

PW 10

Wechselstrom I:
Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes,
Transformator

Version vom 30. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes	1
1.1	Grundlagen	1
1.1.1	Begriffe	1
1.1.2	Allgemeines zur elektrischen Leitfähigkeit in Festkörpern und Flüssigkeiten	1
1.1.3	Flüssigkeiten	2
1.1.4	Festkörper	3
1.2	Aufgaben	8
1.3	Versuchsaufbau und Durchführung	8
1.4	Hinweise zu Protokoll und Fehlerrechnung	11
2	Transformator	12
2.1	Grundlagen	12
2.1.1	Begriffe	12
2.1.2	Beschreibung von Transformatoren	12
2.1.3	Unbelasteter Transformator	12
2.1.4	Belasteter Transformator	13
2.1.5	Realer Transformator	13
2.2	Aufgaben	14
2.3	Versuchsaufbau und Durchführung	15
2.4	Hinweise zur Protokollierung und Fehlerrechnung	16
3	Empfohlene Zusatzliteratur	16

Lehr/Lernziele

- Kenntnisse der Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Temperatur erwerben.
- Verstehen und Anwenden der mathematischen Modelle zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit elektrischer Widerstände.
- Verstehen und Anwenden diverser Messanordnungen und -schaltungen.
- Vertiefung des Wissens über die elektrischen Leitungsmechanismen in verschiedenen Leitern wie Halbleitern, Metallen und Elektrolyten.
- Überblick über die Eigenschaften von Halbleitern, insbesondere der Bedeutung der Bandlücke erwerben.

1 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

1.1 Grundlagen

1.1.1 Begriffe

Grundlagen der Halbleiterphysik (Bandlücke, Fermienergie, elektrische Leitfähigkeit), NTC, PTC, Temperaturabhängigkeit von Leitfähigkeit bzw. Widerstand, Elektrolyte, Anionen und Kationen, Dissoziation, Beweglichkeit von Ladungsträgern.

1.1.2 Allgemeines zur elektrischen Leitfähigkeit in Festkörpern und Flüssigkeiten

Die elektrischen Eigenschaften von Stoffen werden ganz wesentlich durch die Wirkung der in ihnen vorkommenden Elektronen bestimmt. Voraussetzung für das Fließen eines elektrischen Stromes ist in jedem Fall das Vorhandensein von frei beweglichen Ladungsträgern, also Ladungsträgern, die sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes innerhalb des Stoffes bewegen können.

Der Widerstand eines elektrischen Leiters ist von seinen Dimensionen und seiner elektronischen Beschaffenheit abhängig. Der ohmsche Widerstand R wird nach

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (1)$$

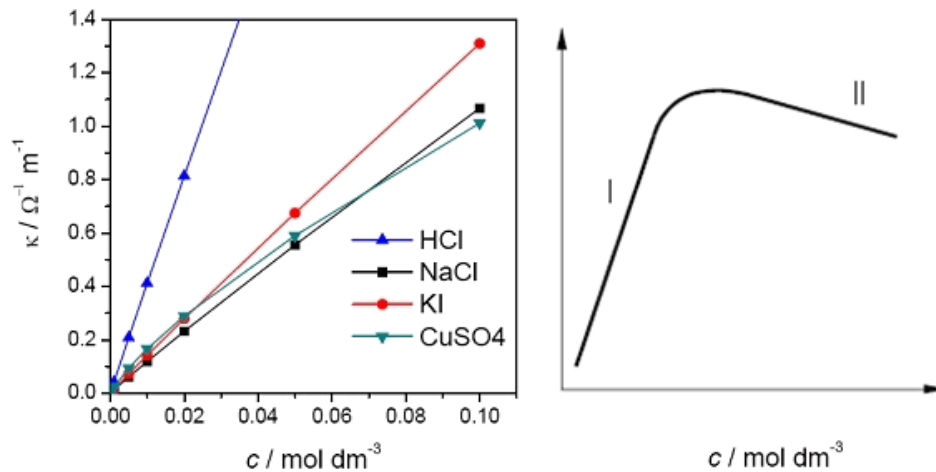


Abbildung 1: Prinzipieller Verlauf der Konzentrationsabhängigkeit der Leitfähigkeit (hier mit κ bezeichnet!) bei *konstanter* Temperatur.

berechnet, worin l die Länge, A der Querschnitt und ρ der *spezifische Widerstand* des Leiters sind. Gl. 1 gilt für „lange“ Proben, deren Längen wesentlich größer sind als die Querdimensionen. Bei komplizierteren Geometrien steht anstelle von l/A ein allgemeiner Geometriefaktor, den man bei Elektrolyten meist konventionell festlegt (siehe unten). Der *Leitwert* ist der Reziprokwert des Widerstandes. Dem spezifischen Widerstand ρ entspricht der spezifische Leitwert, auch *Leitfähigkeit* $\sigma = 1/\rho$ genannt. Die Maßeinheit der Leitfähigkeit ist S m^{-1} ($\text{S} = 1/\Omega = \text{Siemens}$). Allgemein gilt für die Leitfähigkeit:

$$\sigma = e_0 \cdot n \cdot \mu \quad (2)$$

e_0 steht für die *Elementarladung* (hier wird vorausgesetzt, dass die Ladungsträger 1-fach geladen sind), n für die *Ladungsträgerdichte* (= Anzahl pro Volumen) und μ für die *Beweglichkeit* der Ladungsträger. An Gleichung 2 sieht man, dass die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes bzw. der Leitfähigkeit dadurch zustande kommt, dass entweder μ oder n oder beide temperaturabhängig sind.

1.1.3 Flüssigkeiten

Gleichung 1 gilt auch für Elektrolytlösungen. Anstelle der Länge tritt hier die Entfernung der Elektroden, die man in cm angibt. Statt des Querschnitts setzt man die wirksame Elektrodenoberfläche in cm^2 ein.

