 64 \Rightarrow \underline{\underline{t_2: 10x - 30y = -64}}$$

d)

$$t_1 \cap t_2 : 17\left(3y - \frac{64}{10}\right) + 75y = -64 \Rightarrow 1260y = 448$$

$$\Rightarrow y = 0,356 \quad x = -5,333$$

$$P(-5,333; 0,356)$$

Computerunterstützte Lösung:

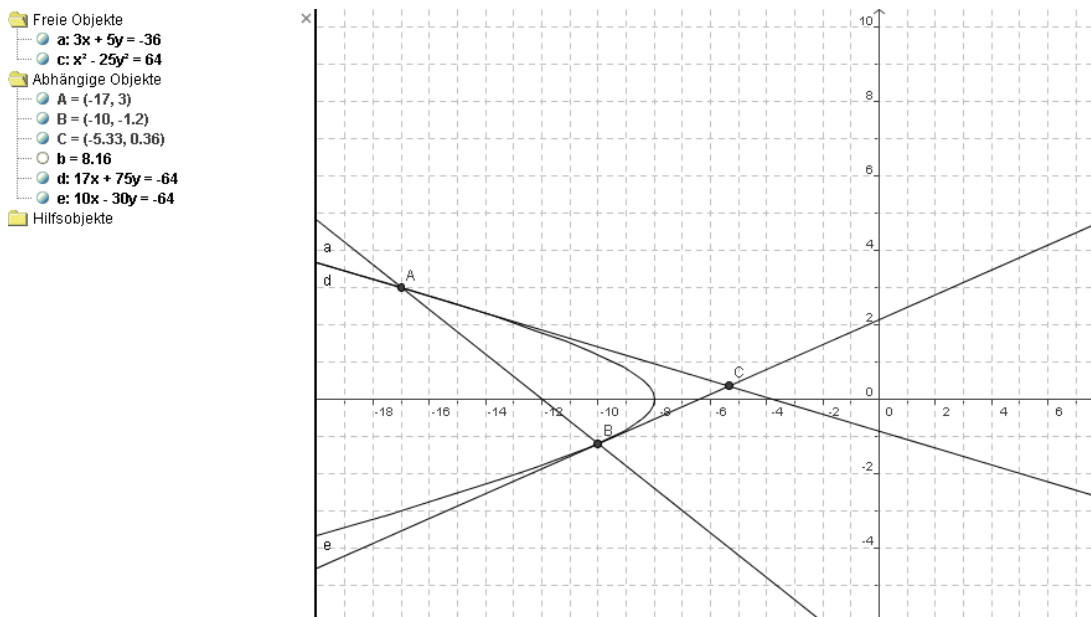


Abb. 33: Computergraphik Bsp. 2

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Hyperbel c			c: $x^2 - 25y^2 = 64$
2	Gerade a			a: $3x + 5y = -36$
3	Punkt A	Schnittpunkt von c, a	Schneide[c, a]	A = (-17, 3)
3	Punkt B	Schnittpunkt von c, a	Schneide[c, a]	B = (-10, -1.2)
4	Zahl b	Abstand zwischen A und B	Abstand[A, B]	b = 8.16
5	Gerade d	Tangente durch A an c	Tangente[A, c]	d: $17x + 75y = -64$
6	Gerade e	Tangente durch B an c	Tangente[B, c]	e: $10x - 30y = -64$
7	Punkt C	Schnittpunkt von d, e	Schneide[d, e]	C = (-5.33, 0.36)

Abb. 34: Konstruktionsprotokoll Bsp. 2

### 5.1.3. Beispiel 3<sup>54</sup>

In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt eines parabolischen Scheinwerferhohlspiegels mit dem Durchmesser  $d=47,2$  cm und der Tiefe  $t=34,81$  cm ist eine als punktförmig anzunehmende Lichtquelle zu befestigen, damit die Lichtstrahlen parallel zur Spiegelachse reflektiert werden?

[Novak, S. 17]

Klassische Lösung:

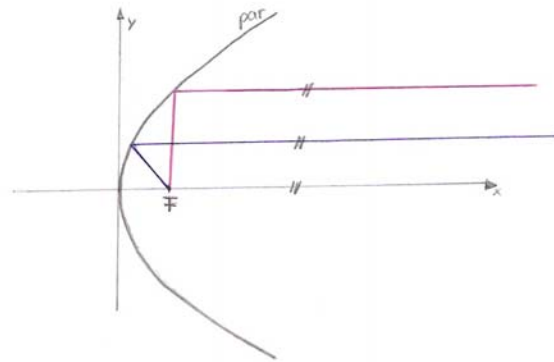


Abb. 35: Handskizze Bsp. 3

$$P(34,81; 23,6) \quad y^2 = 2px \Rightarrow 556,95 = 2 \cdot p \cdot 34,81 \Rightarrow p = 8$$

Die Platzierung erfolgt im Brennpunkt!

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow F(4; 0) \Rightarrow \underline{\underline{d = 4cm}}$$

<sup>54</sup> Bei diesem Beispiel wird ein physikalisches Wissen vorausgesetzt, der Strahlengang in Linsen.

## Computerunterstützte Lösung:

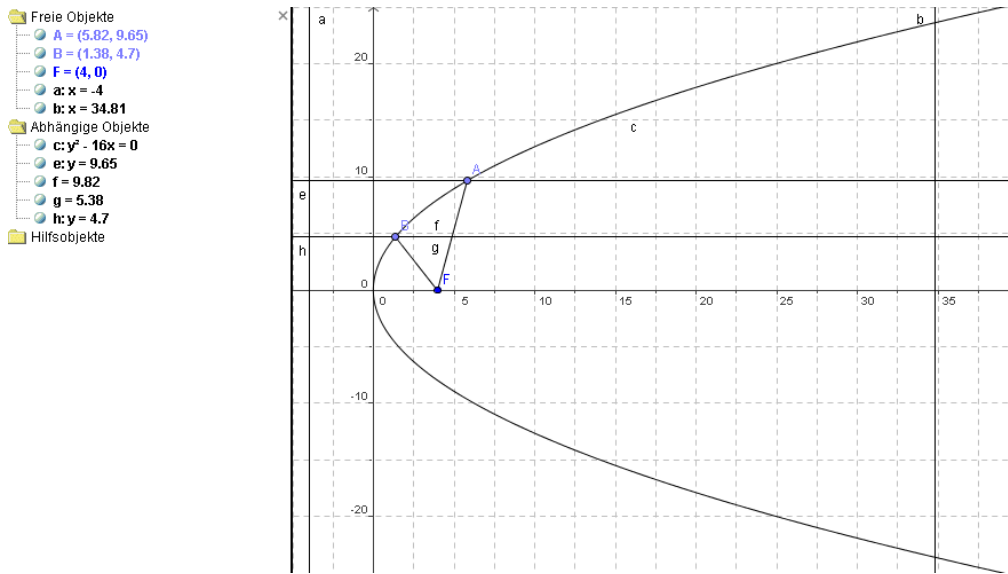


Abb. 36: Computergraphik Bsp. 3

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Punkt F			$F = (4, 0)$
2	Gerade a			$a: x = -4$
3	Parabel c	Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie a	Parabel[F, a]	$c: y^2 - 16x = 0$
4	Gerade b			$b: x = 34.81$
5	Punkt A	Punkt auf c	Punkt[c]	$A = (5.82, 9.65)$
6	Gerade e	Gerade durch A parallel zu xAchse	Gerade[A, xAchse]	$e: y = 9.65$
7	Strecke f	Strecke[A, F]	Strecke[A, F]	$f = 9.82$
8	Punkt B	Punkt auf c	Punkt[c]	$B = (1.38, 4.7)$
9	Strecke g	Strecke[F, B]	Strecke[F, B]	$g = 5.38$
10	Gerade h	Gerade durch B parallel zu xAchse	Gerade[B, xAchse]	$h: y = 4.7$

Abb. 37: Konstruktionsprotokoll Bsp. 3

#### 5.1.4. Beispiel 4

Der Ellipse  $ell : 3x^2 + 4y^2 = 12$  ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt  $A=4,5$  so einzuschreiben, dass die Höhe mit der großen Achse eine gemeinsame Trägergerade hat (vgl. nebenstehende Figur). Wie groß ist der Umfang  $u$  des Dreiecks? [...]

[Novak, S. 17]

Klassische Lösung:

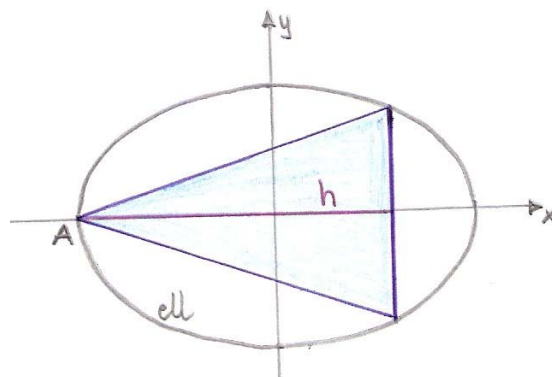


Abb. 38: Handskizze Bsp. 4

$$A = 4,5 = \frac{c \cdot h}{2}; \quad c = 2y; \quad h = a + x$$

$$\text{aus } ell : 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4;$$

$$4,5 = \frac{2y \cdot (x+2)}{2} \Rightarrow 2y(x+2) = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{2x+4} \Rightarrow y^2 = \frac{81}{4x^2+16x+16}$$

$$\text{einsetzen in } ell : 3x^2 + 4 \cdot \frac{81}{4x^2+16x+16} = 12 \Rightarrow 12x^4 + 48x^3 - 192x + 132 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 - 16x + 11 = 0$$

$$(x^4 + 4x^3 - 16x + 11) : (x - 1) = x^3 + 5x^2 + 5x - 11$$

$$\begin{array}{r} -(x^4 - x^3) \\ \hline 5x^3 \\ -(5x^3 - 5x^2) \\ \hline 5x^2 - 16x \\ -(5x^2 - 5x) \\ \hline -11x + 11 \\ -(-11x + 11) \\ \hline 0R \end{array}$$

$$(x^3 + 5x^2 + 5x - 11) : (x - 1) = x^2 + 6x + 11$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - x^2) \\ \hline 6x^2 + 5x \\ -(6x^2 - 6x) \\ \hline 11x - 11 \\ -(11x - 11) \\ \hline 0R \end{array}$$

$$x^2 + 6x + 11 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{-2} \Rightarrow \text{keine reelle Lösung}$$

$$\Rightarrow \text{einzig mögliche Lösung } x = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{2x+4} = \frac{3}{2}; \quad c = 3; \quad h = 3$$

$$s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{5}}}$$

$$U = 2s + c = \underline{\underline{3(\sqrt{5} + 1)}}$$

## Computerunterstützte Lösung:

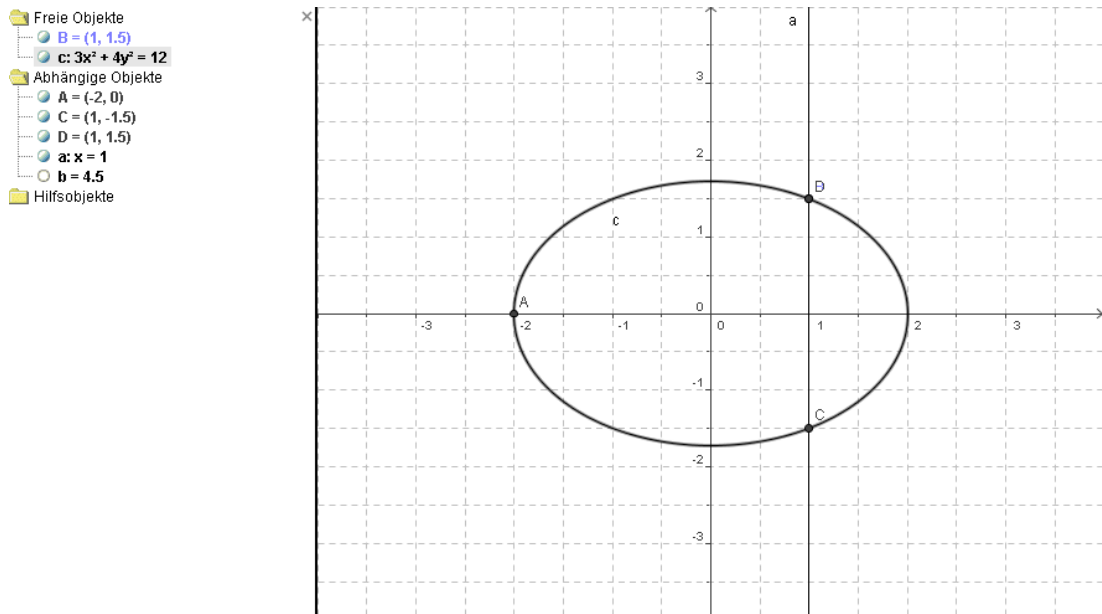


Abb. 39: Computergraphik 1 Bsp. 4

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Ellipse c			$c: 3x^2 + 4y^2 = 12$
2	Punkt A	Schnittpunkt von c, xAchse	Schneide[c, xAchse, 1]	$A = (-2, 0)$
3	Punkt B	Punkt auf c	Punkt[c]	$B = (1, 1.5)$
4	Gerade a	Gerade durch B senkrecht zu xAchse	Senkrechte[B, xAchse]	$a: x = 1$
5	Punkt C	Schnittpunkt von c, a	Schneide[c, a]	$C = (1, -1.5)$
5	Punkt D	Schnittpunkt von c, a	Schneide[c, a]	$D = (1, 1.5)$
6	Zahl b	Fläche[A, C, B]	Fläche[A, C, B]	$b = 4.5$

