

# Kapitel 6

## Interferenz: Oder warum unsere klassische Vorstellung versagt

*In diesem Kapitel folgen wir R. Feynman, der behauptete „The double slit contains the **only** mystery.“ und behandeln viele Fragestellungen und Experimente, die den so genannten Welle–Teilchen Dualismus beleuchten und stellen uns die Frage, inwieweit man die klassische Beschreibung mit der quantenmechanischen unter einen Hut bringen kann. Beziehungsweise welches klassische Konzept wir aufgeben müssen.*

### 6.1 Doppelspalt Experimente

*Wir analysieren zunächst ein Doppelspaltexperiment. Dann stellen wir uns die Frage, was passiert, falls zum Beispiel ein Spalt kleiner ist als der andere. Wird sich das Quantenteilchen jetzt wie eine Welle oder ein Teilchen benehmen? Dann betrachten wir eine Realisierung eines Experimentes mit Photonen.*

#### 6.1.1 Wahrscheinlichkeitanalyse eines Doppelspalts

Wir haben bereits erkannt, dass wir einem Zustand oder einer Wellenfunktion  $\psi$  eine statistische Deutung hinterlegen müssen. Bei Beugungsbildern oder Interferenzexperimenten werden i.A. Intensitäten, also Anzahl der Teilchen im Raumgebiet dividiert durch Gesamtzahl, gemessen. Wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, ob wir diese Phänomene im Teilchenbild auch verstehen können. Da man  $\psi(\vec{r}, t)$  als Wahrscheinlichkeitsamplitude deuten kann, haben wir zumindest die Möglichkeit, die Quantenteilchen als Teilchen im Sinne der klassischen Mechanik zu deuten, wobei deren Bewegung offenbar statistischen Gesetzen unterworfen ist.

Betrachten wir die folgenden 3 Gedankenexperiment:

Kapitel 6. Interferenz: Oder warum unsere klassische Vorstellung versagt

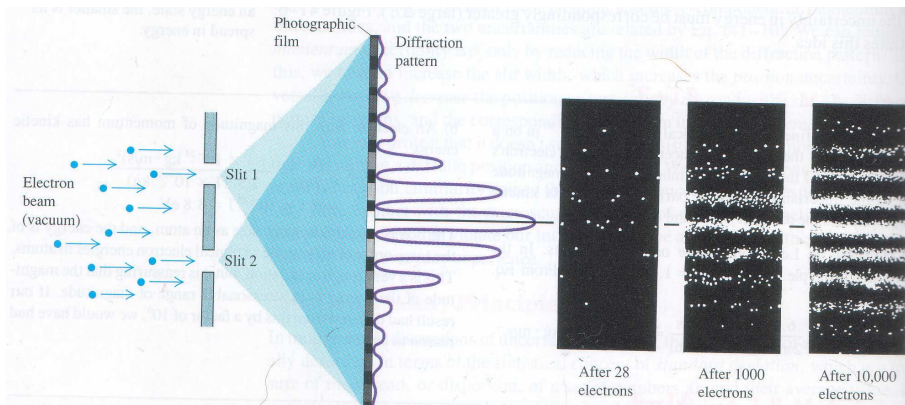
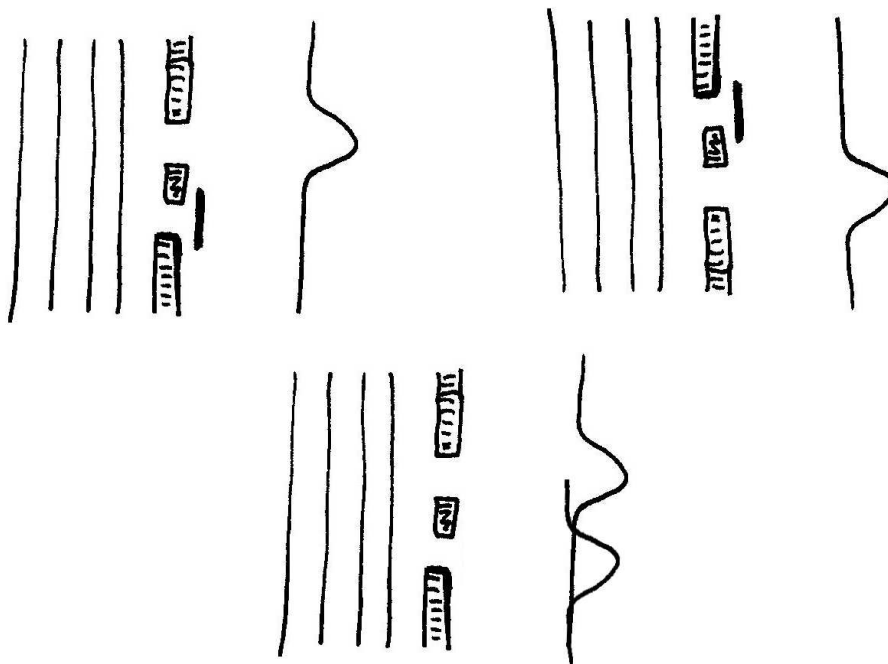
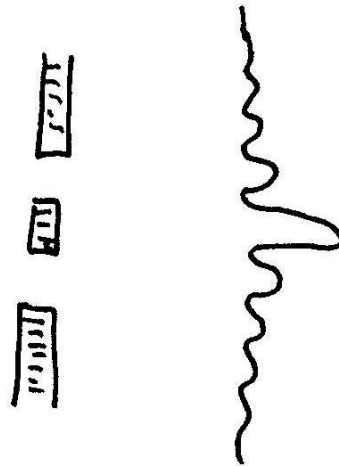


Abbildung 6.1: Man erkennt wie sich mit jedem Elektron mehr das Interferenzbild aufbaut.



