M1, SS 2014, Übungen 9

Meist werden nur die ersten vier Probleme besprochen, die weiteren sind zum Selbststudium. Für Aufgaben, die nicht besprochen wurden, werden keine Kreuze angerechnet.

1. Finde alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen, und drücke die Antwort in Polarform aus:
   (a) $z^2 - 1 + i = 0$
   (b) $z^6 = 1$
   (c) $z^6 + z^3 + 1 = 0$
   (d) $i + e^z = 0$
   (e) $\sinh z = 0$

2. Entscheide, ob die folgenden Funktionen holomorph sind, und wenn ja, bestimme den Holomorphiebereich (Definitionsbereich): $z \mapsto z$; $z \mapsto \overline{z}$; $z \mapsto |z|^2$; $z \mapsto \Re z$ (Realteil von z); $z \mapsto z^n \overline{z}^m$; für $n, m \in \mathbb{Z}$; $z \mapsto z^2 + 1$; $z \mapsto 1/(z^2+1)$; $z \mapsto \sinh^2(z^2)$; $z \mapsto \exp(z + \overline{z}^2)$.

3. Löse die folgende Anfangswertprobleme:
   (a) $\dot{x} + (x+1)t^2 = 0$, $x(0) = 4$;
   (b) $\dot{x} + \frac{x}{t+1} = 2 + 20t^2$, $x(1) = 9$;
   (c) $\dot{x} + x \sin t = \sin^3 t$, $x(0) = -4$;

4. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Löse die folgende Anfangswertprobleme:
   (a) $y'' + 3y' + 2y = e^{\lambda x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. [*Hinweis: Wenn λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann führt der Ansatz $y = ae^{\lambda x}$ zu einer partikulären Lösung. Wenn λ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann führt der Ansatz $y = axe^{\lambda x}$ zu einer partikulären Lösung. Wenn λ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann führt der Ansatz $y = ax^2e^{\lambda x}$ zu einer partikulären Lösung.*]
   (b) $y'' + 2y' + y = \cos(\lambda x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5. [Bernoullische Differentialgleichung]
   (a) Zeige, dass Gleichungen der Form
   $$y' + P(x)y = Q(x)y^a \ , \quad \mathbb{R} \ni a \neq 1 \ ,$$
   durch Einführung der neuen Variablen $z(x) = \big(y(x)\big)^{1-a}$ in eine lineare Form gebracht werden können.

(b) Löse die Gleichung $y' + y = xy^{\frac{2}{3}}$.

6. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

   (a) $\dot{x} + 2x = (1 - t^2)e^{-2t}$, $x(0) = 3$;

   (b) $\dot{x} - \frac{6x}{t^2-2t-8} = \frac{t}{t-4}$, $x(-1) = 1$.