Abb. 40: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 4

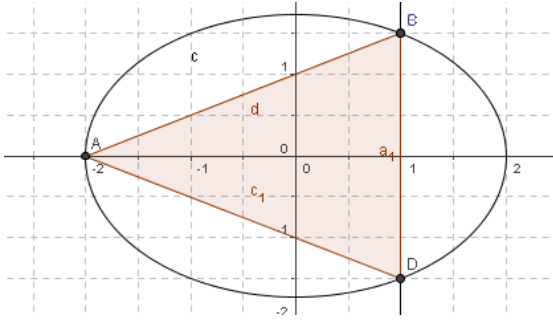


Abb. 41: Computergraphik 2 Bsp. 4

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
7	Strecke $a_1$	Strecke[C, D] von Vieleck P	Strecke[C, D]	$a_1 = 3$
7	Strecke $c_1$	Strecke[D, A] von Vieleck P	Strecke[D, A]	$c_1 = 3.35$
7	Strecke $d$	Strecke[A, C] von Vieleck P	Strecke[A, C]	$d = 3.35$
8	Zahl $u$	$a_1 + c_1 + d$	$a_1 + c_1 + d$	$u = 9.71$

Abb. 42: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 4

### 5.1.5. Beispiel 5

Die obere Hälfte der Parabel  $par: y^2 = 6x$ , die x-Achse und die Ordinate des Punktes Q (7,0) bilden ein Flächenstück.

Mit welchen Koordinaten ist ein Punkt S  $(x,y) \in par$  anzugeben, damit das aus der Parabelfläche herausgeschnittene Rechteck PQRS den

Flächeninhalt  $A = \frac{14\sqrt{14}}{3}$  annimmt?<sup>55</sup>

[Novak, S 18]

Klassische Lösung:

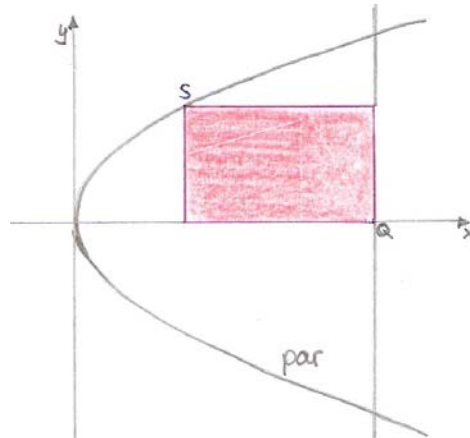


Abb. 43: Handskizze Bsp. 5

$$g = 7 - x; \quad h = y; \quad F = g \cdot h = (7 - x) \cdot y = \frac{14 \cdot \sqrt{14}}{3} \Rightarrow y = \frac{14 \cdot \sqrt{14}}{3} \cdot \frac{1}{(7 - x)};$$

$$y^2 = 6x = \frac{196 \cdot 14}{9} \cdot \frac{1}{49 - 14x + x^2} \Rightarrow x = \frac{1372}{27} \cdot \frac{1}{49 - 14x + x^2} \Rightarrow$$

$$1323x - 378x^2 + 27x^3 - 1372 = 0 \Rightarrow x^3 - 14x^2 + 49x - \frac{1372}{27} = 0$$

$$x^3 - 14x^2 + 49x - \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{28}{3} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{7}{3} \quad \text{und} \quad (x_3 = 4x_1 = \frac{28}{3})$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{6 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{14} \Rightarrow \underline{S\left(\frac{7}{3}; \sqrt{14}\right)}$$

<sup>55</sup> Anleitung: Der Punkt S liegt auf der Parabel, also müssen seine Koordinaten  $y^2=6x$  erfüllen, für die auf dieser Basis erhaltene Gleichung (y eliminieren!)

$x^3 - 14x^2 + 49x - \frac{1372}{27} = 0$  lässt sich zeigen, dass es für  $x_s$  nur eine Doppelwurzel und eine 4mal so große einfache Wurzel gibt.

## Computerunterstützte Lösung:

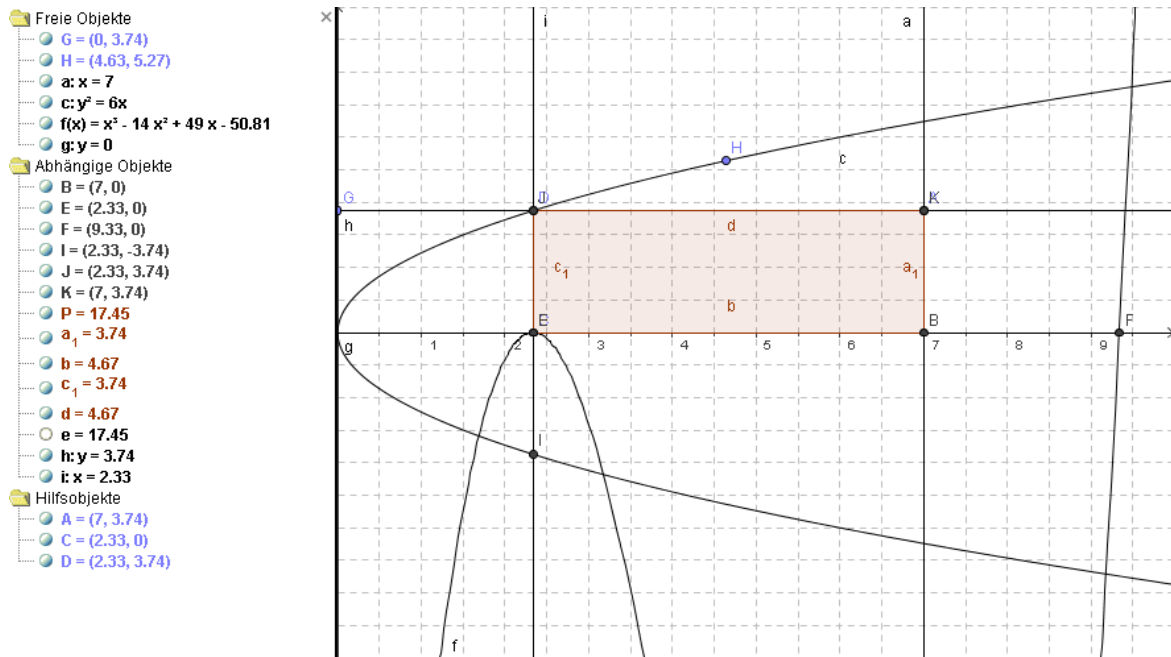


Abb. 44: Computergraphik Bsp. 5

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Parabel c			$c: y^2 = 6x$
2	Gerade a			$a: x = 7$
3	Punkt A	Punkt auf a	Punkt[a]	$A = (7, 3.74)$
4	Punkt B	Schnittpunkt von a, xAchse	Schneide[a, xAchse]	$B = (7, 0)$
5	Punkt C	Punkt auf xAchse	Punkt[xAchse]	$C = (2.33, 0)$
6	Punkt D	Punkt auf c	Punkt[c]	$D = (2.33, 3.74)$
7	Vieleck P	Vieleck D, A, B, C	Vieleck[D, A, B, C]	$P = 17.45$
7	Strecke d	Strecke[D, A] von Vieleck P	Strecke[D, A]	$d = 4.67$
7	Strecke $a_1$	Strecke[A, B] von Vieleck P	Strecke[A, B]	$a_1 = 3.74$
7	Strecke b	Strecke[B, C] von Vieleck P	Strecke[B, C]	$b = 4.67$
7	Strecke $c_1$	Strecke[C, D] von Vieleck P	Strecke[C, D]	$c_1 = 3.74$

8	Zahl e	Fläche[A, B, C, D]	Fläche[A, B, C, D]	$e = 17.45$
9	Funktion f			$f(x) = x^3 - 14x^2 + 49x - 50.81$
10	Punkt E	Nullstelle von f	Nullstelle[f]	$E = (2.33, 0)$
10	Punkt F	Nullstelle von f	Nullstelle[f]	$F = (9.33, 0)$
11	Gerade h	Gerade durch D senkrecht zu a	Senkrechte[D, a]	$h: y = 3.74$
12	Punkt G	Punkt auf h	Punkt[h]	$G = (0, 3.74)$
13	Punkt H	Punkt auf c	Punkt[c]	$H = (4.63, 5.27)$
14	Gerade g			$g: y = 0$
15	Gerade i	Gerade durch E senkrecht zu g	Senkrechte[E, g]	$i: x = 2.33$
16	Punkt I	Schnittpunkt von c, i	Schneide[c, i]	$I = (2.33, -3.74)$
16	Punkt J	Schnittpunkt von c, i	Schneide[c, i]	$J = (2.33, 3.74)$
17	Punkt K	Schnittpunkt von h, a	Schneide[h, a]	$K = (7, 3.74)$

Abb. 45: Konstruktionsprotokoll Bsp. 5

### 5.1.6. Beispiel 6

Gegeben ist die Hyperbel  $hyp : 4x^2 - y^2 = 20$ . Berechnen Sie

- die Koordinaten jenes Hyperbelpunktes  $P$ , für den gilt:  $F_1P \perp F_2P$  (4 Lösungen!),
- die Gleichungen der Tangenten in diesen vier Punkten,
- den Inhalt des so entstandenen Tangentenvierecks,
- die Gleichung jenes Kreises, der sich diesem Tangentenviereck einschreiben lässt.

[Fiala, Moser; S. 9]

Klassische Lösung:

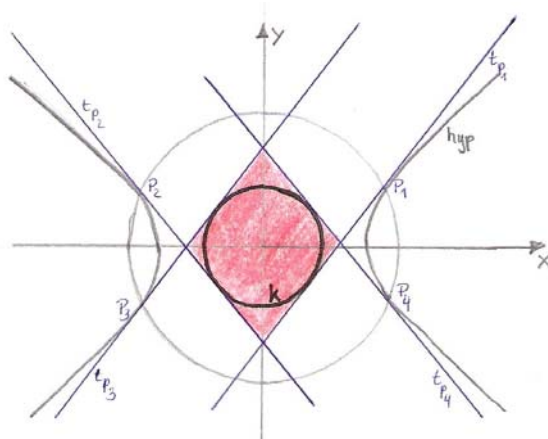


Abb. 46: Handskizze Bsp. 6

a)

*Hinweis: Thaleskreis*

$$r^2 = e^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow F_1(-5|0), F_2(5|0) \Rightarrow k : x^2 + y^2 = 25$$

$$hyp \cap k = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} : 4x^2 - y^2 = 20$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 25}$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 45 \Rightarrow (x = 3) \vee (x = -3)$$

$$\Rightarrow (y = \pm 4) \vee (y = \pm 4)$$

$$\underline{P_1(3|4); P_2(-3|4); P_3(-3|-4); P_4(3|-4)}$$

b)

$$t_1 \text{ in } P_1(3|4): \quad 4 \cdot 3x - 4y = 20 \quad \leftrightarrow \quad \underline{t_1 : 3x - y = 5}$$

$$t_2 \text{ in } P_2(-3|4): \quad 4 \cdot (-3)x - 4y = 20 \quad \leftrightarrow \quad \underline{t_2 : -3x - y = 5}$$

$$t_3 \text{ in } P_3(-3|-4): \quad 4 \cdot (-3)x - (-4)y = 20 \quad \leftrightarrow \quad \underline{t_3 : -3x + y = 5}$$

$$t_4 \text{ in } P_4(3|-4): \quad 4 \cdot 3x - (-4)y = 20 \quad \leftrightarrow \quad \underline{t_4 : 3x + y = 5}$$

c)

*Hinweis: Eckpunkte liegen auf Koordinatenachsen  $\leftrightarrow$  Symmetriegründe  $\rightarrow$  Rhombus*

$$t_1 \cap x\text{-Achse}: y = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad T_1\left(\frac{5}{3}|0\right); T_2\left(-\frac{5}{3}|0\right)$$

$$t_1 \cap y\text{-Achse}: x = 0 \Rightarrow y = -5 \quad T_3(0|5); T_4(0|-5)$$

$$A = \frac{1}{2} e \cdot f = \frac{1}{2} \overline{T_1 T_3} \cdot \overline{T_2 T_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 10 = \underline{\underline{\frac{50}{3}}}$$

d)

$$\text{Hessesche Normalform von } t_1: \frac{4x - y - 5}{\sqrt{10}} = 0$$

$$M(0,0) \text{ in HNF: } r = \left| -\frac{5}{\sqrt{10}} \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\underline{\underline{k_i: x^2 + y^2 = \frac{5}{2}}}$$