Klassisch erwarten wir, dass beim Öffnen beider Spalte die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten auftritt. Im Experiment erhält man vielmehr:



Das „richtige“ Intensitätsmuster ergibt sich falls man die einzelnen Wahrscheinlichkeitsamplituden zuerst addiert und dann quadriert und nicht erst quadriert und dann summiert ( $y$ ... Position am Schirm):

$$\begin{aligned} I(y) &= |\mathcal{A}_1(y) + \mathcal{A}_2(y)|^2 \\ &\neq |\mathcal{A}_1(y)|^2 + |\mathcal{A}_2(y)|^2 . \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dies wollen wir im Folgenden genauer anschauen.

### 6.1.2 Eine informationstheoretische Analyse oder verhält sich das Quantenteilchen jetzt als Welle oder Teilchen?

Doppelspaltexperimente mit Elektronen, Neutronen oder Photonen führten zur Einführung der Welle–Teilchen Dualität. Abhängig von der experimentellen Anordnung verhält sich das Teilchen wie eine Welle oder wie ein Teilchen. Aber was passiert z.B. falls ein Spalt kleiner als der andere ist? Verhält es sich dann ein „bisschen“ wie ein Teilchen und ein „bisschen“ wie eine Welle? Was aber soll ein „bisschen“ heißen?

Wie hinreichend bekannt haben sich Einstein und Bohr ein heißes „Duell“ um die Interpretation des Doppelspaltexperimentes geliefert. Dabei hat Niels Bohr 1929 sein so genanntes Komplementaritätsprinzip formuliert (nicht Originalton):

*„Das Vorliegen präziser Kenntnisse oder Aussagen über einen spezifischen Aspekt eines Quantensystems macht es gleichzeitig unmöglich präzise Aussagen oder Kenntnisse über dazu komplementäre Aspekte zu machen.“*

Komplementäre physikalische Eigenschaften sind nicht unbedingt gegensätzliche Eigenschaften, sondern unterschiedliche Aspekte eines Ganzen, also eher so etwas wie

Kapitel 6. Interferenz: Oder warum unsere klassische Vorstellung versagt

zwei Seiten einer Münze. Das berühmteste Beispiel ist die Welle-Teilchen Dualität, dieses Konzept können wir so formulieren:

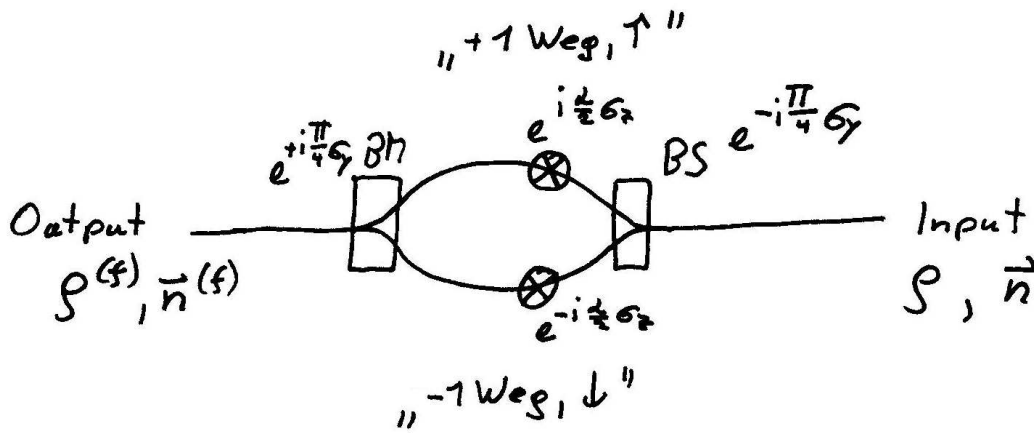
„Die Beobachtung eines Interferenzmusters und gleichzeitig der Wissenserwerb der vollen Welcher-Weg (Welcher Spalt) Information schließen sich gegenseitig aus.“

Die zwei Extremfälle haben wir bereits kennengelernt. Sind beide Spalte offen und gleich groß, können wir nicht sagen, durch welchen Spalt das Teilchen ging. Hingegen, ist ein Spalt geschlossen, dann wissen wir durch welchen Spalt es ging, hingegen bekommen wir keine Interferenz, keine Welleneigenschaft.

**Achtung:** Bohr's Komplementaritätsprinzip führt zur Heisenbergschen Unschärfere-lation, ist aber nicht mit ihr identisch, da diese den Zusammenhang der Messung zweier komplementären Größen in !!zwei!! verschiedenen Experimenten beschreibt.