In einem Elektrolyten ist eine Substanz (z.B. NaCl) gelöst, welche in negative Ionen (*Anionen*) und positive Ionen (*Kationen*) zerfällt (*Dissoziation*). Befindet sich ein z -fach geladenes Ion A^{z+} in einem elektrischen Feld, so findet eine Wanderung des geladenen Ions zur entgegengesetzt geladenen Elektrode statt. Anionen und Kationen driften in entgegengesetzte Richtungen. Somit hängt der Widerstand R von der bereits erwähnten Geometrie

der Messzelle, von der Art der Ionen (Größe, Ladung) und der *Konzentration* c des Elektrolyten ab. c bestimmt die Ladungsträgerdichte n in Gl. 2.

Abb. 1 zeigt die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von c (bei konstanter Temperatur!). Zunächst erwartet man, dass die Leitfähigkeit eines *starken* Elektrolyten¹ stetig mit der Ionenkonzentration zunimmt, siehe Abb. 1 links. Diese Erwartung wird nur für kleine Konzentrationen bestätigt (Bereich I in Abb. 1 rechtes Bild). Mit steigender Konzentration steigt nämlich auch die *gegenseitige Behinderung* der Ionen, die ein Sinken der Leitfähigkeit zur Folge hat (Bereich II in Abb. 1). Die sich ausbildenden Ionenwolken (Assoziante) führen zur Abschirmung von Ladungsträgern. Bei einem bestimmten Wert von c wird ein Maximum erreicht, wo sich beide Effekte gerade kompensieren. Danach tritt trotz Erhöhung von c eine *Abnahme* der Leitfähigkeit ein, da der Dissoziationsgrad abnimmt.

Die Leitfähigkeit σ einer Elektrolytlösung ist stark temperaturabhängig. Leitfähigkeitsdaten sind somit immer nur mit einer Temperaturangabe verwendbar und zwar ist sowohl der Dissoziationsgrad, als auch die Beweglichkeit der Ionen temperaturabhängig, was zu sehr unterschiedlichen Temperaturabhängigkeiten der Widerstandes führen kann. Wir beschränken uns hier auf kleine Konzentrationen c und starke Elektrolyten (siehe Abb. 1). In diesem Fall kann man von einer vollständigen Dissoziation ausgehen, daher ist n *nahezu unabhängig von der Temperatur*. Die Temperaturabhängigkeit von σ wird dann nur von der Beweglichkeit der Ionen μ bestimmt und diese hängt hauptsächlich von der Viskosität η der Flüssigkeit ab. η *sinkt* exponentiell mit steigender Temperatur:

$$\eta(T) = \eta_0 \cdot e^{\frac{E_A}{k_B \cdot T}} \quad (3)$$

wobei η_0 und E_A (*Aktivierungsenergie*, auch *Platzwechselenergie*) materialspezifische Konstanten darstellen. k_B ist die Boltzmannkonstante. Je kleiner η , desto größer μ , daher erwartet man aus Gl. 3, dass die Leitfähigkeit mit steigender Temperatur exponentiell *zunimmt* und $\rho = 1/\sigma$ exponentiell *abnimmt*. Bei gleichbleibender Geometrie der Flüssigkeitsprobe sollte man für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes R finden:

$$R(T) = R_0 \cdot e^{\frac{E_A}{k_B \cdot T}} \quad (4)$$

wobei R_0 eine empirische Konstante ist.

1.1.4 Festkörper

In Festkörpern, deren Atomrümpfe mehr oder weniger fest aneinander gebunden sind, können ganze Moleküle oder Atome nicht als Ladungsträger dienen. Hier sind es im All-

¹*Starke* Elektrolyte sind in Lösung vollständig dissoziiert, so dass die Konzentration der Ionen proportional zu der Konzentration des Elektrolyten ist. Dazu gehören ionische Verbindungen wie KCl, NaCl, MgCl₂, CuSO₄ etc. und starke Säuren wie H₂SO₄, HCl, HClO₄ u.a. Zu den *schwachen* Elektrolyten gehören schwache Säuren (z.B. Essigsäure), sowie schwache Basen (z.B. Ammoniak), die in Lösung nicht vollkommen dissoziiert sind.

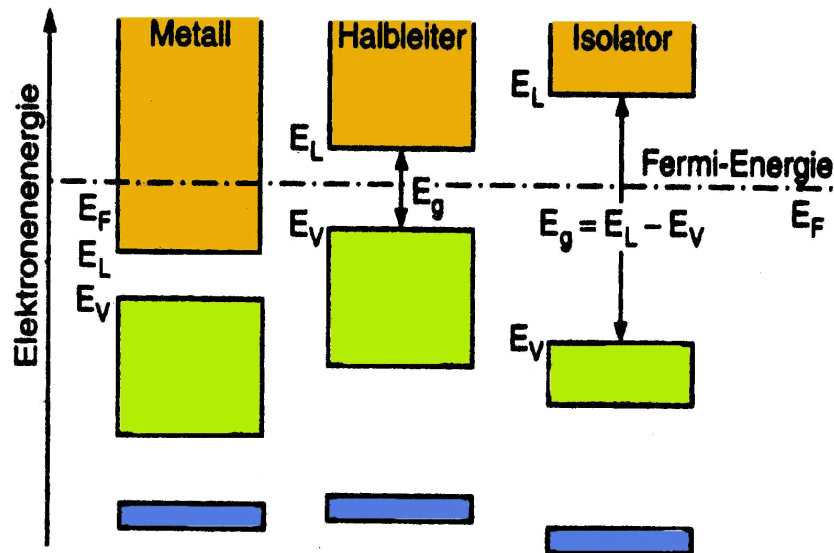


Abbildung 2: Energiediagramm zum Bändermodell

gemeinen Elektronen aus den Atomhüllen. Allerdings nicht alle Elektronen, sondern nur solche in bestimmten Zuständen - so genannte *Leitungselektronen*.

Elektronen können in einem Festkörper ebenso wie in einem Atom nur diskrete Energiewerte annehmen. Die Wechselwirkung der Elektronen in Festkörpern führt aber dazu, dass jedes Energieniveau in N Niveaus aufgespalten wird (N ist die Anzahl der Einzelatome im Festkörper), die mit $2N$ Elektronen besetzt werden können. Bedenkt man, dass sich in einem Festkörper von 1 cm^3 Größe etwa $N = 10^{22}$ Atome befinden, so ist evident, dass die Anzahl der möglichen Energieniveaus sehr groß und sie so dicht nebeneinander liegen, dass sie *quasi-kontinuierlich* erscheinen. Man spricht daher von *Energiebändern*.