Computerunterstützte Lösung:

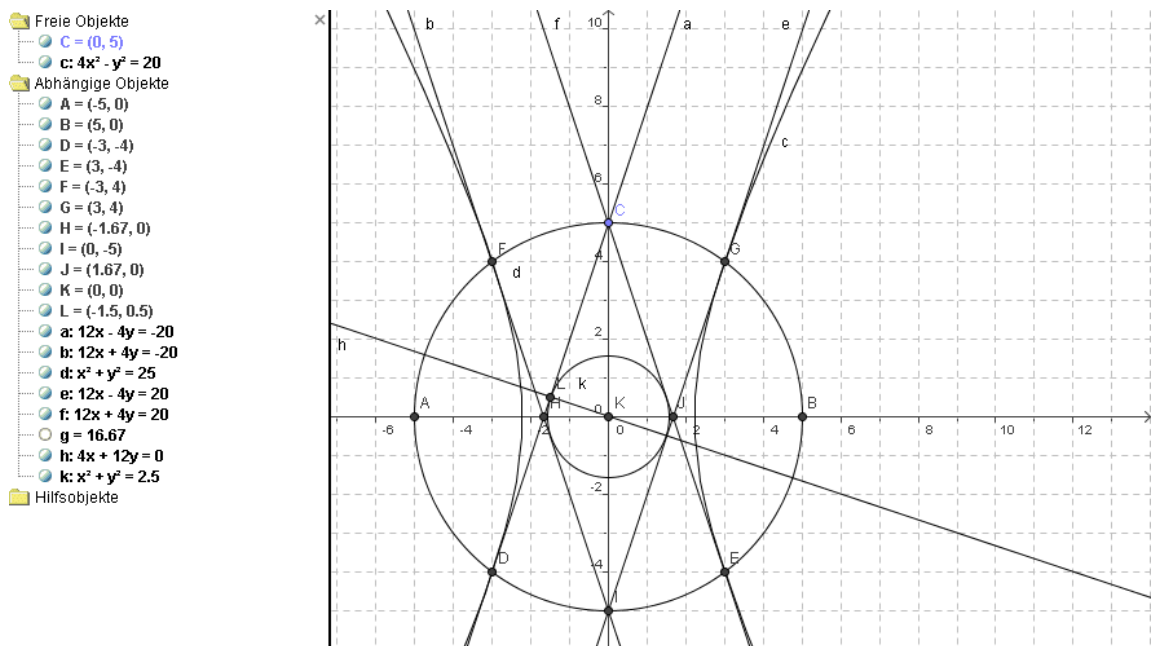


Abb. 47: Computergraphik Bsp. 6

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Hyperbel c			c: $4x^2 - y^2 = 20$
2	Punkt A	Brennpunkt von c	Brennpunkt[c]	A = (-5, 0)
2	Punkt B	Brennpunkt von c	Brennpunkt[c]	B = (5, 0)
3	Punkt C	Punkt auf yAchse	Punkt[yAchse]	C = (0, 5)
4	Kreis d	Kreis durch A, C, B	Kreis[A, C, B]	d: $x^2 + y^2 = 25$
5	Punkt D	Schnittpunkt von d, c	Schneide[d, c]	D = (-3, -4)
5	Punkt E	Schnittpunkt von d, c	Schneide[d, c]	E = (3, -4)
5	Punkt F	Schnittpunkt von d, c	Schneide[d, c]	F = (-3, 4)
5	Punkt G	Schnittpunkt von d, c	Schneide[d, c]	G = (3, 4)
6	Gerade a	Tangente durch D an c	Tangente[D, c]	a: $12x - 4y = -20$
7	Gerade b	Tangente durch F an c	Tangente[F, c]	b: $12x + 4y = -20$
8	Gerade e	Tangente durch G an c	Tangente[G, c]	e: $12x - 4y = 20$
9	Gerade f	Tangente durch E an c	Tangente[E, c]	f: $12x + 4y = 20$
10	Punkt H	Schnittpunkt von a, b	Schneide[a, b]	H = (-1.67, 0)
11	Punkt I	Schnittpunkt von b, e	Schneide[b, e]	I = (0, -5)
12	Punkt J	Schnittpunkt von e, f	Schneide[e, f]	J = (1.67, 0)
13	Zahl g	Fläche[H, I, J, C]	Fläche[H, I, J, C]	g = 16.67
14	Punkt K	Schnittpunkt von xAchse, yAchse	Schneide[xAchse, yAchse]	K = (0, 0)
15	Gerade h	Gerade durch K senkrecht zu a	Senkrechte[K, a]	h: $4x + 12y = 0$
16	Punkt L	Schnittpunkt von a, h	Schneide[a, h]	L = (-1.5, 0.5)
17	Kreis k	Kreis mit Mittelpunkt K durch L	Kreis[K, L]	k: $x^2 + y^2 = 2.5$

Abb. 48: Konstruktionsprotokoll Bsp. 6

### 5.1.7. Beispiel 7<sup>56</sup>

Berechnen Sie die Masse einer Konkav-konvex-Linse aus Flintglas ( $\rho=3750 \text{ kg/m}^3$ ) mit den Krümmungsradien  $r_1=4,3 \text{ cm}$ ;  $r_2=5,1 \text{ cm}$  und einer Linsendicke  $d=1 \text{ cm}$ .

[Fiala, Moser; S. 11]

Klassische Lösung:

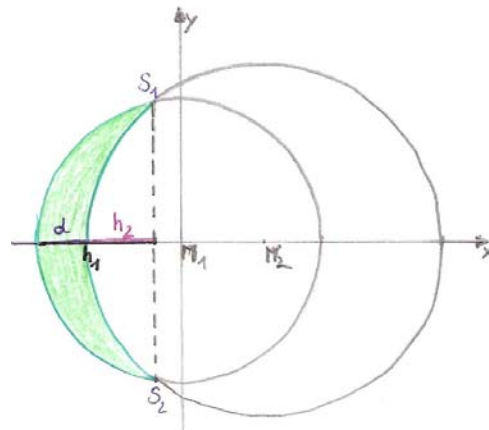


Abb. 49: Handskizze Bsp. 7

$$r_1 = 4,3 \text{ cm}; \quad M_1(0|0)$$

$$r_2 = 5,1 \text{ cm}; \quad d = 1 \text{ cm} \quad r_2 - r_1 = 0,8 \Rightarrow M_2(1,8|0)$$

$$k_1 : x^2 + y^2 = 4,3^2$$

$$k_2 : (x - 1,8)^2 + y^2 = 5,1^2$$

$$k_1 \cap k_2 : (x - 1,8)^2 + 4,3^2 - x^2 = 5,1^2 \Rightarrow -3,6x = 4,28 \Rightarrow x = -1,18 \Rightarrow y = \pm 4,132$$

$$S_{1,2}(-1,18|\pm 4,132)$$

Volumsberechnung :

$$h_1 = 4,3 - 1,18 = 3,11 \Rightarrow V_1 = \frac{h_1^2 \pi}{3} \cdot (3r_1 - h_1) = 31,58\pi$$

$$h_2 = h_1 - d = 2,11 \Rightarrow V_2 = \frac{h_2^2 \pi}{3} \cdot (3r_2 - h_2) = 19,59\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 37,66 \text{ cm}^3$$

Masse :

$$\rho = 3750 \text{ kg/m}^3 = 3,75 \text{ g/cm}^3$$

$$m = V \cdot \rho = \underline{141,2 \text{ g}}$$

<sup>56</sup> Bei diesem Beispiel habe ich nur Teil a) bearbeitet.

## Computerunterstützte Lösung:

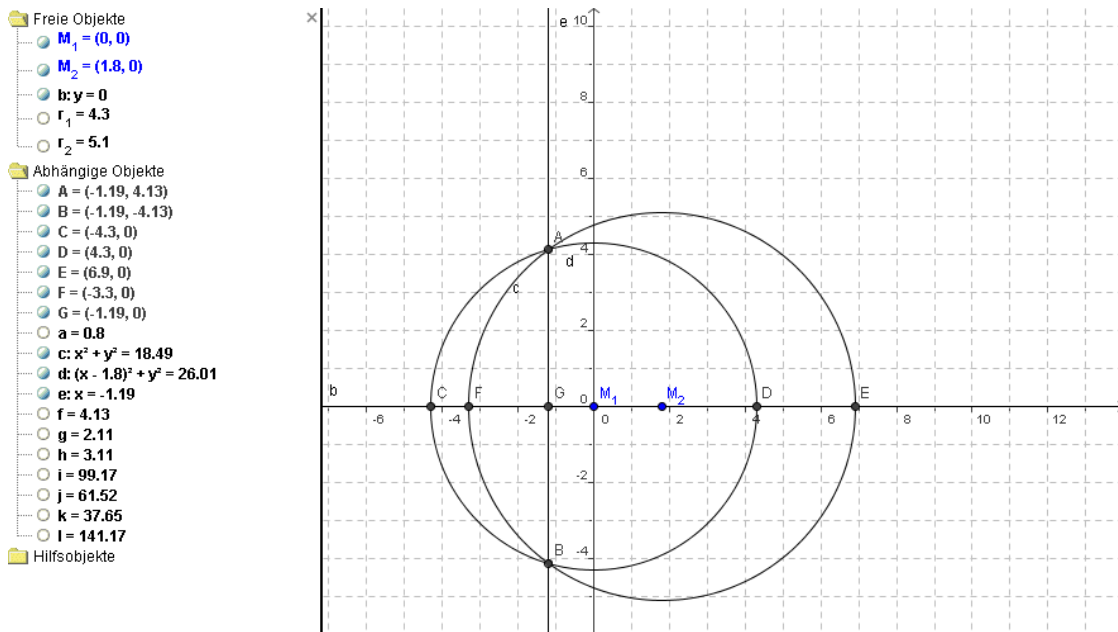


Abb. 50: Computergraphik Bsp. 7

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Punkt $M_1$			$M_1 = (0, 0)$
2	Zahl $r_1$			$r_1 = 4.3$
3	Zahl $r_2$			$r_2 = 5.1$
4	Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt $M_1$ und Radius $r_1$	Kreis[ $M_1, r_1$ ]	$c: x^2 + y^2 = 18.49$
5	Zahl a	$r_2 - r_1$	$r_2 - r_1$	$a = 0.8$
6	Punkt $M_2$			$M_2 = (1.8, 0)$
7	Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt $M_2$ und Radius $r_2$	Kreis[ $M_2, r_2$ ]	$d: (x - 1.8)^2 + y^2 = 26.01$
8	Punkt A	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$A = (-1.19, 4.13)$
8	Punkt B	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$B = (-1.19, -4.13)$
9	Gerade b			$b: y = 0$
10	Punkt C	Schnittpunkt von c, b	Schneide[c, b]	$C = (-4.3, 0)$
10	Punkt D	Schnittpunkt von c, b	Schneide[c, b]	$D = (4.3, 0)$

11	Punkt E	Schnittpunkt von d, b	Schneide[d, b]	$E = (6.9, 0)$
11	Punkt F	Schnittpunkt von d, b	Schneide[d, b]	$F = (-3.3, 0)$
12	Gerade e	Gerade durch A, B	Gerade[A, B]	$e: x = -1.19$
13	Punkt G	Schnittpunkt von b, e	Schneide[b, e]	$G = (-1.19, 0)$
14	Zahl f	Abstand zwischen G und A	Abstand[G, A]	$f = 4.13$
15	Zahl g	Abstand zwischen F und G	Abstand[F, G]	$g = 2.11$
16	Zahl h	Abstand zwischen C und G	Abstand[C, G]	$h = 3.11$
17	Zahl i	$1 / 6 h (3 f^2 + h^2) 3.14$	$1 / 6 h (3 f^2 + h^2) 3.14$	$i = 99.17$
18	Zahl j	$1 / 6 g (3 f^2 + g^2) 3.14$	$1 / 6 g (3 f^2 + g^2) 3.14$	$j = 61.52$
19	Zahl k	$i - j$	$i - j$	$k = 37.65$
20	Zahl l	$k 3.75$	$k 3.75$	$l = 141.17$

Abb. 51: Konstruktionsprotokoll Bsp. 7

### 5.1.8. Beispiel 8

- a) Die Hauptscheitel einer Ellipse in erster Hauptlage haben von den Nebenscheiteln den Abstand  $5\sqrt{5}$ , die Brennweite beträgt  $e = 5\sqrt{3}$ . Ermittle eine Gleichung jener Parabel in erster Hauptlage, die die Ellipse im Berührungspunkt T einer zu  $g : 3x + 8y = 24$  parallelen Ellipsentangente schneidet.
- b) Schreibe dem Paraboloid, das durch Rotation der Parabel um die x-Achse entsteht, den volumsgrößten Drehkegel ein, dessen Spitze S im rechten Hauptscheitel der Ellipse und dessen Basis zwischen S und dem Parabelscheitel liegt. Gib Radius, Höhe und Volumen dieses Drehkegels an.
- c) Das von der Parabel, der Parabeltangente in T und der y-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers. Gib das Verhältnis der in b) und c) gesuchten Volumina in möglichst einfachen ganzen Zahlen an.