Wir wollen das jetzt genauer untersuchen und dazu die elegante Betrachtung des Problems von Berthold-Georg Englert (Phys. Rev. Lett. 77, 2154 (1996)) die erst 1996 auf den Markt kam. Damit umschiffen wir „unnötige“Komplexität, die durch die Tatsache hereinkommt, dass Ort und Impuls kontinuierliche Größen sind.

Dazu betrachten wir nicht den klassischen Doppelspalt, sondern ein analoges Szenario ein Interferometer:



Das hat den Vorteil, dass wir nur mit einem Zweiteilchensystem (juhu, da kennen wir uns schon aus) rechnen müssen.

Wir schicken einen beliebigen Zustand in das Interferometer, dabei kann der Zustand auch gemischt sein, daher arbeiten wir im Dichteformalismus. Unseren beliebigen Zustand

$$\rho^{(i)} = \frac{1}{2} \{ \mathbb{1} + \vec{n}^{(i)} \cdot \vec{\sigma} \} \tag{6.2}$$

können wir also durch einen bestimmten Blochvektor  $\vec{n}^{(i)}$  beschreiben.

Als erstes wird der Strahl durch einen Beamsplitter in zwei Strahlen aufgeteilt. Diesen Effekt kann man durch den Operator

$$e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} - i\sigma_y), \quad (6.3)$$

also einer Rotation um  $90^\circ$  um die  $y$ -Achse beschreiben. Ein Beam-merger hingegen muss die Umkehrung sein, also

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + i\sigma_y). \quad (6.4)$$

Beides zusammen bildet natürlich einen Analysatorkreis bzw. die Einheit.

Nun wollen wir die zwei möglichen Wege unterschiedlich machen, dazu fügen wir eine Phasendifferenz ein. Nur aus praktischen Gründen machen wir das (anti-)symmetrisch in beiden Wegen. In der Praxis fügt man in einen Weg zum Beispiel ein Stück Materie oder Gas ein. Der Effekt kann dann durch den Operator

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z} = \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1} - i\sin\frac{\alpha}{2}\sigma_z, \quad (6.5)$$

beschrieben werden.

Damit können wir berechnen, welchen Zustand wir nach dem Interferometer erhalten:

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \rho e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_z} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y}. \quad (6.6)$$

Nach einer etwas (nicht sehr) langen Rechnung erhalten wir den folgenden Output Zustand:

$$\rho^{(f)} = \frac{1}{2}\{\mathbb{1} + \vec{n}^{(f)} \vec{\sigma}\} \quad (6.7)$$

mit

$$\vec{n}^{(f)} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \cos \alpha + n_z \sin \alpha \\ n_z \cos \alpha - n_y \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Nachdem das Quantenteilchen den Merger verlassen hat, wird auf  $|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_z)$  projiziert, wir erhalten also die Wahrscheinlichkeit

$$W(0|\rho^{(f)}) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_z) \rho^{(f)}\right) = \frac{1}{2}(1 + n_z \cos \alpha - n_y \sin \alpha) \quad (6.9)$$

oder falls wir auf  $|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z)$  die Wahrscheinlichkeit

$$W(1|\rho^{(f)}) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z) \rho^{(f)}\right) = \frac{1}{2}(1 - n_z \cos \alpha + n_y \sin \alpha). \quad (6.10)$$

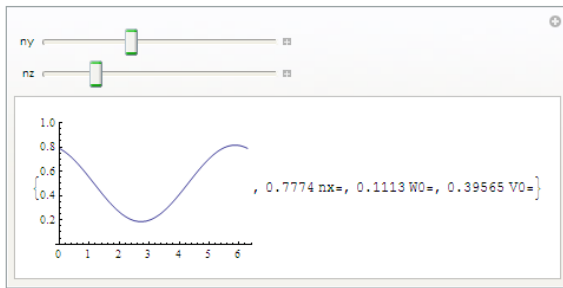
Einen Interferenzkontrast oder auch a priori **Visibility** genannt kann man durch

$$\mathcal{V} = \sqrt{(n_y^{(f)})^2 + (n_z^{(f)})^2} = \sqrt{(n_y)^2 + (n_z)^2} \quad (6.11)$$

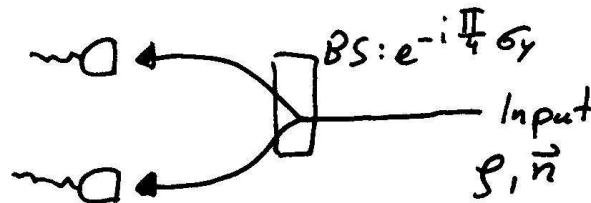
definieren. Die Visibility sagt aus, wie gut man im Interferenzmuster Minima von den Maxima unterscheiden kann, sie ist ein Mass für die Interferenzfähigkeit.

```
Manipulate[nx = Sqrt[1 - ny^2 - nz^2];
```

```
If[nx > 0, Plot[1/2 (1 - nz Cos[a] + ny Sin[a]), {a, 0, 2 Pi}, PlotRange -> {0, 1}], "nx=" nx, 1/2 - nx "W0=", "V0=" Evaluate[ny^2 + nz^2],
0, 0], {ny, -1, 1}, {nz, -1, 1}]
```



