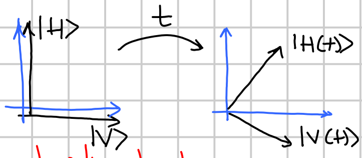
SCHRÖDINGER EVOLUTION

STUNDE 3

SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

Orthogonale Zustände bleiben orthogonal. In einem geschlossenen System wird das Skalarprodukt erhalten:



$$\langle\psi(t_0)|\varphi(t_0)\rangle = \langle\psi(t)|\varphi(t)\rangle$$

Maß für die Unterscheidbarkeit zweier Zustände

⇒ die Evolution ist durch Unitären Operatoren gegeben: $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$

Rotation im Hilbert-Raum

Man kann immer einen (Hermitschen) Operator $\hat{H}$ finden sodaß: $\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$ $\quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$

Schrödinger-Gleichung: $\dfrac{d|\psi(t,t_0)\rangle}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\right)|\psi(t_0)\rangle = -\dfrac{i}{\hbar}\hat{H}\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle}_{=|\psi(t,t_0)\rangle}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{d|\psi(t,t_0)\rangle}{dt} = \hat{H}\,|\psi(t,t_0)\rangle \quad (*)$$

$\hat{H} \equiv$ Hamilton Operator

STATIONÄRE LÖSUNG – Energie konstant (konservatives System)

$|\psi(t,t_0)\rangle \equiv f(t)\,|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{\text{in } (*)} i\hbar\dfrac{df(t)}{dt}|\psi(t_0)\rangle = f(t)\hat{H}|\psi(t_0)\rangle \Rightarrow i\hbar\dfrac{1}{f(t)}\dfrac{df(t)}{dt}|\psi(t_0)\rangle = \hat{H}|\psi(t_0)\rangle$

$i\hbar\dfrac{1}{f(t)}\dfrac{df(t)}{dt} = E = \text{const.}$ (Energiedimension)

muß eine Konstante sein, da rechte Seite nicht von t abhängt.

$\Rightarrow f(t) = c\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ Energieeigenwerte

Energieeigenzustände

$|\psi(t)\rangle = c\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|\psi(t_0)\rangle$ wenn $t=t_0$, dann $|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$

$\Downarrow$

$c = e^{+\frac{iEt_0}{\hbar}}$

$$\Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}}|\psi(t_0)\rangle$$

$\frac{E}{\hbar} \equiv \omega$ Kreisfrequenz

DAS FREIE TEILCHEN

$\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$, $\quad \hat{p} = i\hbar\vec{\nabla} \Rightarrow \hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \equiv -\dfrac{\hbar^2\Delta}{2m}$ $\qquad \nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

$k \equiv \frac{p}{\hbar}$ Wellenzahl

Stationäre Lösung: $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow -\dfrac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x) \overset{1\,\text{dim}}{\Rightarrow} -\dfrac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}}\dfrac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \dfrac{\cancel{\hbar^2}k^2}{\cancel{2m}}\psi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} - k^2\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \Rightarrow \psi(x) = A\,e^{i(kx-\omega t)} + B\,e^{-(kx+\omega t)}$

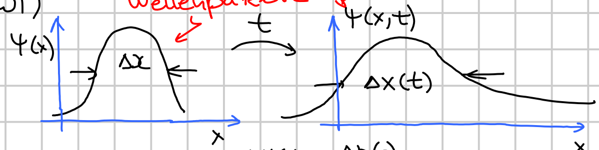
Ebene Welle

Allgemeine Lösung:

$\psi(x,0) = \displaystyle\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} dk\,\psi(k)\,e^{ikx} \xrightarrow{t} \psi(x,t) = \int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} dk\,\psi(x)\,e^{i(kx-\omega t)}$

wobei $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,0)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2dx = 1$

Wellenpakete



$\Delta x(t) \approx \dfrac{\Delta p(0)}{m}\cdot\Delta x(0)$