[Koth, S.27]

Klassische Lösung:

a)

$$a^2 + b^2 = (5\sqrt{5})^2 = 125$$

$$e = 5\sqrt{3} \quad a^2 - b^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

$$\Rightarrow a^2 = 100, b^2 = 25$$

$$ell : 25x^2 + 100y^2 = 2500 \Rightarrow ell : x^2 + 4y^2 = 100$$

$$t_{ell} : x_0x + 4y_0y = 100 \Rightarrow k_{ell} = -\frac{x_0}{4y_0}$$

$$g : 3x + 8y = 24 \Rightarrow k_g = -\frac{3}{8}$$

$$t_{ell} \parallel g \Rightarrow -\frac{3}{8} = -\frac{x_0}{4y_0} \Rightarrow x_0 = \frac{3y_0}{2}$$

$$\Rightarrow \text{in ell} \Rightarrow \frac{9y_0^2}{4} + 4y_0^2 = 100 \Rightarrow y_0^2 = 16$$

$$\Rightarrow y_0 = \pm 4, \quad x_0 = \pm 6$$

$$T_1(6|4): \quad t_1 : 3x + 8y = 50$$

$$T_2(-6|-4): \quad t_2 : 3x + 8y = -50$$

$$par : y^2 = 2px, \quad T_1(6|4) \in par \Rightarrow 16 = 2p \cdot 6 \Rightarrow p = \frac{4}{3}$$

$$\underline{par : y^2 = \frac{8}{3}x}$$

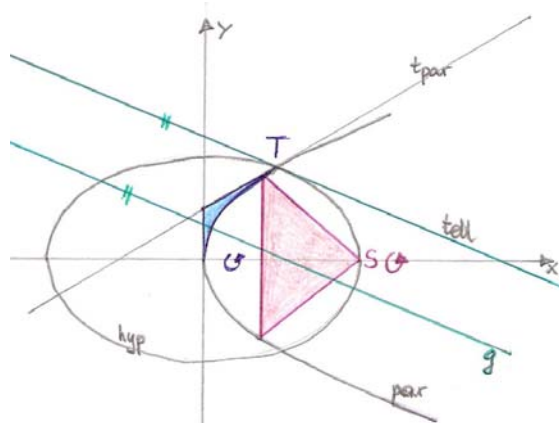


Abb. 52: Handskizze Bsp. 8

b)

$$V = r^2 \pi h; \quad r = y \quad \text{und} \quad h = 10 - x, \quad \text{wobei } P(x|y) \in \text{par} \Rightarrow V(x, y) = \frac{y^2 \pi (10 - x)}{3}$$

$$V(x) = \pi x \frac{8(10 - x)}{9} = \frac{8\pi}{9} (10x - x^2), \quad \text{wobei } 0 \leq x \leq 10$$

$$V'(x) = \frac{8\pi}{9} (10 - 2x) \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$V''(x) = \frac{8\pi}{9} (-2) \Rightarrow V''(5) < 0 \Rightarrow 5 \text{ ist lokale Maximumstelle von } V.$$

Maximales Volumen hat der Drehkegel mit  $r = \sqrt{\frac{40}{3}}$  und  $h = 5$ .

$$\text{Maximales Volumen } V = \frac{200}{9} \pi$$

c)

$$T(6|4): y^2 = \frac{8}{3}x \Rightarrow t: yy_T = p(x + x_T)$$

$$\Rightarrow t_{\text{par}}: x - 3y = -6$$

$$t_{\text{par}} \cap x\text{-Achse}: y = 0 \rightarrow x - 0 = -6 \Rightarrow X(-6|0)$$

$$t_{\text{par}} \cap y\text{-Achse}: x = 0 \rightarrow 0 - 3y = -6 \Rightarrow Y(0|2)$$

Bei Rotation um  $x$ -Achse: Drehkegel 1 mit  $r_1 = 4$  und  $h_1 = 12$ ; Drehkegel 2 zwischen Strecke  $XY$   
 $r_2 = 2$  und  $h_2 = 6$ .

$$V = V_{\text{Drehkegel 1}} - V_{\text{Drehkegel 2}} = \pi \int_0^6 \frac{8}{3} x dx = \frac{4^2 \pi 12}{3} - \frac{2^2 \pi 6}{3} = \pi \left( \frac{8}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^6 = 64\pi - 8\pi = 48\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

Verhältnis:

$$\underline{V_{\text{max}}}: V = \frac{200}{9} \pi : 8\pi = 200 : 72 = \underline{\underline{25 : 9}}$$

Computerunterstützte Lösung:  
a)

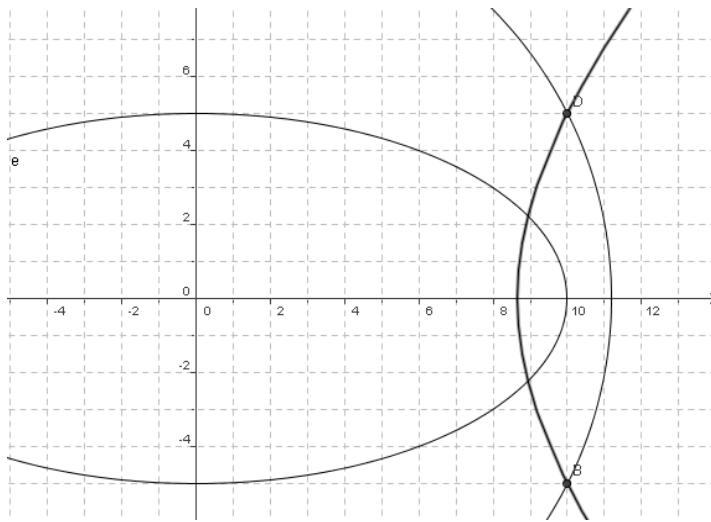


Abb. 53: Computergraphik 1 Bsp. 8

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Kreis c			$c: x^2 + y^2 = 125$
2	Hyperbel d			$d: x^2 - y^2 = 75$
3	Punkt A	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$A = (-10, 5)$
3	Punkt B	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$B = (10, -5)$
3	Punkt C	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$C = (-10, -5)$
3	Punkt D	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$D = (10, 5)$
4	Zahl a			$a = 10$
5	Zahl b			$b = 5$
6	Ellipse e	$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$	$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$	$e: x^2 + 4y^2 = 100$

Abb. 54: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 8

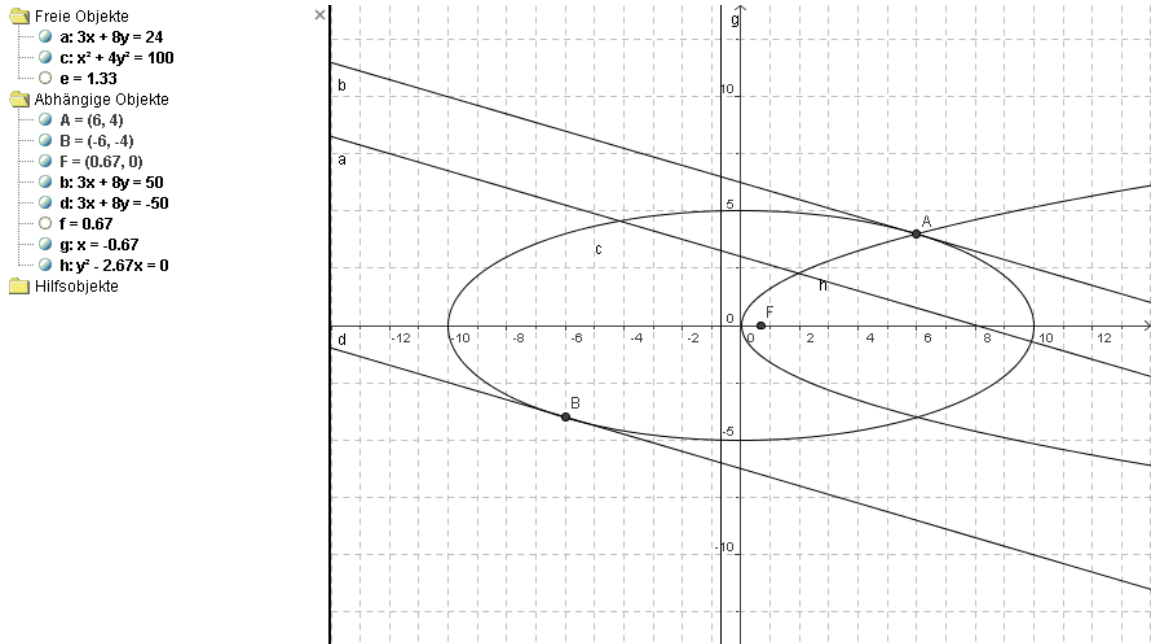


Abb. 55: Computergraphik 2 Bsp. 8

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Ellipse c			$c: x^2 + 4y^2 = 100$
2	Gerade a			$a: 3x + 8y = 24$
3	Gerade b	Tangente parallel zu a an c	Tangente[a, c]	$b: 3x + 8y = 50$
3	Gerade d	Tangente parallel zu a an c	Tangente[a, c]	$d: 3x + 8y = -50$
4	Punkt A	Schnittpunkt von c, b	Schneide[c, b]	$A = (6, 4)$
5	Punkt B	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d]	$B = (-6, -4)$
6	Zahl e			$e = 1.33$
7	Zahl f	$e / 2$	$e / 2$	$f = 0.67$
8	Punkt F	$(f, 0)$	$(f, 0)$	$F = (0.67, 0)$
9	Gerade g	$x = -f$	$x = -f$	$g: x = -0.67$
10	Parabel h	Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie g	Parabel[F, g]	$h: y^2 - 2.67x = 0$

Abb. 56: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 8

b)

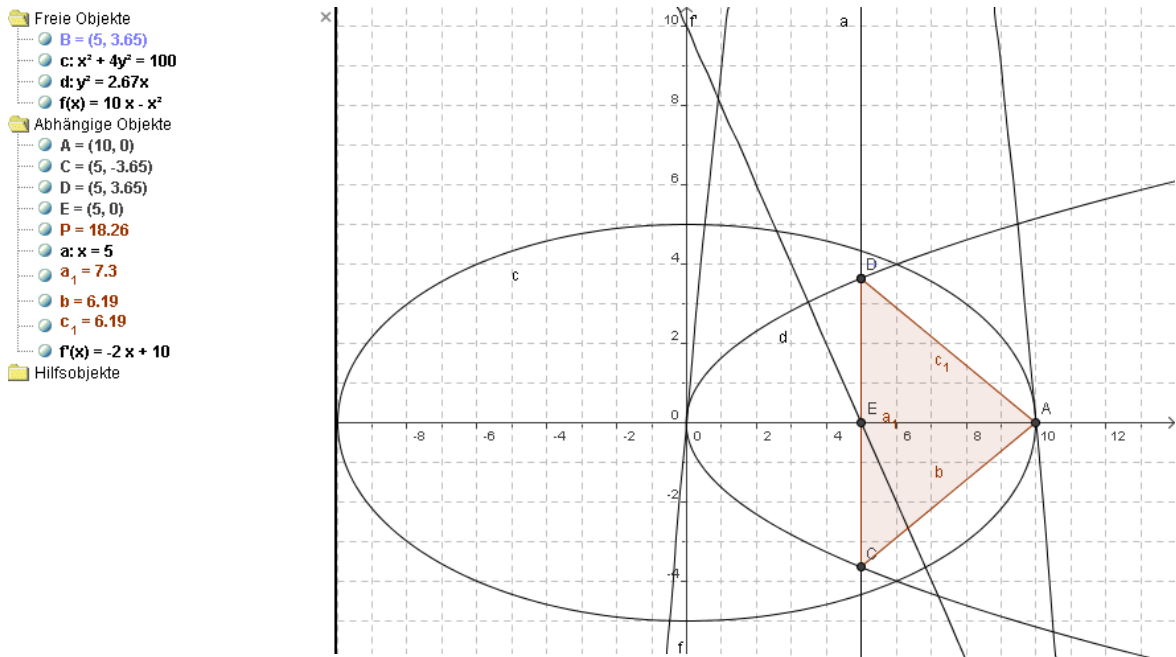


Abb. 57: Computergraphik 3 Bsp. 8

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Ellipse c			$c: x^2 + 4y^2 = 100$
2	Parabel d			$d: y^2 = 2.67x$
3	Punkt A	Schnittpunkt von c, xAchse	Schneide[c, xAchse, 2]	$A = (10, 0)$
4	Punkt B	Punkt auf d	Punkt[d]	$B = (5, 3.65)$
5	Gerade a	Gerade durch B senkrecht zu xAchse	Senkrechte[B, xAchse]	$a: x = 5$
6	Punkt C	Schnittpunkt von d, a	Schneide[d, a]	$C = (5, -3.65)$
6	Punkt D	Schnittpunkt von d, a	Schneide[d, a]	$D = (5, 3.65)$
7	Vieleck P	Vieleck B, A, C	Vieleck[B, A, C]	$P = 18.26$
7	Strecke $c_1$	Strecke[B, A] von Vieleck P	Strecke[B, A]	$c_1 = 6.19$
7	Strecke b	Strecke[A, C] von Vieleck P	Strecke[A, C]	$b = 6.19$
7	Strecke $a_1$	Strecke[C, B] von Vieleck P	Strecke[C, B]	$a_1 = 7.3$
8	Funktion			$f(x) = 10x -$

	f			$x^2$
9	Funktion $f'$	Ableitung von f	Ableitung[f]	$f'(x) = -2x + 10$
10	Punkt E	Nullstelle von $f'(x)$	Nullstelle[f'(x)]	$E = (5, 0)$