Jeder Festkörper besitzt eine Vielzahl an Energiebändern, zwischen denen sich auch Zonen befinden, die keine erlaubten Energiezustände aufweisen, sogenannte *Energiebandlücken*, engl. *gaps*. Das oberste, von Elektronen (fast) vollständig besetzte Band nennt man *Valenzband*, das nächsthöhere das *Leitungsband*. Die Größe dieser Energiebandlücke E_g („g“ steht für „Gap“) zwischen Valenz- und Leitungsband ist charakteristisch für die elektrischen Eigenschaften des Materials.

Die Fermi-Energie E_F ist eine charakteristische Größe zur Beschreibung von *Fermi-Gasen* (z.B. Elektronen), einem quantenmechanischen Modell für Teilchen. Im Grundzustand $T = 0 \text{ K}$ sind alle Zustände bis zu E_F besetzt, darüber unbesetzt. Mit steigender Temperatur steigt die Besetzungswahrscheinlichkeit oberhalb von E_F und sinkt unterhalb von E_F .

Befindet sich E_F *innerhalb* eines Energiebandes, so können Elektronen bereits bei sehr kleinen Temperaturen $T \gtrsim 0 \text{ K}$ die winzigen Energieunterschiede zwischen besetzten und unbesetzten Energieniveaus überwinden. Liegt E_F innerhalb eines Gaps, so benötigen die Elektronen mindestens die Lücken-Energie (Gap-Energie) E_g , um in einen angeregten Zustand (in das Leitungsband) überzugehen.

In **Metallen** liegt E_F innerhalb eines Energiebandes (vgl. Abb. 2). Die Elektronen in der Nähe von E_F können sich schon im Grundzustand praktisch frei bewegen, da immer freie Energieniveaus in der Nähe vorhanden sind. Diese *Leitungselektronen*² sind *delokalisiert* und können mit Hilfe elektrischer Felder leicht innerhalb des Festkörpers verschoben werden. Darum nennt man die Leitungselektronen in Metallen auch *Elektronengas*.

Die Anzahl der Ladungsträger ist in Metallen über weite Temperaturbereiche konstant. Da aber bei steigender Temperatur die Atomrümpfe stärker schwingen, wird die Bewegung der Elektronen in Metallen stärker behindert und die Beweglichkeit μ sinkt. Folglich sinkt die Leitfähigkeit und der elektrische Widerstand $R(T)$ *steigt*. Metalle haben daher einen *positiven Temperaturkoeffizienten* (PTC - *positive temperature coefficient*) und man nennt sie deswegen auch *Kaltleiter*. Über weite Temperaturbereiche kann $R(T)$ mit einem Polynom höherer Ordnung beschrieben werden. In mittleren und höheren Temperaturbereichen verläuft er näherungsweise linear:

$$R(T) = R_{T_0}[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (5)$$

wobei T_0 eine Referenztemperatur innerhalb des betrachteten Temperaturbereiches ist und R_{T_0} der zugehörige Widerstand. Tabelle 1 zeigt ausgewählte Parameter einiger Metalle und Legierungen.

Tabelle 1: Leitfähigkeit und Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstands einiger Werkstoffe bei 20°C.

Material	Elektrische Leitfähigkeit σ ($\text{S m}^{-1} \times 10^6$)	Temperaturkoeffizient des spez. Widerstands α_{20} ($\text{K}^{-1} \times 10^{-3}$)
Silber	62.89	4.1
Kupfer	59.77	4.3
Gold	42.55	4.0
Aluminium	37.66	4.5
Molybdän	19.20	4.35
Wolfram	17.69	4.8
Nickel	14.60	6.8
Eisen	10.29	6.5
Platin	9.48	3.8
Blei	4.76	4.22
Konstantan	2.0	-0.035

Bei *sehr tiefen* Temperaturen sind die Gitterschwingungen eingefroren, die Elektronen werden nur noch am nicht perfekten Gitteraufbau, also an *Störstellen* gestreut (*was sind*

²Leitungselektronen sollten nicht mit *freien Elektronen* verwechselt werden, welche komplett von Atomen losgelöst existieren (z.B. β^- -Strahlung, Elektronenstrahlen in elektrischen Bauteilen,...).

die Störstellen in einem Metall?) und daher mündet die $R(T)$ -Kurve bei $T = 0$ K in den endlichen Restwiderstand R_0 .

Beachten Sie die Information zum Ladungstransport in Metallen in der Grundlagen-Vertiefung auf der eLearning Seite von PW10

In **Halbleitern** liegt E_F im Gap zwischen Valenz- und Leitungsband. Das Gap ist zwar schmal (siehe Abb. 2 und Tab. 2), aber immer noch groß gegenüber der thermischen Energie der Elektronen bei Zimmertemperatur (≈ 25 meV). Da die Energie der Elektronen jedoch statistisch verteilt ist, haben immer einige Elektronen genügend Energie, um - anschaulich formuliert - vom Valenzband ins Leitungsband zu gelangen. Für jedes Elektron, das ins Leitungsband gelangt, bleibt ein unbesetzter Energiezustand (*Loch*) im Valenzband zurück (*Paarbildung*). Löcher und Leitungselektronen tragen beide zur Leitfähigkeit bei. Je höher die Temperatur ist, desto mehr Elektronen befinden sich im Leitungsband und desto mehr Löcher befinden sich im Valenzband. Die Ladungsträgerdichte ist daher bei Halbleitern stark temperaturabhängig.

Tabelle 2: Energiebandlücken ausgewählter Materialien in eV.

