M1, SS 2014, Übungen 11

Meist werden nur die ersten vier Probleme besprochen, die weiteren sind zum Selbststudium. Für Aufgaben, die nicht besprochen wurden, werden keine Kreuze angerechnet.

Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\Re z$ und $\Im z$ für den Realteil bzw. den Imaginärteil von z.

1. Finden Sie alle Werte von $(-i)^i := e^{i \log(-i)}$. Was ist der Wert im Falle des kanonischen Zweiges des Logarithmus?

2. Berechnen Sie $\int_\gamma \Im\, z\, dz$ entlang des Umfangs γ eines Quadrats mit den Eckpunkten (0,1,1+i,i) mittels expliziter Integration.

3. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{z-2-i}\, dz$ entlang der rechten Hälfte eines Kreises γ um $2+i$ mit Radius 1 mittels expliziter Integration sowie mittels Auffindens der Stammfunktion.

4. Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchy'schen Integralformel

   - $\oint_\gamma \frac{(cos\, z)^2}{2z-\pi} dz$, wenn γ ein Kreis um den Ursprung mit Radius 1 bzw. 2 ist,
   - $\oint_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz$, wenn γ ein Rechteck mit den Eckpunkten (-i,-i+1/2,i+1/2,i) bzw (-i,-i+2,i+2,i) ist.

5. **Rätsel**: $1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = i \cdot i = -1$??? Was ist falsch? Stellen Sie die Relationen richtig für drei verschiedene Wahlen des Zweiges des Logarithmus.

6. Drücken Sie cos 3θ mittels cos θ und sin θ unter Zuhilfenahme der de Moivre'schen Formel $(\cos(z) + i\sin(z))^n = \cos(nz) + i\sin(nz)$ aus.

7. Zeigen Sie, dass

   (a) $1, z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}$ für $z = e^{2\pi i/n}$ die n-ten Wurzeln von 1 darstellen.

   (b) die Summe aller n-ten Wurzeln von 1 verschwindet.

   (c) $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0$, wobei z eine der n-ten Wurzeln von 1 ist, allerdings jedoch $z \neq 1$ gelten soll.

8. (a) Überprüfen Sie durch Einsetzen in

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

daß

$$y(x) = -y_1(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_2(x')\, f(x')}{W(x')} \mathrm{d}x' + y_2(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1(x')\, f(x')}{W(x')} \mathrm{d}x'$$

eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist. Hierbei sind y_1 und y_2 linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $W(x)$ ist die Wronski-Determinante: $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

(b) Lösen Sie durch Verwenden der Formel für die Variation der Konstanten $y'' - y = cos\, x$, wobei $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(c) Finden Sie eine spezielle Lösung von $y'' - y = cos\, x$ mittels eines eigenen Ansatzes.

9. Lösen Sie $\cos z = 2$.

10. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\, dz$ entlang eines Kreises γ um den Mittelpunkt 1 mit Radius 1 mittels expliziter Integration (Hinweis: Partialbruchzerlegung).