Abb. 58: Konstruktionsprotokoll 3 Bsp. 8

c)

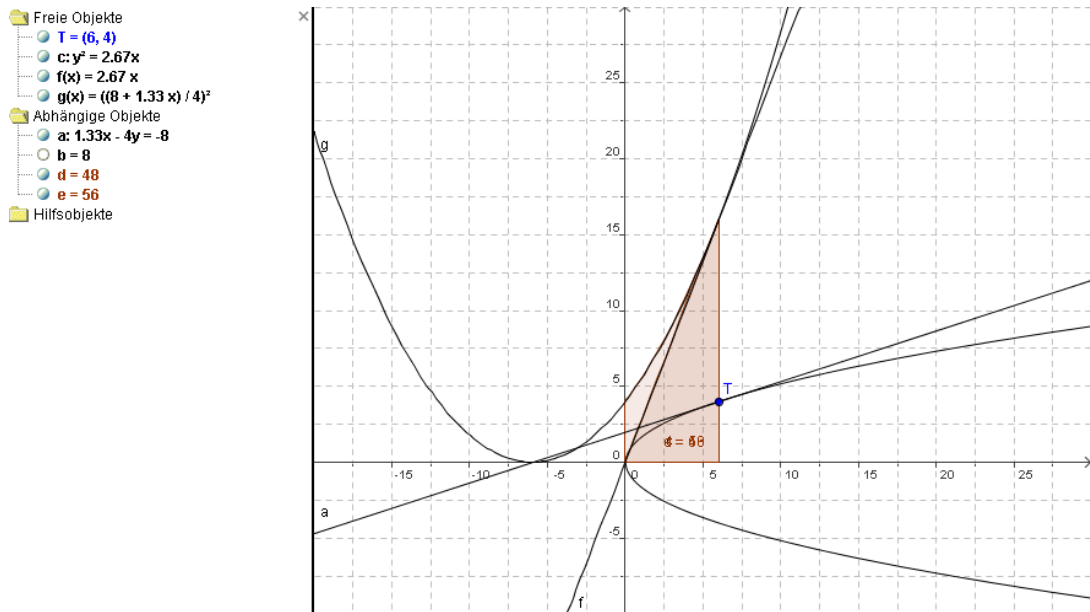


Abb. 59: Computergraphik 4 Bsp. 8

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Parabel c			$c: y^2 = 2.67x$
2	Punkt T			$T = (6, 4)$
3	Gerade a	Tangente durch T an c	Tangente[T, c]	$a: 1.33x - 4y = -8$
4	Funktion f			$f(x) = 2.67x$
5	Funktion g			$g(x) = ((8 + 1.33x) / 4)^2$
6	Zahl d	Integral von $f(x)(x)$ von 0 bis 6	Integral[f(x), 0, 6]	$d = 48$
7	Zahl e	Integral von $g(x)(x)$ von 0 bis 6	Integral[g(x), 0, 6]	$e = 56$
8	Zahl b	$e - d$	$e - d$	$b = 8$

Abb. 60: Konstruktionsprotokoll 4 Bsp. 8

### 5.1.9. Beispiel 9

- Eine Ellipse mit dem Nebenscheitel B (0/6) schneidet eine konfokale Hyperbel im Punkt P (6/3). Ermittle die Gleichungen der beiden Kegelschnitte und zeige, dass sie einander rechtwinklig schneiden.
- Schreibe dem Ellipsoid, das durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht, den volumsgrößten coaxialen Drehzylinder ein.
- Das von der Hyperbeltangente in P, der y-Achse und dem Ellipsenbogen zwischen B und P begrenzte Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

[Koth, S. 27]

Klassische Lösung:

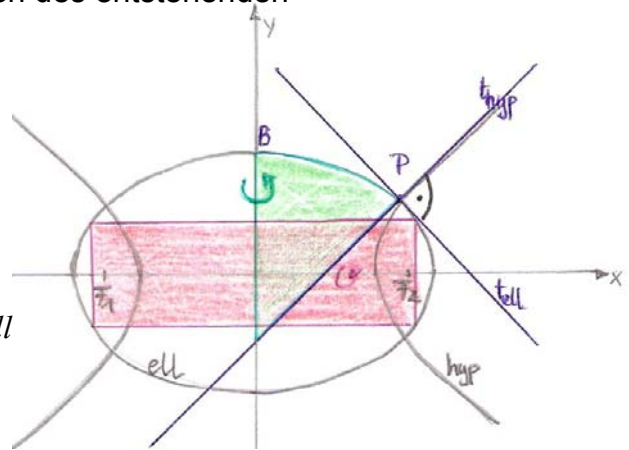


Abb. 61: Handskizze Bsp. 9

a)

$$\text{ell} : b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow b = 6; \quad P(6|3) \in \text{ell}$$

$$\Rightarrow 36 \cdot 36 + 9a^2 = 36a^2 \Rightarrow 27a^2 = 1296$$

$$\Rightarrow a^2 = 48$$

$$\text{ell} : 36x^2 + 48y^2 = 1728 \Rightarrow \underline{\text{ell} : 3x^2 + 4y^2 = 144}$$

$$e^2 = a^2 - b^2 = 12$$

$$\text{hyp} : b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow P(6|3) \in \text{hyp} \Rightarrow 36b^2 - 9a^2 = a^2 b^2$$

$$e^2 = a^2 + b^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 12 - b^2$$

$$\Rightarrow 36b^2 - 9(12 - b^2) = (12 - b^2)b^2 \Rightarrow 36b^2 - 108 + 9b^2 = 12b^2 - b^4$$

$$\Rightarrow b^4 + 33b^2 - 108 = 0 \Rightarrow b^2 = -16,5 \pm \sqrt{272,25 + 108}$$

$$\Rightarrow b^2 = 3; \quad a^2 = 12 - 3 = 9$$

$$\text{hyp} : 3x^2 - 9y^2 = 27 \Rightarrow \underline{\text{hyp} : x^2 - 3y^2 = 9}$$

Tangenten in  $P(6|3)$

$$t_{\text{ell}} : 3 \cdot 6x + 4 \cdot 3y = 144 \Rightarrow 3x + 2y = 24 \Rightarrow n_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t_{\text{hyp}} : 6x - 3 \cdot 3y = 9 \Rightarrow 2x - 3y = 3 \Rightarrow n_{\text{hyp}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort, dass das Skalarprodukt  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  den Wert Null ergibt; die beiden

Tangenten stehen aufeinander normal.

b)

$$V = r^2 \pi h; \quad r = y \quad \text{und} \quad h = 2x \Rightarrow V(x, y) = 2\pi xy^2$$

$$\text{Nebenbedingung: } 3x^2 + 4y^2 = 144; \quad \text{d.h. } y^2 = \frac{144 - 3x^2}{4}$$

$$V(x) = 2\pi x \frac{144 - 3x^2}{4} = \frac{3\pi x}{2} (48 - x^2), \quad \text{wobei } 0 \leq x \leq \sqrt{48}$$

$$V'(x) = \frac{3\pi}{2} (48 - 3x^2) \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow 48 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$V''(x) = \frac{3\pi}{2} (-6x) \Rightarrow V''(4) < 0 \Rightarrow 4 \text{ ist lokale Maximumstelle von } V.$$

Maximales Volumen hat der Drehzylinder mit  $r = \sqrt{\frac{144 - 3 \cdot 4^2}{4}} = \sqrt{24}$  und  $h = 8$ .

Maximales Volumen  $V = 192\pi$

c)

$$t_{\text{hyp}} : 2x - 3y = 3; \quad \text{Schnittpunkt mit } y\text{-Achse bei } Y(0|-1)$$

Das Tangentenstück zwischen P und Y erzeugt bei Rotation um die y-Achse einen Drehkegel mit Radius  $r = 6$  und Höhe  $h = 4$ .

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Kegel}} + \pi \int_3^6 \frac{144 - 4y^2}{3} dy = \frac{6^2 \pi 4}{3} + \frac{4\pi}{3} \int_3^6 (36 - y^2) dy = 48\pi + \frac{4\pi}{3} \left( 36y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_3^6 \\ &= 48\pi + \frac{4\pi}{3} (144 - 99) = 108\pi \approx 339,29 \end{aligned}$$

Computerunterstützte Lösung:

a)

- Freie Objekte
  - B = (0, 6)
  - P = (6, 3)
  - a = 6,93
  - b = 6
- Abhängige Objekte
  - A = (-3,46, 0)
  - C = (3,46, 0)
  - c:  $2,08x^2 + 2,78y^2 = 100$
  - d = 9,93
  - e = 3,93
  - f = 6
  - g:  $48x^2 - 144y^2 = 432$
  - h:  $12,5x + 8,33y = 100$
  - i:  $288x - 432y = 432$
  - α = 90°
- Hilfsobjekte

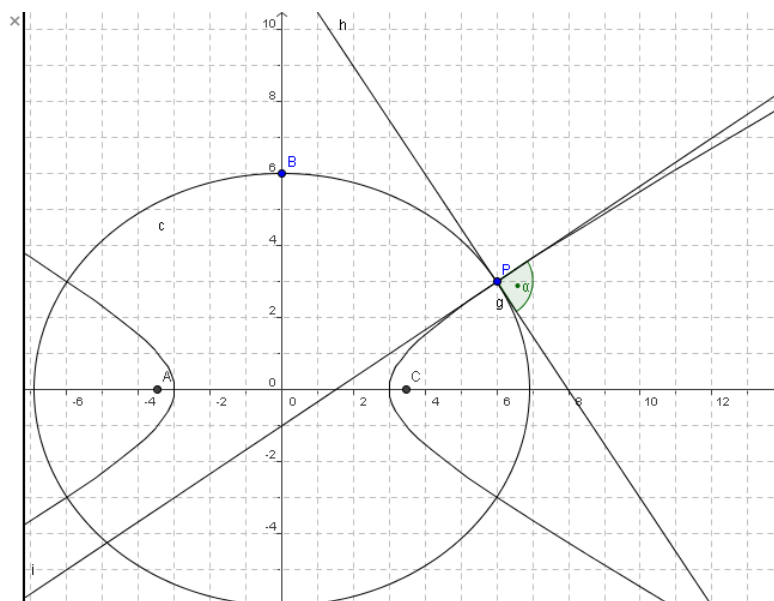


Abb. 62: Computergraphik 1 Bsp. 9

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Punkt B			$B = (0, 6)$
2	Punkt P			$P = (6, 3)$
3	Zahl b			$b = 6$
4	Zahl a			$a = 6.93$
5	Ellipse c	$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$	$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$	$c: 2.08x^2 + 2.78y^2 = 100$
6	Punkt A	Brennpunkt von c	Brennpunkt[c]	$A = (-3.46, 0)$
6	Punkt C	Brennpunkt von c	Brennpunkt[c]	$C = (3.46, 0)$
7	Zahl d	Abstand zwischen A und P	Abstand[A, P]	$d = 9.93$
8	Zahl e	Abstand zwischen C und P	Abstand[C, P]	$e = 3.93$
9	Zahl f	$d - e$	$d - e$	$f = 6$
10	Hyperbel g	Hyperbel mit Brennpunkten A, C und Hauptachsenlänge $f / 2$	Hyperbel[A, C, $f / 2$ ]	$g: 48x^2 - 144y^2 = 432$
11	Gerade h	Tangente durch P an c	Tangente[P, c]	$h: 12.5x + 8.33y = 100$
12	Gerade i	Tangente durch P an g	Tangente[P, g]	$i: 288x - 432y = 432$
13	Winkel $\alpha$	Winkel zwischen h, i	Winkel[h, i]	$\alpha = 90^\circ$

Abb. 63: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 9

b)