Material	0 K	300 K
Diamant	5.4	5.46 - 6.4
Si	1.17	1.12
Ge	0.75	0.67
Se		1.74
InAs	0.43	0.355
GaAs	1.52	1.43
ZnO	3.436	3.37

Legt man an den Halbleiter eine äußere Spannung, so driften die Elektronen zur positiven Elektrode und die Löcher im Valenzband in die entgegengesetzte Richtung. Im Unterschied zu Metallen sind bei reinen Halbleitern *stets Elektronenstrom und Löcherstrom* am Leitungsvorgang beteiligt.³ Die Leitfähigkeit σ ergibt sich aus den Beweglichkeiten der Leitungselektronen μ^- und der Löcher μ^+ , sowie der intrinsischen Ladungsträgerdichte n_i (Dichte der Leitungselektronen bzw. Dichte der Löcher):

$$\sigma = e_0 n_i (\mu^- + \mu^+).$$

³Es sollte hier wie schon in PW 1 betont werden, dass der Ladungstransport des Elektronenstromes und des Löcherstromes in die gleiche Richtung erfolgt, eben *weil* die beiden Teilchenarten in entgegengesetzte Richtungen driften; das hat nichts mit einer technischen Konvention zu tun („technische Stromrichtung“), sondern ist eine logische Folge der entgegengesetzten Vorzeichen der Ladungen.

Aus der Fermi-Dirac-Statistik folgt

$$\sigma \propto n_i \propto e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}. \quad (6)$$

Die Ladungsträgerdichte steigt in Halbleitern also *exponentiell* mit der Temperatur an. Gl. 6 ist nur eine Näherung, die innerhalb gewisser Temperaturbereiche gilt. Die Energiebandlücke ist temperaturabhängig (siehe dazu Tab. 2).

Wie in jedem Festkörper nehmen μ^- und μ^+ mit steigender Temperatur *ab*. Bei Zimmertemperatur und darüber wird dieser Effekt allerdings durch die Zunahme von n_i bei weitem überkompensiert. Die elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern steigt dann exponentiell mit der Temperatur an, der Widerstand nimmt exponentiell ab - sie haben einen negativen Temperaturkoeffizienten (NTC - *negative temperature coefficient*), man nennt sie auch *Heißleiter*.

Wegen Gl. 6 kann $R(T)$ bei hohen Temperaturen mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden.

$$R(T) = R_{T_0} e^{-b\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)} \quad (7)$$

T_0 ist eine Referenztemperatur, R_{T_0} der Widerstand bei dieser Temperatur. Gl. 7 ist eine Näherungsformel, wobei T_0 als die untere Grenze eines interessierenden Temperaturbereiches zu verstehen ist, also für $T \geq T_0$. Nach Gl. 6 besteht zwischen dem Temperaturkoeffizienten b und der Lückenenergie E_g folgender Zusammenhang:

$$b = \frac{E_g}{2k_B} \quad (8)$$

Dieser Zusammenhang ist jedoch von vielen Parametern wie Gitterfehlstellen, Verunreinigungen etc. abhängig und kann daher nur als Abschätzung der Größenordnung verstanden werden. Tabelle 3 fasst die wichtigsten (nicht-trivialen) Parameter zusammen.

Tabelle 3: Wichtige Größen zur Beschreibung von Halbleitern

Formelzeichen	Einheit	Bezeichnung
b	K	Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes
E_g	J bzw. eV	Energiebandlücke
k_B	J/K bzw. eV/K	Boltzmannkonstante

Bei **Isolatoren** ist das Gap sehr breit, wie man in Abb. 2 erkennen kann. Es können praktisch keine Elektronen vom Valenzband ins Leitungsband gelangen.

1.2 Aufgaben

Hinweis: Für die Aufgaben 2 bis 4 beachten Sie unbedingt die Anweisungen im Abschnitt „Auswertung“ weiter unten!

1. Messen Sie die elektrischen Widerstände $R(T)$ eines Halbleiters, eines Metalles und eines Elektrolyten in Abhängigkeit von der Temperatur zwischen Zimmertemperatur und 80°C .
2. Tragen Sie $R(T)$ des Metalles mit Hilfe eines geeigneten Auswerteprogrammes wie z.B. QTIPlot grafisch auf und bestimmen Sie den Temperaturkoeffizienten α mittels eines Kurven-Fits (Regression). Wählen Sie dazu eine möglichst günstige grafische Auftragung. Um welches Metall könnte es sich handeln?
3. Führen Sie eine sinnvolle Auswertung an $R(T)$ des Halbleiters durch und bestimmen Sie die Breite der Bandlücke E_g des Halbleiters. Um welchen Halbleiter könnte es sich handeln?
4. Tragen Sie $R(T)$ des Elektrolyten grafisch auf und diskutieren Sie die Temperaturabhängigkeit. Verhält sich $R(T)$ so, wie man es aufgrund der Gleichung 4 erwarten kann? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Aktivierungsenergie E_A des Elektrolyten.

1.3 Versuchsaufbau und Durchführung

Sie können diese Messung *automatisch* (mittels CassyLab) oder *manuell* durchführen. Die Messanordnung ist in beiden Fällen die gleiche, nur dass die Spannungsmessungen entweder durch CassyLab oder durch Sie selbst mittels Multimetern durchgeführt wird.

Abb. 3 zeigt die Schaltung: die drei Proben sowie ein bekannter Widerstand R_0 (ca. $14\text{ k}\Omega$, genauen Wert mittels Ohmmeter selbst bestimmen!) werden in Serie geschaltet und die vier Spannungen werden gemessen. Die Proben befinden sich in einem Wasserbad, R_0 auf einem Steckbrett. Der Elektrolyt benötigt eine Wechselspannung, um Polarisierungseffekte an den Elektroden zu vermeiden; der Einfachheit halber werden auch die anderen Widerstände mit Wechselspannung gemessen. Hier wird mit einem 8-V-Transformator (siehe Abb. 4, 1) gearbeitet; die Frequenz ist die der Netzspannung (und zwar?). Das Wasserbad kann mittels Tauchsieder erhitzt werden. Nach dem Einstellen der Messparameter bei Zimmertemperatur werden die drei Proben auf 80°C erwärmt, dann die Heizung ausgeschaltet und während der Abkühlung bis auf ca. 30°C werden die Spannungen gemessen.