Wollen wir hingegen wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist ein Teilchen im oberen oder im unteren Weg zu finden, müssen wir ein anderes Experiment machen:



Der Zustand ist dann

$$\rho_o = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \rho e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \quad (6.12)$$

und die Wahrscheinlichkeiten ergeben

$$\begin{aligned} W(0|\rho_o) &= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_z) \rho_o\right) = \frac{1}{2}(1 + n_x) \\ W(1|\rho_o) &= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z) \rho_o\right) = \frac{1}{2}(1 - n_x) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Damit können wir eine **Predictability** als Differenz dieser zwei Wahrscheinlichkeiten definieren

$$\mathcal{P} = |W(0|\rho_o) - W(1|\rho_o)| = |n_x| . \quad (6.14)$$

Sie sagt aus, wie viel wir darüber wissen, welchen Weg das Teilchen genommen hat. Die Wahrscheinlichkeit den „richtigen“ Weg zu erraten ist also  $(1 + \mathcal{P})/2$ . Falls also  $\mathcal{P}$  finden wir mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  das Teilchen im oberen oder im unteren Weg.

Addieren wir mal die Quadrate der Größe, die die Teilcheneigenschaft beschreibt, und die Quadrate der Größe, die die Welleneigenschaft beschreibt :

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = (n_x^{(f)})^2 + (n_y^{(f)})^2 + (n_z^{(f)})^2 = |\vec{n}|^2 \quad (6.15)$$

Ahh, ist also der Blochvektor zum Quadrat. Wir wissen, dass dieser höchstens Länge 1 haben kann, damit haben wir Bohr's berühmtes Komplementaritätsprinzip quantifiziert:

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1 . \quad (6.16)$$

Für reine Zustände, also Zustände die sich auch als Zustandsvektoren darstellen lassen, ist die Länge des Blochvektors genau 1. Hierfür erkennen wir, dass die Gesamtinformation des Quantensystems zugänglich ist. Diese Information kann je nach experimenteller Realisierung entweder nur als Interferenz ( $\mathcal{V} = 1, \mathcal{P} = 0$ ) oder nur als Welcher Weg Information ( $\mathcal{V} = 0, \mathcal{P} = 1$ ) oder eben — wie in der oberen Formel beschrieben — teils teils! Die Art des Experimentes entscheidet, welcher „Aspekt“ der Wirklichkeit erscheint!

Was bedeutet das für gemischte Zustände? Hier kann man die Information wieder je nach Experiment als Wellen- oder Teilcheneigenschaft vorliegen haben. Allerdings fehlt je nach Stärke der Mischung „etwas“ Information und wie wir in Abschnitt 5.6 gesehen haben, ist das genau die klassische Unsicherheit des Zustandes!

### 6.1.3 Ein Doppelspalt-Experiment für Photonen

In der Regel sind Doppelspaltexperimente nicht analytisch berechenbar, daher betrachten wir eine kleine Abänderung, die einerseits zur Folge hat, dass sie analytisch berechenbar ist, andererseits physikalisch auch noch den Vorteil hat, dass man unterschiedliche Interferenzkontraste durch kontinuierliches Verschieben der Schirmposition einstellen kann. Die Physik all dieser Experimente ist jedenfalls die gleiche.

Ein einfacher Versuchsaufbau ist in Abbildung 6.2(a) dargestellt und der Arbeit von Bartell [9] entnommen. Ein Photon wird durch den Doppelspalt geschickt und anschließend über eine Linse auf einen Bildschirm abgebildet (Abbildung 6.2(a)). Der Schirm

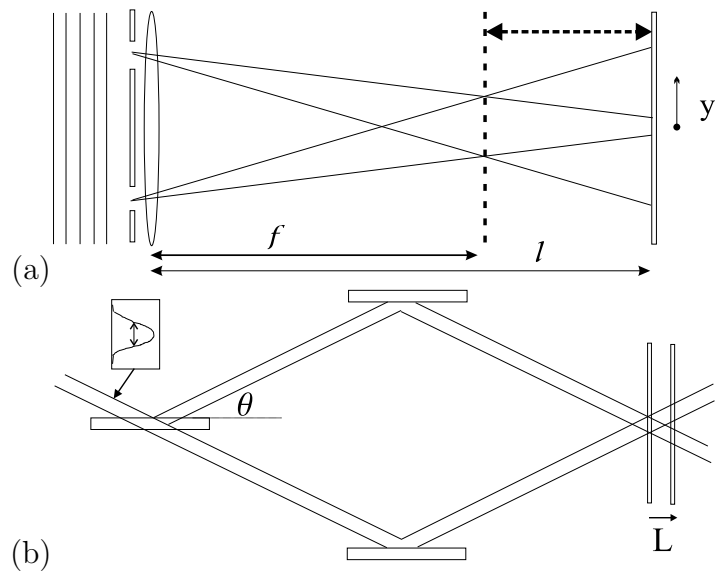


Abbildung 6.2: Abbildung (a) zeigt wie eine ebene Welle auf einen Doppelspalt trifft und dann mit Hilfe einer Linse direkt nach dem Doppelspalt auf einen Schirm abgebildet wird. In der Brennebene kommt es zur vollständigen Interferenz (siehe Abbildung 6.3(b)). Vor und nach der Brennebene sieht man eine (teilweise) Abbildung des Doppelspaltes. Abbildung (b) zeigt eine analoge Realisierung des Experimentes.