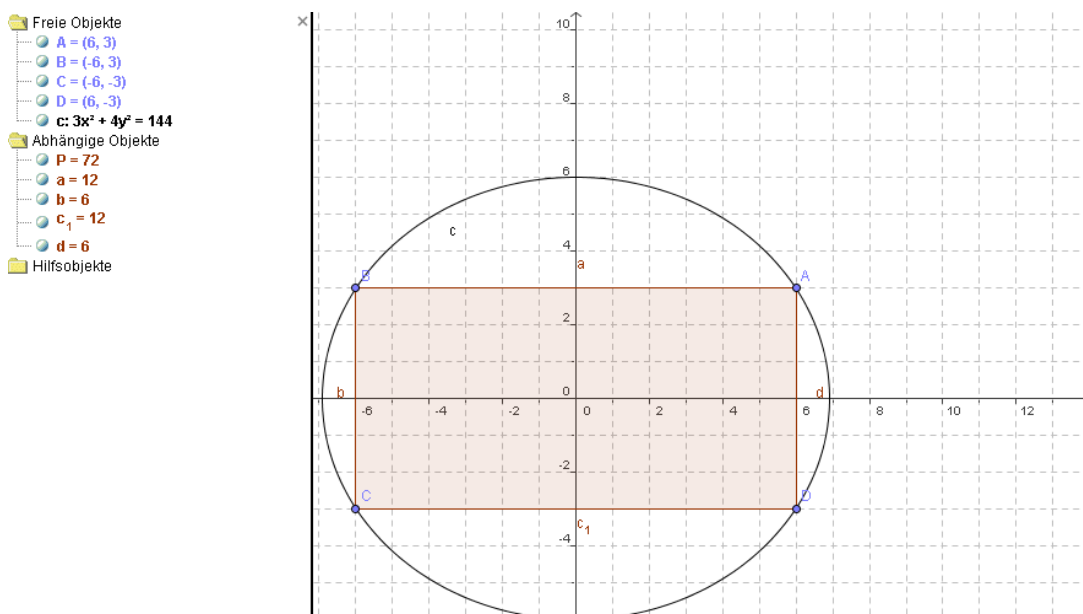


Abb. 64: Computergraphik 2 Bsp. 9

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Ellipse c			$c: 3x^2 + 4y^2 = 144$
2	Punkt A	Punkt auf c	Punkt[c]	$A = (6, 3)$
3	Punkt B	Punkt auf c	Punkt[c]	$B = (-6, 3)$
4	Punkt C	Punkt auf c	Punkt[c]	$C = (-6, -3)$
5	Punkt D	Punkt auf c	Punkt[c]	$D = (6, -3)$
6	Vieleck P	Vieleck A, B, C, D	Vieleck[A, B, C, D]	$P = 72$
6	Strecke a	Strecke[A, B] von Vieleck P	Strecke[A, B]	$a = 12$
6	Strecke b	Strecke[B, C] von Vieleck P	Strecke[B, C]	$b = 6$
6	Strecke $c_1$	Strecke[C, D] von Vieleck P	Strecke[C, D]	$c_1 = 12$
6	Strecke d	Strecke[D, A] von Vieleck P	Strecke[D, A]	$d = 6$

Abb. 65: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 9

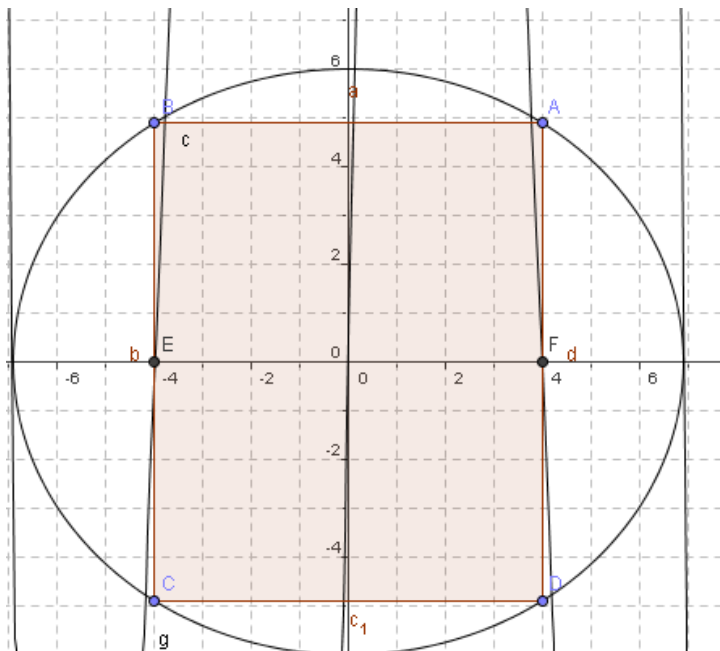


Abb. 66: Computergraphik 3 Bsp. 9

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
7	Funktion f			$f(x) = 48x - x^3$
8	Funktion g	Ableitung von f(x): $g(x) = -3x^2 + 48$	Ableitung[f(x)]	$g(x) = -3x^2 + 48$
9	Punkt E	Nullstelle von g(x)	Nullstelle[g(x)]	$E = (-4, 0)$
9	Punkt F	Nullstelle von g(x)	Nullstelle[g(x)]	$F = (4, 0)$
10	Funktion h	Ableitung von g(x): $h(x) = -6x$	Ableitung[g(x)]	$h(x) = -6x$

Abb. 67: Konstruktionsprotokoll 3 Bsp. 9

c)

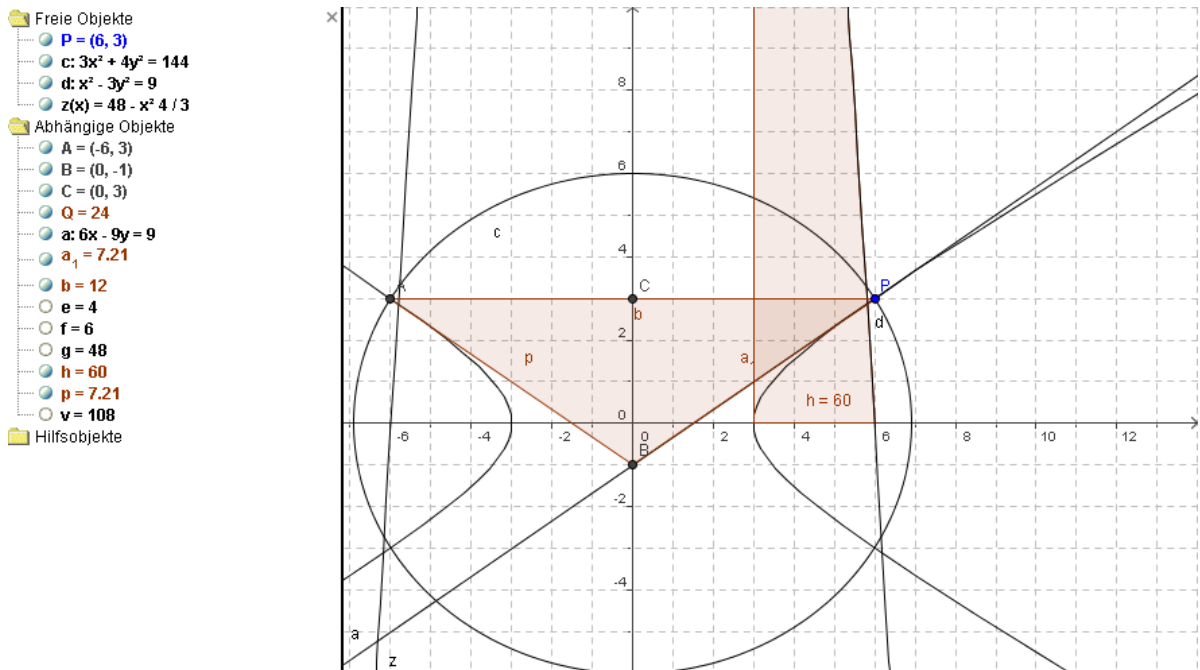


Abb. 68: Computergraphik 4 Bsp. 9

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Ellipse c			c: $3x^2 + 4y^2 = 144$
2	Hyperbel d			d: $x^2 - 3y^2 = 9$
3	Punkt P			P = (6, 3)
4	Gerade a	Tangente durch P an d	Tangente[P, d]	a: $6x - 9y = 9$
5	Punkt A	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d, 1]	A = (-6, 3)
6	Punkt B	Schnittpunkt von a, yAchse	Schneide[a, yAchse]	B = (0, -1)
7	Vieleck Q	Vieleck A, P, B	Vieleck[A, P, B]	Q = 24
7	Strecke b	Strecke[A, P] von Vieleck Q	Strecke[A, P]	b = 12
7	Strecke a <sub>1</sub>	Strecke[P, B] von Vieleck Q	Strecke[P, B]	a <sub>1</sub> = 7.21
7	Strecke p	Strecke[B, A] von Vieleck Q	Strecke[B, A]	p = 7.21
8	Punkt C	Schnittpunkt von b, yAchse	Schneide[b, yAchse]	C = (0, 3)
9	Zahl e	Abstand zwischen C und B	Abstand[C, B]	e = 4
10	Zahl f	Abstand zwischen C und P	Abstand[C, P]	f = 6
11	Zahl g	$F^2 e / 3$	$f^2 e / 3$	g = 48
12	Funktion z			$z(x) = 48 - x^2$ / 3
13	Zahl h	Integral von z(x)(x) von 3 bis 6	Integral[z(x), 3, 6]	h = 60
14	Zahl v	G + h	g + h	v = 108

Abb. 69: Konstruktionsprotokoll 4 Bsp. 9

### 5.1.10. Beispiel 10

In einem Becher, der die Gestalt eines halben einschaligen Drehhyperboloids hat ( $a = 3$ ,  $b = 4$ ), ruht eine Kugel, welche den Boden und die Wand berührt. Wie groß ist der unterhalb der Kugel frei bleibende Raum?

[Rosenberg, Ludwig, Wühr; s. 257]

Klassische Lösung:

$$a = 3, b = 4 \Rightarrow hyp : 16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$M(0|v) \Rightarrow k : x^2 + (y - v)^2 = v^2 \Rightarrow x^2 = v^2 - (y - v)^2$$

$$k \cap hyp : 16(v^2 - (y - v)^2) - 9y^2 = 144$$

$$16(v^2 - y^2 + 2yv - v^2) - 9y^2 = 144$$

$$-16y^2 + 32yv - 9y^2 = 144$$

$$-25y^2 - 32yv - 144 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-32v \pm \sqrt{32^2v^2 - 14400}}{-50}$$

$$32^2v^2 - 14400 = 0$$

$$v^2 = 14,0625$$

$$v_1 = 3,75$$

$$(v_2 = -3,75)$$

$$y_{1,2} = 2,4$$

$$x_{1,2} = \pm 3,49 \quad S(\pm 3,49; 2,4)$$

$$V = \pi \int_0^{2,4} (x_{hyp}^2 - x_k^2) dy = \pi \int_0^{2,4} \left[ \left( 9 + \frac{9}{16} y^2 \right) - (-y^2 + 7,5y) \right] dy =$$

$$= \pi \left[ 9y + \frac{3y^3}{16} + \frac{y^3}{3} - \frac{7,5y^2}{2} \right] \Big|_0^{2,4} = \underline{\underline{7,2 \cdot \pi = V}}$$