Automatische Messung

Für die Messung benötigen Sie 2 Sensor-Cassys, die kaskadiert (zusammengesteckt) sind. An den Eingängen A1, A2, B1 und B2 messen Sie die vier Spannungen. Konfigurieren Sie die Eingänge bei Zimmertemperatur: Effektivwerte (AC-Anteil) wählen, Messbereich

einstellen. Tipp dazu: wenn sich die Spannungen erwartungsgemäß verhalten, dann nehmen die Spannungen am Halbleiter und am Elektrolyten beim Aufheizen ab, die Spannung am Metall jedoch (ein wenig!) zu. Mit Hilfe dieser vier Spannungen und dem bekannten Widerstand können die drei Widerstände berechnet werden (Spannungsteilerformel!). Sie können das gleich in Cassy Lab machen ⁴ oder die Messwertetabelle in QTI (oder ähnliches Programm) importieren und dort die Berechnungen durchführen (empfohlen!).

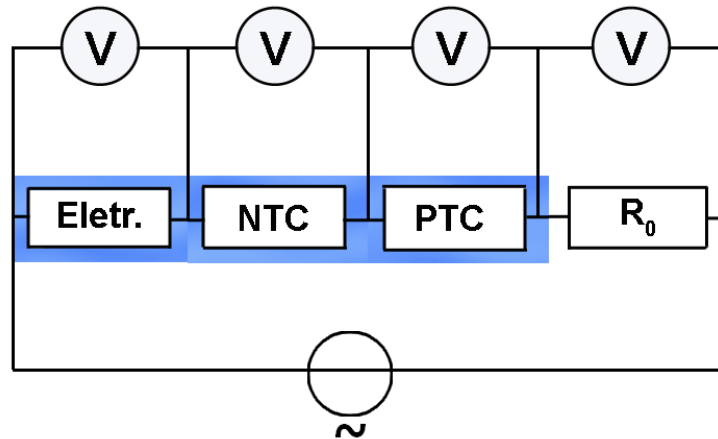


Abbildung 3: Schaltskizze zur Messung der temperaturabhängigen Widerstände eines Elektrolyten (Elektr.), eines Metalles (PTC) und eines Halbleiters (NTC).

Jetzt müssen Sie noch den Temperatursensor aktivieren. Für zumindest einen der vier Widerstände muss der Ablauf der Messung festgelegt werden (dieser gilt dann für alle gemessenen und errechneten Größen). Empfehlung: Messintervall 1 Messwert pro min, gesamte Messdauer 2 h. Optional können Sie eine automatische Stopp-Bedingung einrichten, welche die Messung einer gewünschten Temperatur beendet.

Bei „Darstellung“ (im Fenster „Einstellungen“) achten Sie darauf, dass *nur* entweder die vier Spannungen oder - falls Sie die Widerstände in Cassy ausrechnen lassen - die drei zu bestimmenden Widerstände *gegen die Temperatur* aufgetragen werden (auf die Darstellung des bekannten Widerstandes kann aus begrifflichen Gründen verzichtet werden).

Tipp: lesen Sie das Dokument „Erste Schritte mit Cassy Lab und ULAB“ auf der eLearning-Seite von PW10.

Für die weitere Durchführung lesen Sie beim Absatz *Temperaturregelung* weiter.

⁴ Dazu müssen Sie im „Rechner“ in den „Einstellungen“ für jeden Widerstand eine neue „Formel“ eingeben. Es empfiehlt sich, für die Darstellung einen Bereich von 0-1500 Ω und 2 Dezimalstellen zu wählen.

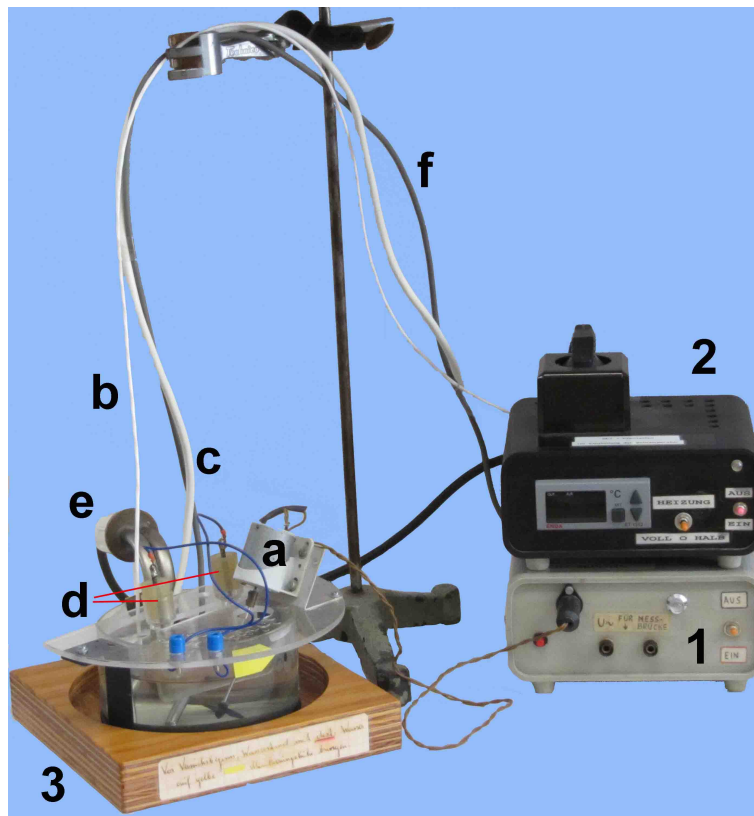


Abbildung 4: Die wichtigsten Geräte für die Messung der temperaturabhängigen Widerstände: 1. 8V~ Netzgerät, 2. Heizung, 3. Wasserbad mit (a) Rührwerk, (b) PTC, (c) NTC, (d) Elektrolyt, (e) Tauchsieder, (f) Temperaturmesser

Manuelle Messung

Wählen Sie die manuelle Messung, dann lesen Sie die vier Spannungen mittels Multimeter (Fluke 175 oder ähnliches Gerät) ab. Die Auswertung erfolgt dann in QTIPlot (bzw. einem anderen geeigneten Programm).