kann beliebig vor oder nach der Brennebene positioniert werden. Die Intensität ergibt sich durch die Addition der zwei Spalt-Amplituden

$$\begin{aligned} I_l(y) &= |\mathcal{A}_1(y) + \mathcal{A}_2(y)|^2 \\ &= |\mathcal{A}_1(y)|^2 + |\mathcal{A}_2(y)|^2 + 2\operatorname{Re}\{\mathcal{A}_1(y)^* \mathcal{A}_2(y)\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Hierbei ist  $y$  die Position am Schirm und  $\mathcal{A}_{1/2}$  ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude für Spalt 1/2.

Nimmt man für das obige Doppelspaltexperiment Gauß-Funktionen als Transmissionsfunktionen nach dem Spalt an und berücksichtigt das Zerfließen erhält man für die Amplituden die folgenden Gauß-Funktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(y) &\cong e^{-\frac{(y+\frac{d}{2}(1-\frac{l}{f}))^2}{\sigma_l^2}} \cdot e^{ik\frac{l^2}{x_0^2\sigma_l^2k^2}(l-\frac{d}{2l}y+y^2+\frac{d^2}{4l^2})} \propto e^{-\frac{(y+\frac{d}{2}(1-\frac{l}{f}))^2}{\sigma_l^2}} \cdot e^{-i\frac{dl}{2\sigma_l^2kx_0^2}y} \\ \mathcal{A}_2(y) &\cong e^{-\frac{(y-\frac{d}{2}(1-\frac{l}{f}))^2}{\sigma_l^2}} \cdot e^{ik\frac{l^2}{x_0^2\sigma_l^2k^2}(l+\frac{d}{2l}y+y^2+\frac{d^2}{4l^2})} \propto e^{-\frac{(y-\frac{d}{2}(1-\frac{l}{f}))^2}{\sigma_l^2}} \cdot e^{i\frac{dl}{2\sigma_l^2kx_0^2}y}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Hierbei ist  $d$  der Abstand der Spalte,  $l$  der Abstand Doppelspalt-Schirm,  $f$  die Brennweite der Linse und  $\sigma_l$  die Breite der Gauß-Funktion definiert durch

$$\sigma_l^2 = x_0^2\left(1 - \frac{l}{f}\right)^2 + \frac{l^2}{k^2x_0^2}, \quad (6.19)$$

wobei  $x_0$  die effektive Spaltbreite ist und  $k$  der Wellenzahlvektor der einfallenden ebenen Welle. Der erste Term entsteht durch die fokussierende Wirkung der Linse und der zweite Term durch das Zerfließen des Wellenpaketes. Dies geschieht bei jedem Wellenpaket aufgrund der Unschärfe des Ortes und des Impulses.

Nach kurzem Rechnen erhält man die folgende Intensität

$$I_l(y) = N \cdot e^{-\frac{d^2}{4\sigma_l^2}(1-\frac{l}{f})^2} e^{-\frac{y^2}{\sigma_l^2}} 2 \cosh(A_l y) \left\{ 1 + \frac{1}{\cosh(A_l y)} \cdot \cos(B_l y) \right\} \quad (6.20)$$

mit

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{d}{\sigma_l^2}\left(1 - \frac{l}{f}\right) \\ B_l &= \frac{ld}{kx_0^2\sigma_l^2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Bei realistischen Experimenten ist die Transmissionsfunktion nach einem Spalt eher durch eine Rechteckfunktion oder komplizierter gegeben. Dann muss man die Fourier-Integrale numerisch lösen.

In Abbildung 6.3 ist das Ergebnis der Intensitätsverteilung für die Positionen des Schirmes  $l = 0.1m$ ,  $l = f = 0.11m$  und  $l = 0.125m$  und die folgenden Werte gezeichnet:

$$\begin{aligned} k &= 10^{-7}m^{-1} \\ x_0 &= 10^{-4}m \\ d &= 3 \cdot 10^{-3}m \\ f &= 0.11m . \end{aligned} \tag{6.22}$$

Auch die Versuchsanordnung in Abbildung 6.2(b) würde zu den selben Ergebnissen führen.

Schauen wir uns nochmals das Ergebnis der Intensitätsverteilung an. Die Grundstruktur ist also:

$$I(y) = N \cdot f(y) \left\{ 1 + \frac{1}{\cosh(A_l y)} \cdot \cos(B_l y) \right\} , \tag{6.23}$$

wobei  $N$  die Normierung und  $f(y)$  eine für das spezielle Experiment charakteristische Funktion ist und  $A_l$  und  $B_l$  Konstanten. Am besten man normiert sich die obige Funktion entsprechend.