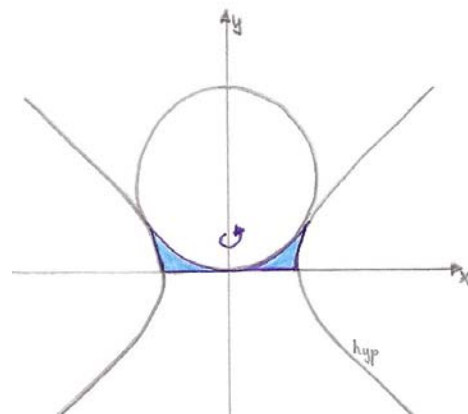


Abb. 70: Handskizze Bsp. 10

## Computerunterstützte Lösung:

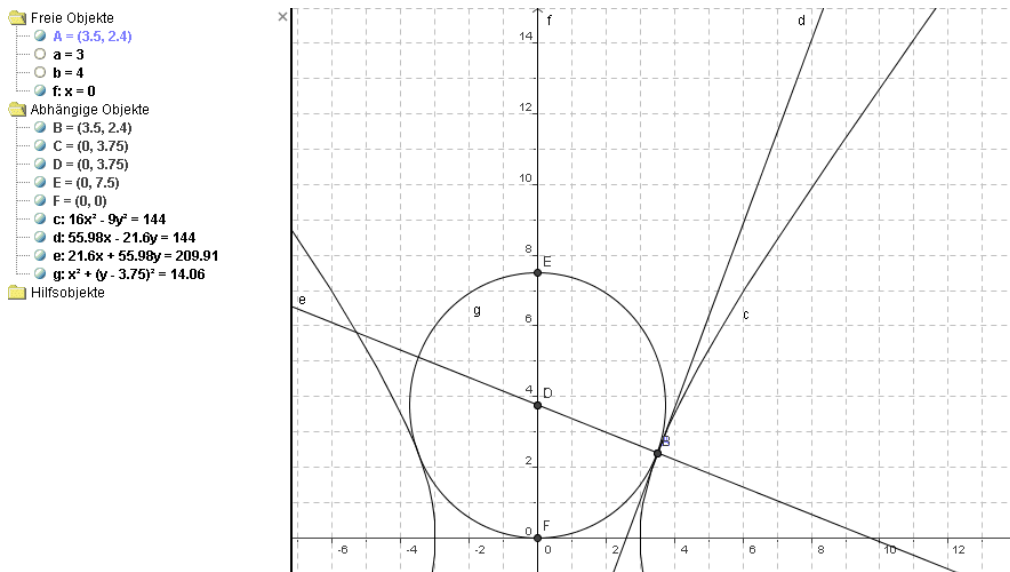


Abb. 71: Computergraphik 1 Bsp. 10

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
1	Zahl a			$a = 3$
2	Zahl b			$b = 4$
3	Hyperbel c	$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$	$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$	$c: 16x^2 - 9y^2 = 144$
4	Punkt A	Punkt auf c	Punkt[c]	$A = (3.5, 2.4)$
5	Gerade d	Tangente durch A an c	Tangente[A, c]	$d: 55.98x - 21.6y = 144$
6	Punkt B	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d, 1]	$B = (3.5, 2.4)$
7	Gerade e	Gerade durch A senkrecht zu d	Senkrechte[A, d]	$e: 21.6x + 55.98y = 209.91$
8	Gerade f			$f: x = 0$
9	Punkt C	Schnittpunkt von e, f	Schneide[e, f]	$C = (0, 3.75)$
10	Kreis g	Kreis mit Mittelpunkt C durch A	Kreis[C, A]	$g: x^2 + (y - 3.75)^2 = 14.06$
11	Punkt D	Mittelpunkt von g	Mittelpunkt[g]	$D = (0, 3.75)$
12	Punkt E	Schnittpunkt von g, f	Schneide[g, f]	$E = (0, 7.5)$
12	Punkt F	Schnittpunkt von g, f	Schneide[g, f]	$F = (0, 0)$

Abb. 72: Konstruktionsprotokoll 1 Bsp. 10

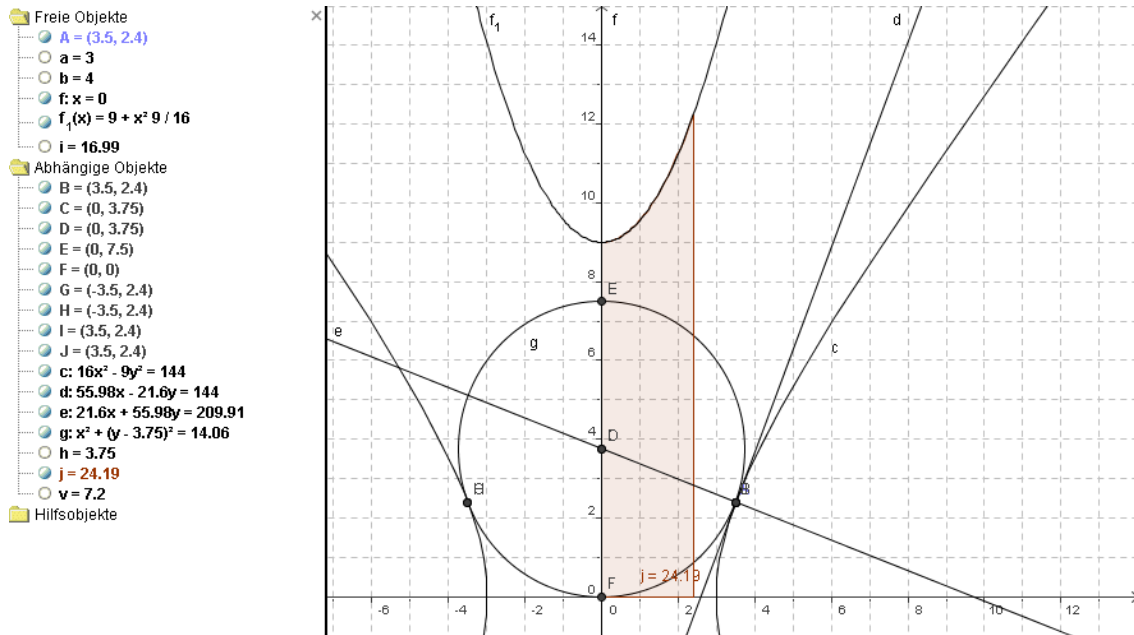


Abb. 73: Computergraphik 2 Bsp. 10

Nr.	Name	Definition	Befehl	Algebra
4	Punkt A	Punkt auf c	Punkt[c]	$A = (3.5, 2.4)$
5	Gerade d	Tangente durch A an c	Tangente[A, c]	$d: 55.98x - 21.6y = 144$
6	Punkt B	Schnittpunkt von c, d	Schneide[c, d, 1]	$B = (3.5, 2.4)$
7	Gerade e	Gerade durch A senkrecht zu d	Senkrechte[A, d]	$e: 21.6x + 55.98y = 209.91$
8	Gerade f			$f: x = 0$
9	Punkt C	Schnittpunkt von e, f	Schneide[e, f]	$C = (0, 3.75)$
10	Kreis g	Kreis mit Mittelpunkt C durch A	Kreis[C, A]	$g: x^2 + (y - 3.75)^2 = 14.06$
11	Punkt D	Mittelpunkt von g	Mittelpunkt[g]	$D = (0, 3.75)$
12	Punkt E	Schnittpunkt von g, f	Schneide[g, f]	$E = (0, 7.5)$
12	Punkt F	Schnittpunkt von g, f	Schneide[g, f]	$F = (0, 0)$

13	Punkt G	Schnittpunkt von g, c	Schneide[g, c]	$G = (-3.5, 2.4)$
13	Punkt H	Schnittpunkt von g, c	Schneide[g, c]	$H = (-3.5, 2.4)$
13	Punkt I	Schnittpunkt von g, c	Schneide[g, c]	$I = (3.5, 2.4)$
13	Punkt J	Schnittpunkt von g, c	Schneide[g, c]	$J = (3.5, 2.4)$
14	Zahl h	Abstand zwischen D und A	Abstand[D, A]	$h = 3.75$
15	Zahl i			$i = 16.99$
16	Funktion $f_1$			$f_1(x) = 9 + x^2$ $9 / 16$
17	Zahl j	Integral von $f_1(x)(x)$ von 0 bis 2.4	Integral[ $f_1(x)$ , 0, 2.4]	$j = 24.19$
18	Zahl v	$j - i$	$j - i$	$v = 7.2$

Abb. 74: Konstruktionsprotokoll 2 Bsp. 10

## 5.2. Resümee der Beispiele

Der Einsatz des Computers bei den Beispielen erleichtert die Behandlung des Themas Kegelschnitte enorm.

Weitgehend ungeklärt ist [...], welche Auswirkungen ein ausgedehnter Computereinsatz auf die Auswahl und Akzentuierung von Ideen, Begriffsbildungen und Prozeduren des gesamten Curriculums [...] haben wird; speziell ist derzeit noch unbekannt, was es bedeuten würde, wenn das Trainieren rechnerischer Fähigkeiten (mündliches/schriftliches Zahlenrechnen, Bruchrechnen, Termumformungen) reduziert werden würde. [GDM, Seite 278]

Fasst man alle zehn Beispiele zusammen, ist feststellbar, dass die Verwendung von GeoGebra auf jeden Fall die Konstruktionsanfertigung erleichtert. Händische Skizzen, speziell bei Beispiel 6, sind oft nicht einfach anzufertigen und können leicht unübersichtlich werden. Auf der anderen Seite benötigt GeoGebra genaue Angaben, um eine Konstruktion des Beispiels anfertigen zu können. Das bedeutet, dass ein Grundwissen zum Thema Kegelschnitte unumgänglich ist, wie bei Beispiel 1 deutlich wird. Bei fehlendem Basiswissen helfen auch die gut erklärten Hilfsdateien von GeoGebra nicht weiter. Das Aneignen des benötigten Wissens kann jedoch mit Unterstützung des Computers geschehen. Auf die bewusste Auswahl der Beispiele, die mit Hilfe eines Computerprogramms zu lösen sind, ist zu achten. Manche Beispiele lassen sich durch direkte Eingabe gleich lösen, da die Hauptinformationen, die das Computerprogramm benötigt, gegeben sind. Vergleichbar ist es, wenn beim ‚klassischen‘ Rechnen immer die gleiche Aufgabe gestellt ist. Beides trägt kaum zum Verständnis des Stoffes bei, kann aber gerade für den Einstieg in ein Thema nützlich sein, speziell dann, wenn es darum geht Konstruktionswege zu verdeutlichen und nachvollziehbar zu machen. Im Folgenden werden die einzelnen Beispiele nun im Bezug auf GeoGebra analysiert. Das benötigte Wissen und auch die kleinen ‚Tücken‘

des Programms, welche Grundwissen erfordern, können somit hervorgehoben werden.

Für die Lösung dieses Beispiels 1, egal ob klassisch oder mit Hilfe von GeoGebra, muss der Lernende wissen, wie man die Hauptachse einer Ellipse oder einer Hyperbel berechnet. Dies kann entweder über die Verwendung der linearen Exzentrizität oder über die Brennpunkteigenschaft geschehen. Die Hauptachsenlänge kann natürlich mit Hilfe von GeoGebra berechnet werden, man benötigt dazu allerdings fünf verschiedene Eingaben. Es ist daher empfehlenswert dem Lernenden das selbständige Rechnen zu nahe zulegen. Nach Berechnung der Hauptachsenlänge kann mit GeoGebra das Beispiel sehr schnell gelöst werden. Die Berechnung des Schnittwinkels enthält aber eine ‚Tücke‘. Das Ergebnis ist abhängig von der Reihenfolge der Eingabe der Tangenten und dies muss vom Lernenden berücksichtigt werden.

Beispiel 2 ist eines jener Beispiele, die die Rechenfertigkeiten – Schneiden von Gerade mit Hyperbel, Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Unbekannten – trainieren, weshalb es sich, in Bezug auf die Verwendung von GeoGebra als gutes Einführungsbeispiel erweist. Der Lernende muss sieben Eingaben tätigen um das Beispiel zu lösen und kann dabei Befehle verwenden, die auch bei experimentellem Lernen ohne vertieftes Wissen über Kegelschnitte herausgefunden werden können. Interessant ist das Beispiel, wenn die Hyperbel oder die Gerade verändert werden und man somit sehen kann, wie sich die Lösungen ändern, sich die Positionen verschieben.

Wie so oft bei mathematischen Beispielen reicht nicht nur das rein mathematische Wissen aus. Bei Beispiel 3 wird das Wissen um den Strahlengang in Linsen vorausgesetzt, wo der Lichtstrahl durch den Brennpunkt parallel zur Spiegelachse reflektiert wird. Wenn dies bekannt ist, muss lediglich der Punkt in die Parabelgleichung eingesetzt werden.

Hierbei ist klassische Berechnung schnell und eine Handskizze ausreichend. Mit GeoGebra kann zwar eine genaue Konstruktion angefertigt werden, dennoch muss zuerst der Brennpunkt berechnet werden. Wobei dies schon die Lösung ist und es nicht notwendig ist, eine genaue Konstruktion anzufertigen.

Beispiel 4 benötigt für die klassische Berechnung das Wissen über das Lösen von Gleichungen höheren Grades. Bei Verwendung von GeoGebra muss ‚nur‘ darauf geachtet werden, dass der Punkt, durch den die Gerade gelegt wird ein freies Objekt ist und somit durch den Modus ‚Bewegen‘ verschoben werden kann, bis der gewünschte Flächeninhalt erreicht wird.

Ähnlich dem vorigen Beispiel steht bei Beispiel 5 das Lösen einer Gleichung 3. Grades im Vordergrund. Erleichtert wird das Finden der Lösung, indem die Bruchzahl in Faktoren zerlegt wird. Bei Lösung mit GeoGebra muss die Gleichung nur aufgestellt werden, dann löst das Programm die Gleichung. Das Berechnen wird durch GeoGebra in diesem Beispiel erleichtert, aber der Konstruktionsweg, um den richtigen Flächeninhalt und somit die Punkte zu berechnen, ist langwierig und benötigt einige Überlegungen.