Temperaturregelung

Die drei zu messenden Widerstände befinden sich in einem Wasserbad (destilliertes Wasser verwenden), in Abb. 3 durch das blaue Kästchen dargestellt. Das Wasser wird mit einem Rührwerk (siehe Abb. 4, 3a) bewegt, um einen Temperaturgradienten innerhalb des Gefäßes so gut es geht zu vermeiden. Mittels Tauchsieder (siehe Abb. 4, 3e) wird das Wasser von Zimmertemperatur auf 80°C erhitzt. Dazu drücken Sie auf der Heizung (siehe Abb. 4, 2) die Set-Taste und halten diese gedrückt. Falls notwendig, stellen Sie 80°C ein. Dann stellen Sie die Heizleistung auf „halb“. Bei 80°C stoppt die Heizung (Erlöschen des roten Lämpchens). Überprüfen Sie, ob die Messbereiche auch bei dieser Temperatur noch passend sind und stellen Sie dann den Kippschalter auf „0“. Beginnen Sie die Messung. Bei der manuellen Messung lesen Sie die 4 Spannungen alle 5 °C ab.

Auswertung

Die Daten aus der Messwerttabelle in Cassy Lab können Sie mit Copy and Paste in jedes

beliebige Datenauswertungsprogramm übernehmen.

Der Widerstand eines Metalles (PTC) ist nach Formel 5 von der Referenztemperatur T_0 abhängig. Tabelle 1 bezieht sich auf $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Zur Auswertung Ihrer Daten sollten Sie daher folgendermaßen vorgehen: tragen Sie $R(T)$ gegen $(T - T_0)$, wobei Sie $T_0 = 20^\circ\text{C}$ setzen. Dadurch können Sie Ihre Ergebnisse mit Tabelle 1 vergleichen und „ersparen“ sich außerdem die Umrechnung der Temperatur in Kelvin (Temperaturdifferenzen sind auf beiden Skalen gleich). Ein linearer Fit ergibt direkt R_{T_0} und zusammen mit der Steigung erhält man dann α_{20} .

Auch die Lücken-Energie E_g des Halbleiters (NTC) bestimmt man aus dem Anstieg einer linearen Funktion. Dazu müssen Sie die betreffende Gleichung 7 in folgende Form bringen:

$$\ln \frac{R(T)}{R_{T_0}} = b \cdot \frac{1}{T} + d \quad (9)$$

Das konstante Glied d ist hier uninteressant, ebenso R_{T_0} - nehmen Sie dafür einfach den Wert des Widerstandes bei der niedrigsten Temperatur⁵. Tragen Sie also $\ln(R(T)/R_{T_0})$ gegen $1/T$ auf und bestimmen Sie aus einem linearen Fit die Steigung b . b hängt mit E_g gemäß Gl. 8 zusammen. Da E_g üblicherweise in eV angegeben wird, setzen Sie am besten den Wert der Boltzmannkonstanten k_B in entsprechenden Einheiten ein: $k_B = 8.616 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$, wobei gilt: $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Beim Elektrolyten verfahren Sie wie beim Halbleiter. Nach Gl. 4 sollte $\ln R(T)/R_0$ gegen $1/T$ eine Gerade mit der Steigung E_A/k_B ergeben; nehmen Sie für R_0 wieder den Wert bei der kleinsten Temperatur. Berechnen Sie E_A (dabei k_B in SI-Einheiten nehmen!). In einer wässrigen Lösung, welche Sie im Experiment verwendet haben, entspricht die Aktivierungsenergie der Energie der Wasserstoffbrückenbindung E_H : $E_A \approx E_H$. Für schwache Wasserstoffbrückenbindungen liegt E_H pro mol, also $E_H \cdot N_A$ (N_A ... Avogadro-Konstante), im Bereich zwischen 5 und 40 kJ/mol. Liegt Ihr Ergebnis in diesem Bereich?

1.4 Hinweise zu Protokoll und Fehlerrechnung

Vergessen Sie die Interpretation der Daten nicht. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten in Tab. 1 bzw. Tab. 2 – um welche Materialien könnte es sich handeln? Welche Fehlerquellen beeinflussen Ihre Messungen? Finden Sie Abweichungen vom theoretischen Verlauf, wie er in den Grundlagen beschrieben wurde? Beim Elektrolyten: ist die Temperaturabhängigkeit der Viskosität tatsächlich der bestimmende Faktor? Sind in dem untersuchten Elektrolyten schwache Wasserstoffbrückenbindungen vorhanden?

⁵ Die Division durch R_{T_0} ist aus physikalischen Gründen erforderlich, da der natürliche Logarithmus nur für eine *dimensionslose* Zahl definiert ist. Mathematiker kennen keine Dimensionen von Größen und kümmern sich um solche Überlegungen kaum.

2 Transformator

2.1 Grundlagen

2.1.1 Begriffe

Maxwell-Gleichungen, Induktion, Lenz'sche Regel, Impedanz, Transformatorverluste, Wirkleistung, Blindleistung, Magnetisierung, Leerlauf, Übersetzungsverhältnis, Vektordiagramm, Phasenwinkel, Transformatorgleichung.

2.1.2 Beschreibung von Transformatoren

Ein klassischer Transformator besteht aus zwei getrennten Spulen, die um den selben Eisenkern gewickelt sind. Eine Spannungsänderung an der Primärspule bewirkt auch eine Spannungsänderung an der Sekundärspule. Transformatoren werden deshalb häufig zur galvanischen Trennung eingesetzt. Andererseits können Transformatoren dazu eingesetzt werden um Spannungen zu transformieren. Durch die Verwendung des Eisenkerns wird erreicht, dass ein in einer der Spulen erzeugter magnetischer Fluss nahezu vollständig durch die andere Spule geführt wird. Dadurch wird die Streuung des Transformators, das heißt der Anteil des magnetischen Flusses, der nur jeweils eine Spule durchsetzt, gering gehalten.