Der Term vor dem  $\cos$  ist der Streifenkontrast oder die Visibility

$$V(y) = \frac{1}{\cosh(A_l y)} . \tag{6.24}$$

Die Predictability können wir bestimmen, indem wir die Wahrscheinlichkeit, dass es durch einen Spalt geht

$$W_1(y) = |\mathcal{A}_1|^2 \tag{6.25}$$

von der Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen durch Spalt 2 geht

$$W_2(y) = |\mathcal{A}_2|^2 \tag{6.26}$$

bestimmen

$$\mathcal{P}(y) = |W_1(y) - W_2(y)| = |\tanh(A_l y)| . \tag{6.27}$$

Und siehe da, wir finden für alle Positionen  $y$  am Schirm wieder

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = \tanh^2(A_l y) + \frac{1}{\cosh^2(A_l y)} = 1 \tag{6.28}$$

und damit, dass Bohr's Komplementaritätsrelation exakt erfüllt ist (haben ja mit reinen Zuständen gearbeitet)!!

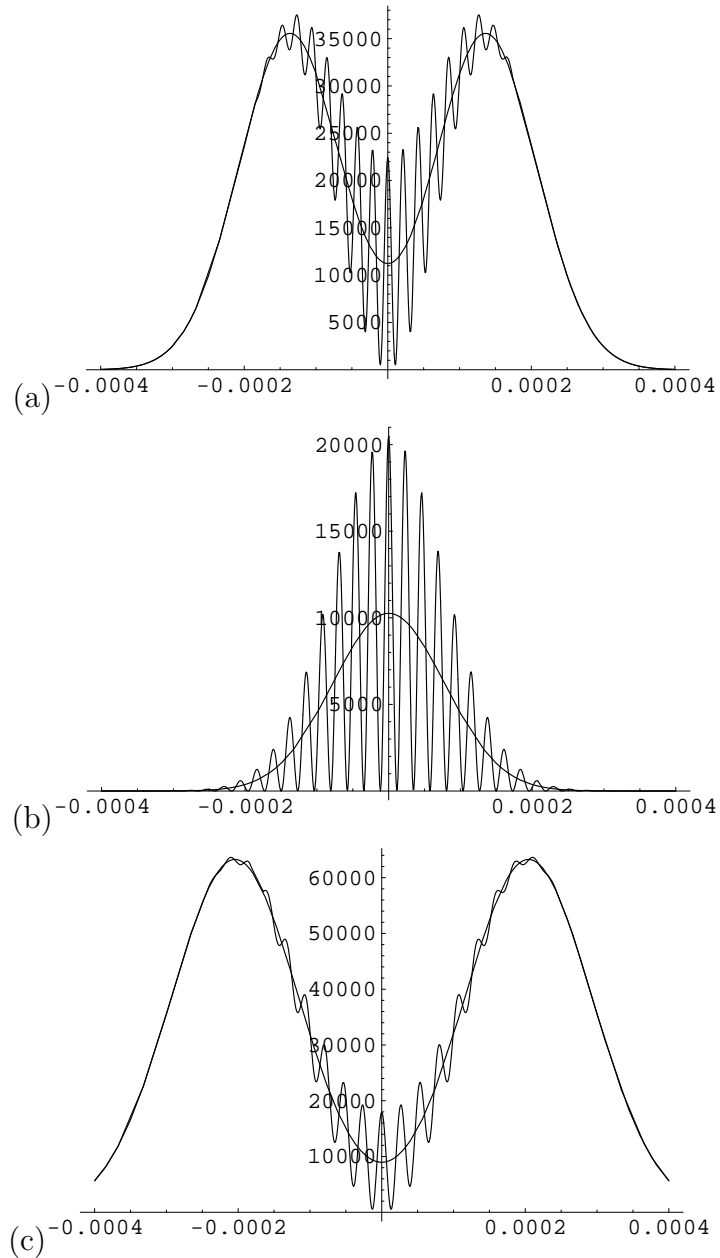


Abbildung 6.3: Hier sind die Ergebnisse für verschiedene Schirmpositionen  $l$  aufgelistet, wenn eine ebene Welle eine Versuchsanordnung, die in Abbildung 6.2(a) dargestellt ist, durchläuft. Im ersten Fall (a) ist die  $l = 0.1$  gewählt, im nächsten Fall ist  $l = f = 0.11$ , also in der Brennebene der Linse und im letzten Fall (c) ist  $l = 0.125$ .