Zur Lösung der Aufgabe a) in Beispiel 6 benötigt man für beide Berechnungsarten das Wissen über den Thaleskreis. Nach Aufstellung der Tangenten und deren Schnittpunkte ist die Flächenberechnung nicht sehr schwer. Den Inkreis für das Tangentenviereck benötigt dabei wieder das Wissen um die Hessesche Normalform. Für die Konstruktion muss der Lernende berücksichtigen, dass durch Aufstellen einer Normalen durch den Mittelpunkt der Radius berechnet werden kann. Eine weitere Möglichkeit ist, einen Kreis durch den Mittelpunkt und den Schnittpunkt auf der Tangente der Normalen zu legen, wodurch man gleich den Kreis erhält.

Die Konkav-konvex-Linse, deren Masse in Beispiel 7 gefragt ist, kann als ein weiteres Anwendungsbeispiel von Kegelschnitten gesehen werden. Die Berechnung der Masse im klassischen Sinn, wie auch mit Hilfe von GeoGebra, ist nicht sehr aufwendig. In beiden Fällen ist auf die einfachste Berechnung des Volumens, sowie die Umwandlung der Dichte in die entsprechende Einheit zu achten.

Beispiel 8 erfordert fundiertes Wissen über die Eigenschaften der Kegelschnitte. Der Pythagoräische Lehrsatz und die lineare Exzentrizität sind nützlich, und für GeoGebra weiters, dass ich für  $a$  und  $b$  der Ellipse auch durch Schneiden des Kreises ( $r = \text{Quadrat des Abstandes}$ ) und der Hyperbel ( $ab = e^2$ ) erhalten kann. Für die Rotation um die  $x$ -Achse muss beachtet werden, dass für GeoGebra das Quadrat im Vorhinein berechnet werden muss, oder zumindest als eigene Zeile angegeben werden muss. Für den Lernenden ist das Beispiel auf jeden Fall eine Herausforderung.

Auch Beispiel 9 ist nicht schnell lösbar. Besonders zu beachten ist, dass GeoGebra nicht über die  $y$ -Achse integrieren kann, was bedeutet, dass der Lernende zuerst die Kurven kippen muss, um dann die Rotation um die  $x$ -Achse berechnen zu können. Die gleiche Vorgehensweise erweist sich auch bei Beispiel 10 für die Berechnung des frei bleibenden Raumes als zielführend.

Abschließend ist zu erwähnen, dass die Verwendung von GeoGebra und die eventuell damit verbundene ‚Entwöhnung‘ des klassischen Rechnens kritisiert werden kann. Jedoch muss beachtet werden, dass im Mathematikunterricht nicht nur GeoGebra verwendet werden soll. Die Variation der Methoden ist zu fördern. Durch GeoGebra können experimentell und durch spezifische Arbeitsaufträge<sup>57</sup> schwierigere Beispiele gelöst werden und andere Aspekte hervorgehoben werden.

---

<sup>57</sup> Speziell durch die Verwendung dynamischer Arbeitsblätter, siehe [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

## 6. Resümee

Wissen ist verknüpfen.  
Mo-Ti<sup>58</sup>

Fritz Schweiger [1983] hat mit seinem Artikel die provokante Frage aufgestellt, ob die Kegelschnitte noch zu retten seien, eine ausführliche Diskussion bleibt in seinem Artikel aber aus. Dennoch ist die Frage legitim: wenn die Kegelschnitte nicht hinterfragt werden und auch weiterhin, wie so oft in Schulbüchern aufgezeigt, mit ‚üblichen‘ Prozeduren, ‚durchgekauft‘ werden, sind die Kegelschnitte wohl kaum noch zu retten. Bei verändertem Betrachtungswinkel und durch die Verwendung ‚Neuer Medien‘ im Unterricht können Kegelschnitte jedoch wieder zu neuem Leben erweckt werden.

Die Anschauung, die Modellbildung und das Arbeiten mit Kegelschnitten in verschiedenen mathematischen Kontexten sind in das Verständnis der Kegelschnitte eingeschlossen. Die aktive Verknüpfung von Wissen kann durch das Thema Kegelschnitte geschehen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Aufgabenstellungen mancher Beispiele überdacht werden muss, damit auch eine Verknüpfung mit einem Computerprogramm geschehen kann.

Bei Berücksichtigung dieser Punkte und einer anwendungsorientierten Einstellung können die Kegelschnitte im Mathematikunterricht zu einem spannenden Thema werden, das die Experimentierfreudigkeit der Schülerinnen und Schüler fördert.

Im Mathematikunterricht sind Verknüpfungen verschiedener Themen eingeschlossen. Im Bezug auf den Lehrplan kann dies gegebenenfalls die

---

<sup>58</sup> Skupy, Seite 1073

Erweiterung oder Streichung eines Themas bedeuten. Einige der gewählten Beispiele in Kapitel 5 zeigen eine derartige Verknüpfung, zum Beispiel die Integrierung physikalischen Wissens, auf. Abgesehen von Beispiel 2 sind die gewählten Beispiele nur in eingeschränktem Maß zur Einführung in das Thema geeignet. Anwendungsorientiertheit kann durch die Einbindung mehrerer Beispiele aus der Physik geschehen. Es liegt jedoch in der Verantwortung jeder Lehrerin und jedes Lehrers, sich bei der Behandlung des Themas Kegelschnitte über die sinnvolle Integration in den Unterricht Gedanken zu machen. Materialien zu diesem Thema gibt es zur Genüge<sup>59</sup>. Fällt die sinnvolle Integration schwer, könnte es besser sein, das Thema Kegelschnitte knapp oder gar nicht zu behandeln. Stattdessen kann anderen Themen, die bisher vielleicht vernachlässigt wurden, der Vorzug gegeben werden.

Das Computerprogramm GeoGebra ist ein ausführlich erklärtes, anwenderorientiertes und benutzerfreundliches Programm, dessen Einsatz im Mathematikunterricht jeder Lehrerin und jedem Lehrer zu empfehlen ist. Besonders geeignet ist das Programm bei Verknüpfungen von Algebra und Geometrie. In diesem Fall ist es nicht nur für die Lehrende und den Lehrenden zu Demonstrationszwecken ein Vorteil, sondern auch die Schülerinnen und Schüler profitieren von der Beschäftigung mit diesem Programm.

---

<sup>59</sup> Vergleiche hierzu die dynamischen Arbeitblätter von GeoGebra.

## 7. BIBLIOGRAPHIE

Bartsch, Hans-Jochen (2001): *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. 19. Auflage. Leipzig: Carl Hanser Verlag.

Czwalina, Arthur (1926): *Die Kegelschnitte des Apollonios*. München, Berlin: Oldenbourg.

Dingeldey, Friedrich (1903): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. III C1. Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme*. Darmstadt

Dronke, A. (1881): *Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima Höherer Lehranstalten*. Leipzig: Teubner.

GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) (1988): *Überlegungen und Vorschläge zur Problematik Computer und Unterricht*. In: Graf, K.: *Computer in der Schule 2*. Seite 277-280. Stuttgart: Teubner.

Gericke, Helmuth (1984): *Mathematik in Antike und Orient*. Berlin: Springer.

Graefe, Fr. (1885): *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte*. Leipzig: Teubner.

Hischer, Horst (2002): *Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht*. Berlin: Verlag Franzbecker.

Hohenwarter, Markus (2004). *Dynamische Mathematik mit GeoGebra*. In: *Praxis der Mathematik*, 6/2004; [www.geogebra.at](http://www.geogebra.at)

Hohenwarter, Markus (2004). *GeoGebra: dynamische Geometrie, Algebra und Analysis für die Schule*. In: *Computeralgebra-Rundbrief* Nr. 35; [www.geogebra.at](http://www.geogebra.at)

Kaiser, H.; Nöbauer, W (1984): *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. Wien: Hölder – Pichler – Tempsky.

Köhler, J.; Höwelmann, R.; Krämer, H. (1971): *Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in Vektorieller Darstellung*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg/ Otto Salle Verlag.

Müller-Fonfara, Robert (2004): *Mathematik verständlich*. München: Bassermann.

Reichel, H.-C. (1991): *Wie Ellipse, Hyperbel und Parabel zu ihrem Namen kamen und einige allgemeine Bemerkungen zum Thema „Kegelschnitte“ im Unterricht.* Didaktik der Mathematik 19(2) 111-130.

Schupp, Hans (1988): *Kegelschnitte, Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 12.* Zürich: Brockhaus.

Schweiger, Fritz (1983): *Analytische Geometrie oder Sind die Kegelschnitte noch zu retten?* In: Mathematik im Unterricht 7/1983.

Skupy, H. [Hrsg.] (2004): *Das Grosse Handbuch der Zitate von A bis Z.* München: Wissen Media Verlag GmbH.

Teiwes, Eike (1988): *Mit Maschinen leben – Die Macht des Programmierens.* In: Graf, K.: Computer in der Schule 2. Seite 59-76. Stuttgart: Teubner.

Tietze, U.P. (1997): *Allgemeine Didaktische Fragen zum Analysis Unterricht.* Braunschweig: Vieweg.

Tietze, U.P.; Klika, M; Wolpers, H. (1997): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis.* Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, Erich (1975): *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg Verlag.

Zenkl, Maria (1985): *Pädagogik und Fachdidaktik für Mathematiklehrer.* Wien: HPT

### **Schulbücher:**

Bernhard, Martin (2003): *Mathematik, Schularbeiten und Prüfungsaufgaben 7. Klasse.* Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at) .

Bürger, H.; u.a. (1991): *Mathematik Oberstufe 3, Arbeitsbuch für die 7. Klasse der AHS,* Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Fiala, F.; Moser, W. (2000): *Mathematik Matura-Aufgaben.* 6. Auflage. Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at) .

Götz, S.; Reichel, H.; u.a. (2006): *Mathematik – Lehrbuch 7.* Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at) .

Koth, Maria (1993): *MATHEMATIK Maturaaufgaben mit vollständigen Lösungen.* Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at)

Malle, G.; Ramharter, E. u.a. (2006): *Mathematik verstehen 7*. Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at) .

Novak, J., u.a. (1992): *Mathematik Oberstufe 3*. Wien: Reniets Verlag GmbH.

Pillwein, g. u.a. (2006): *RAUMGEOMETRIE Konstruieren und Visualisieren*. Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at) .

Reichel, H.; Müller, R.; Hanisch, G.; Laub, J. (1992): *Lehrbuch der Mathematik 7*. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Rosenberg, K.; Ludwig, E.; Wühr, P. (1957): *Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie mit Lösungen und einem Leitfaden*. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Schalk, Heinz-Christian (1987): *Mathematik 2 für Höhere technische Lehranstalten*. Wien: Reniets Verlag.

Schärf, Julius (1994): *Mathematik 3 für HTL*. Wien: Oldenbourg Verlag.

Thorwartl, W.; Wagner, G., Wagner, H. (2006): *Mathematik Positiv! Österreichischer Lehrplan. 7. Klasse AHS*. Wien: [www.oebvhpt.at](http://www.oebvhpt.at)

#### **Web-Sites:**

<http://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Sulba\\_Sutras](http://en.wikipedia.org/wiki/Sulba_Sutras)

<http://shop.bk-teachware.com>

Lehrpläne unter: <http://www.bmbwk.gv.at>

[http://www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/abs/ahs\\_lehrplaene\\_oberstufe.xml](http://www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/abs/ahs_lehrplaene_oberstufe.xml)

<http://www.gemeinsamlernen.at>

<http://www.geogebra.at>

<http://www.madin.net>

<http://www.madin.tu-bs.de/madin-offen/oberstufengeometrie/st3/st31/theorie>

<http://www.math.fau.edu/~mhohen/>

## 8. Anhang:

Abkürzungsverzeichnis:

Abb.	Abbildung
AS	Annette Schocher
BGBI.	Bundesgesetzblatt
Bsp.	Beispiel
CA-R	Computeralgebra-Rundbrief
CAS	Computeralgebra System
DGS	dynamisches Geometrie System/Software
ell	Ellipse
GDM	Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
HL.	Hauptlage
Hrsg.	Herausgeber
hyp	Hyperbel
Nr.	Nummer
par	Parabel
PM	Praxis der Mathematik
S.	Seite
Vgl.	Vergleiche

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

---

Name: Annette Schocher  
 Geboren am: 06. Oktober 1979  
 Geburtsort: Egg  
 Eltern: Vater: Dipl. Päd. Gerd Schocher  
 Mutter: Mag.rer.nat. Ulrike Schocher, geborene Reiber  
 Staatsbürgerschaft: Österreich

### Ausbildung:

---

1986 – 1990 Volksschule Egg-Großdorf  
 1990 – 1994 Hauptschule Egg  
 1994 – 1999 Bundesoberstufenrealgymnasium Egg  
 Juni 1999 Matura  
 Seit WS 1999 Lehramtsstudium Mathematik und Anglistik an der  
 Hauptuniversität Wien

### Tätigkeiten

---

1997 Austauschjahr in Knysna, Südafrika  
 2000 – 2002 Mitarbeit Österreichische Hochschülerschaft Wien –  
 Maturantenberatung  
 2001 – 2003 Tutoriumsauftrag am Institut für die Schulpraktische  
 Ausbildung  
 Seit 2001 Österreichisches Jugendrotkreuz Generalsekretariat