2.1.3 Unbelasteter Transformator

Ein Transformator gilt als unbelastet, wenn an seiner Sekundärspule kein Verbraucher angeschlossen ist. Da beide Spulen um den selben Eisenkern gewickelt sind, spüren auch beide den selben magnetischen Fluss. Das Modell des idealen Transformators besteht aus zwei Spulen, die keinen ohmschen Widerstand besitzen. Legt man an den Transformator bzw. an die Primärspule mit n_1 Windungen eine Wechselspannung mit Amplitude U_1 an, so kompensiert die Spule diese durch Induktion einer entsprechenden Gegenspannung. Dadurch ändert sich der Fluss Φ im Eisenkern

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{U_1}{n_1}.$$

Diese Flussänderung erzeugt in der Sekundärspule der Induktivität L_2 mit n_2 Windungen eine Spannung $U_2 = -n_2 d\Phi/dt$, woraus folgt:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} = \ddot{u}. \quad (10)$$

\ddot{u} wird Übersetzungsverhältnis genannt. Ist $\ddot{u} < 1$, so wird die Spannung hinauftransformiert, ist $\ddot{u} > 1$, so wird sie hinuntertransformiert.

Der Strom $I_1(t)$, der durch die Primärspule fließt, induziert dort die Gegenspannung U_{ind} , die der Primärspannung $U_1(t)$ entgegen gerichtet ist (Lenz'sche Regel):

$$U_{ind} = -U_1(t) = -L_1 \frac{dI_1(t)}{dt};$$

mit dem Ansatz $I_1(t) = I_1 e^{i\omega t}$ erhält man

$$U_1(t) = i\omega L_1 I_1 e^{i\omega t} = \omega L_1 I_1 e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (11)$$

Zur Umformung wurde die Beziehung $e^{i\pi/2} = i$ verwendet. Da Stromstärke und Spannung um $\pi/2$ phasenverschoben sind (die Spannung eilt dem Strom voraus), fällt an der Primärspule keine Wirkleistung ab. Der Primärstrom ist im unbelasteten Transformator also ein *reiner Blindstrom*.

2.1.4 Belasteter Transformator

Wird an die Sekundärspule ein ohmscher Widerstand R geschaltet, dann fließt auf der Sekundärseite ein Strom $I_2(t)$, erzeugt durch das Magnetfeld aus der Primärspule

$$I_2(t) = \frac{U_2(t)}{R}.$$

Der Sekundärstrom $I_2(t)$ erzeugt in der Sekundärspule ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss, der dem Fluss in der Primärspule entgegengerichtet ist. Dies würde zu einer Verminderung der Primärspannung führen, welche jedoch durch die äußere Spannung konstant gehalten wird. Als Folge davon steigt der Primärstrom an. Nach dem Energiesatz muss die gesamte Leistung $P_2 = U_2^{\text{eff}} I_2^{\text{eff}} = P_1$ ⁶ aus der Primärseite kommen. Somit muss auf dieser Seite eine Phasenverschiebung φ entstehen

$$U_1^{\text{eff}} I_1^{\text{eff}} \cos \varphi = U_2^{\text{eff}} I_2^{\text{eff}}.$$

Aus Gl. 10 folgt

$$\frac{I_1^{\text{eff}}}{I_2^{\text{eff}}} \cos \varphi = \frac{n_2}{n_1}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass der *zusätzliche* Primärstrom ein *Wirkstrom* ist und daher der Wechselstromwiderstand der Primärspule im Fall der Belastung nicht mehr rein induktiv sein kann.

2.1.5 Realer Transformator

Hier müssen folgende Verlustquellen berücksichtigt werden:

⁶Die (messbare) effektive Spannung und Stromwerte sind mit dem Index *eff* markiert.

- **Ohm'sche Verluste**

Die Windungen eines Transformators bestehen aus Metall, welches einen Ohm'schen Widerstand besitzt. Daher entsteht Joule'sche Wärme. Durch Verwendung von Kupferleitungen mit großen Querschnitten versucht man diesen Effekt zu minimieren.

- **Wirbelströme**

Dadurch, dass ein Transformator mit Wechselstrom betrieben werden muss, bilden sich bei jeder Stromänderung in der Primärspule Wirbelfelder, die im Eisenkern Wirbelströme induzieren. Diese werden durch den ohmschen Widerstand des Materials zu Wärme. Man kann diese Verluste minimieren, indem man den Eisenkern in viele elektrisch getrennte Schichten zerlegt und so die Ausdehnung der Wirbelströme begrenzt. Die Querschnitte der Eisenbleche wirken jeweils als sekundäre Kurzschlusswindungen, wobei allerdings jedes Blech nur einen Teil des Flusses kurzschließt. Besteht der Kern aus N Blechen der Dicke d , dann ist die Spannung pro Blech $\propto d \propto 1/N$, der Widerstand $\propto 1/d \propto N$, die Leistung $\propto U^2/R$ also pro Blech $\propto N^{-3}$ und somit die Verlustleistung im ganzen Kern $\propto N^{-2}$. Es ist also wesentlich, eine feine Unterteilung zu verwenden.

- **Hysterese**

Alle ferromagnetischen Materialien haben ein Gedächtnis, d.h. wurden sie bereits einmal magnetisiert, so verschwindet die Magnetisierung nicht vollständig, wenn das Magnetfeld entfernt wird. Diese sogenannte Remanenz kann man durch Anlegen eines entsprechend starken Gegenfeldes beseitigen. Die Energie, die für die Magnetisierung aufgewendet werden muss, wird in Wärme umgewandelt. Dieser Effekt lässt sich durch die Wahl des Materials für den Kern beeinflussen.

- **Streifelder**

Der magnetische Fluss kann nie vollständig im Eisenkern gefangen werden, d.h., dass im Gegensatz zum idealen Transformator $\Phi_1 > \Phi_2$. Die Leistung der Primärspule wird nicht vollständig auf die Sekundärspule übertragen.

2.2 Aufgaben

1. Messen Sie am unbelasteten Transformator Primär- und Sekundärspannung, sowie den Primärstrom und bestimmen Sie das Spannungsübersetzungsverhältnis \ddot{u} .
2. Bestimmen Sie die Abhängigkeit des (i) Primärstroms $I_p = I_1^{\text{eff}}$ und (ii) der sekundären Klemmenspannung $U_s = U_2^{\text{eff}}$ von der Belastung. Diese sind beide in ein Diagramm einzutragen. Überlegen Sie, welche physikalische Größe die „Belastung“ sinnvoll charakterisiert. Welche Größe hat nur bei Belastung einen Wert > 0 ?
3. Die Primärinduktivität L_p ist zu berechnen, wobei angenommen wird, dass die Primärimpedanz rein induktiv ist. Wann ist das der Fall, wenn man vom Ohm'schen Widerstand der Primärspule absieht?