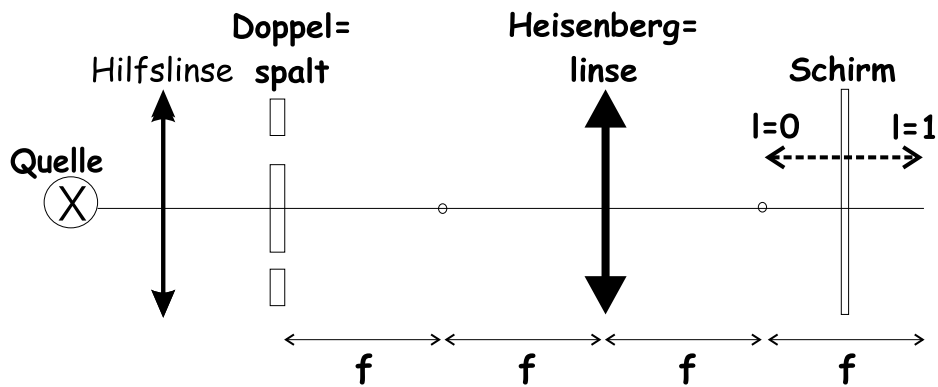


Abbildung 6.4: Eine ideale Punktquelle erzeugt durch die Hilfslinse eine ebene Welle. Diese wird an einem Doppelspalt gebrochen und trifft nach  $2$  Brennweiten  $f$  der Heisenberglinse auf eben diese Heisenberglinse. Der Schirm kann in der Entfernung  $f$  von der Heisenberglinse positioniert werden oder nach  $2f$ . Bei der ersten Einstellung  $l = 0$  erhält man ein perfektes Interferenzbild, bei der zweiten Einstellung  $l = 0$  erhält man ein Abbild des Doppelspaltes. Dieses Experiment wurde mit verschänkten Photonen durchgeführt, wobei das Paar in der Mitte von Doppelspalt und Linse erzeugt wurde und die Quelle durch einen Detektor ersetzt wird. Dabei geht das eine Photon erst durch den Doppelspalt und erst später entscheidet man für das zweite Photon ob der Schirm in der Brennweite oder in der Bildebene aufgestellt wird.

## 6.2 Die Entdeckung des Atomkerns und Interferenz

Hier folgen wir ein wenig der Geschichte der Entdeckung der Atomkerne und werden überraschenderweise erkennen, dass wir auch hier auf eine bekannte Erkenntnis stoßen.

### 6.2.1 Der Sturz des Rosinenkuchenatoms

Wie leer die uns umgebende Materie wirklich ist, zeigten Rutherford, Geiger und Marsden in den Jahren 1906 bis 1913 durch eines der vielleicht folgenschwersten Experimente der ganzen Physik. Jedenfalls leitete dieses Experiment eine neue Epoche der Physik ein. Sie ließen  $\alpha$  Teilchen durch eine dünne (wenige  $\mu\text{m}$ ) Goldfolie fliegen und bestimmten die Anzahl der Teilchen, die in ein bestimmtes Raumgebiet gestreut wurden, also die Häufigkeit in Abhängigkeit des Streuwinkles  $\theta$ .

Streuxperimente sind seither eines der wichtigsten Experimentiermethoden, um Aussagen über Objekte des Mikrokosmos zu erhalten, die ja nicht direkt zugänglich sind. Um aus den Daten Rückschlüsse über die Objekte zu erhalten, definierte Rutherford den totalen Streuquerschnitt, der auch totaler Wirkungsquerschnitt genannt wird, ( $E$  ist die Energie der einfallenden Teilchen)

$$\sigma(E) = \frac{\text{Anzahl der gestreuten Teilchen pro Sekunde}}{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen pro Sekunde und } \text{cm}^2} \quad (6.29)$$

Hier stellt der Wirkungsquerschnitt jene Verbindung zwischen Theorie und Experiment dar, die man ja auf allen Gebieten der Physik zu finden sucht; man kann diesen aus theoretischen Modellvorstellungen errechnen und mit dem Experiment vergleichen.

Was uns hier interessiert ist der so genannte differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega}, \quad (6.30)$$

d.h. die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes in Abhängigkeit des Streuwinkels (Ablenkwinkel) in den Raumwinkel  $d\Omega$  (für kugelsymmetrische Objekte):

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \int d\Omega \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cdot \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cdot \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Damit misst der differentielle Wirkungsquerschnitt die Anzahl der Teilchen, die pro einfallendem Teilchen in ein Raumwinkelgebiet  $d\Omega$  um die Richtung  $\phi, \theta$  gestreut werden. Für kugelsymmetrische Objekte ist nur  $\theta$  relevant.

Die zur Streuung führenden Kräfte (Coulomb Potential) sind entfernungsabhängig, daher ändert sich der Impaktparameter  $b$ , der Normalabstand der Bahn des einfallenden Teilchens von der Symmetrieachse durch das streuende Teilchen beschreibt, mit dem Winkel  $\theta$ . Ein Impaktparameterintervall  $(b - db, b)$  entspricht einem Kreisring im Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = 2\pi b db . \quad (6.32)$$

Differenziert man diesen nach  $\cos \theta$  erhält man

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} = 2\pi b \frac{db}{d(\cos \theta)} = -\frac{2\pi b}{\sin \theta} \cdot \frac{db}{d\theta} \quad (6.33)$$

und bei kugelsymmetrischen Objekten daher

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} = -\frac{b}{\sin \theta} \cdot \frac{db}{d\theta} \quad (6.34)$$

In L1 haben wir die verallgemeinerten Keplergesetze für das Gravitationspotential berechnet, hier haben wir es mit dem Coulombpotential zu tun, das mathematisch die gleiche Abhängigkeit zeigt. Aus diesem lässt sich dann die Abhängigkeit des Impaktparameters vom Streuwinkel berechnen

$$b(\theta) = \frac{q_1 q_2}{2E} \cdot \cot \frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{2E} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \quad (6.35)$$

mit  $q_1, q_2$  den Ladungen und  $E$  der Energie des einfallenden Teilchens. Damit haben wir den berühmten **Rutherford'schen Wirkungsquerschnitt** berechnet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2 \cdot \sin^4(\frac{\theta}{2})} , \quad (6.36)$$