4. Eine Fehlerabschätzung ist für L_p durchzuführen. Wie gehen die Fehler der beiden Messgeräte in die Messung ein?

2.3 Versuchsaufbau und Durchführung

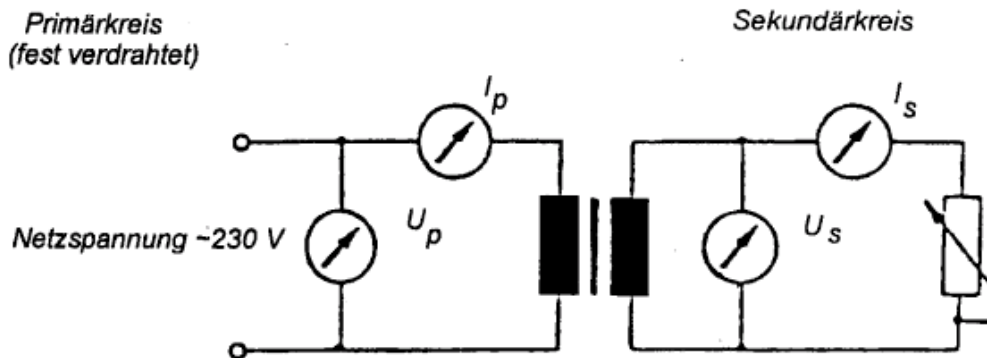


Abbildung 5: Versuchsanordnung zur Messung des Transformators.

Messprinzip:

Das Verhalten eines Transformators wird untersucht. Die charakteristischen Größen eines Transformators wie das Spannungsübersetzungsverhältnis, die Primärinduktivität, die Abhängigkeit des Primärstroms und der sekundären Klemmenspannung von der Belastung werden mit Hilfe von Digital-Multimetern gemessen.

Durchführung:

Abb. 5 zeigt das Schaltbild des Messaufbaues. Der Transformator ist in einem Gehäuse aus Aluminium und Plexiglas eingebaut (siehe dazu auch Abb. 6). Die Messgeräte auf der Primärseite (zwei schwarze Digitalmultimeter) sind fest verdrahtet. Benutzen Sie die beschrifteten Buchsen zum Aufbau der Schaltung auf der Sekundärseite. Der Ausgang wird mit dem entsprechenden Eingang am Schiebewiderstand verbunden, um die Belastung zu variieren. Sekundärstrom und Sekundärspannung werden mit zwei weiteren Digitalmultimetern gemessen.

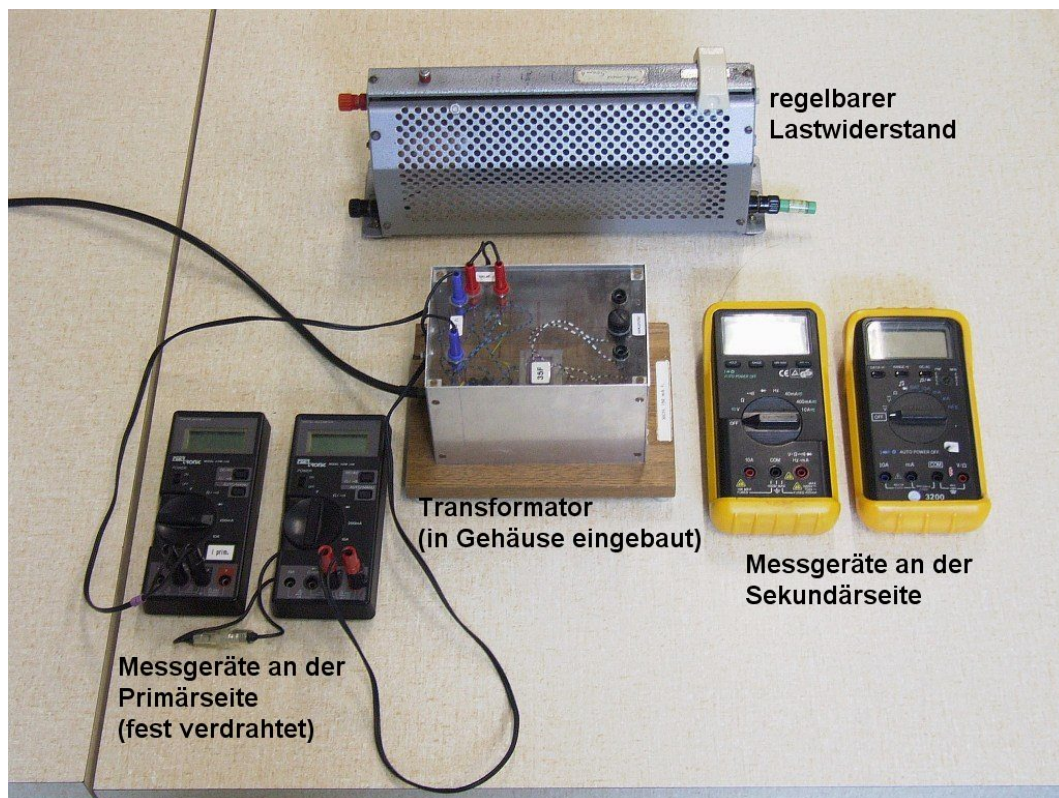


Abbildung 6: Geräte für die Transformator-Schaltung in Abb. 5. Die Multimeter sind nur als Beispiel gedacht; es können auch andere Typen eingesetzt werden.

2.4 Hinweise zur Protokollierung und Fehlerrechnung

Vergessen Sie die Interpretation der Daten nicht. Welche Fehlerquellen beeinflussen Ihre Messungen? Was können Sie über den Phasenwinkel eines unbelasteten Transformators sagen?

3 Empfohlene Zusatzliteratur

- Bergmann, Schäfer; **Elektromagnetismus**; DeGruyter
- Standardliteratur, siehe Praktikumsleitfaden für Studierende