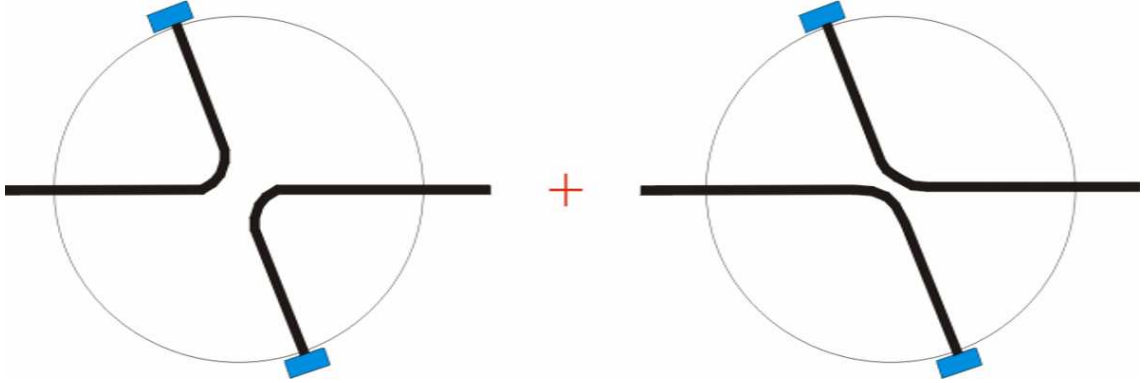
der eine  $\sin$  der vierten Abhängigkeit vom Streuwinkel vorhersagt.

Nach der klassischen Teilchenvorstellung und aufgrund des Thomsonschen Atommodells sollte ein  $\alpha$  Teilchen beim Durchdringen der Goldfolie entweder zwischen den Atomen durchfliegen (großer Impaktfaktor) oder sie durchdringen (würde nur einen kleinen Teil der positiven Abstoßung spüren). Auf alle Fälle hatte man nur kleine Streuwinkel erwartet!

Durch die Entdeckung des Atomkerns war das Thomsonsche Atommodell gestürzt und die Physik in eine tiefe Krise gestürzt, da man für das neue Atommodell (kleiner Kern, in dem die ganze positive Ladung vereint ist) weder die Symmetrie, noch die Stabilität und auch nicht das Spektrum erklären konnte!

### 6.2.2 Mott Streuung

Hier wollen wir die Rutherford Streuung zweier identischer Teilchen, z.B.  $\alpha$  Teilchen betrachten, die auch Mott Streuung genannt wird. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:



Da die Teilchen ununterscheidbar sein sollen, also sich z.B. auch nicht im Spin unterscheiden dürfen, müssen wir beide Wahrscheinlichkeitsamplituden (beide Wege, Möglichkeiten) addieren, um die Intensität (Wahrscheinlichkeit) zu erhalten

$$I(\theta) = |\mathcal{A}(\theta) + \mathcal{A}(\theta + \pi)|^2 . \quad (6.37)$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude zum Quadrat ist proportional zum differentiellen Streuquerschnitt

$$|\mathcal{A}(\theta)|^2 \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} . \quad (6.38)$$

Damit ergibt für das obige Experiment

$$\begin{aligned} I(\theta) &\sim \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \left| \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \pm e^{i\phi} \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta+\pi}{2})} \right|^2 \\ &\sim \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \left\{ \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} + \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta+\pi}{2})} + C^S 2 \cdot \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2}) \cdot \sin^2(\frac{\theta+\pi}{2})} \cos \phi \right\} . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Die Phase ergibt sich zu

$$\phi = \eta \ln\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) , \quad (6.40)$$

Kapitel 6. Interferenz: Oder warum unsere klassische Vorstellung versagt

wobei  $\eta$  der berühmte Sommerfeldparameter ist

$$\eta = \alpha \cdot \frac{q_1 q_2}{e^2} \sqrt{\frac{mc^2}{2E}} \tag{6.41}$$

und  $\alpha$  ist die Feinstrukturkonstante  $\alpha \sim \frac{1}{137}$  und  $C^S = \frac{(-1)^{2S}}{2S+1}$  der Spin Faktor. Man erhält also ein Plus vorm Interferenzterm, falls die streuenden Teilchen Bosonen sind, falls es Fermionen sind interferieren die Wahrscheinlichkeitsamplituden mit einem Minus.

Wir können das Wesentliche der obigen Formel auch kompakter hinschreiben, falls man die folgende Variablentransformation macht

$$e^x = \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \tag{6.42}$$

folgt

$$I(x) \sim \left\{ 1 + \frac{C^S}{\cosh x} \cos(\eta x) \right\} . \tag{6.43}$$

Dazu wurden zahlreiche Experimente gemacht, die diese Formel bestätigen, z.B. schon im Jahre 1961 (D.A. Bromley, J.A. Kuehner, and E. Almqvist, Phys. Rev. 123, 878 (1961))

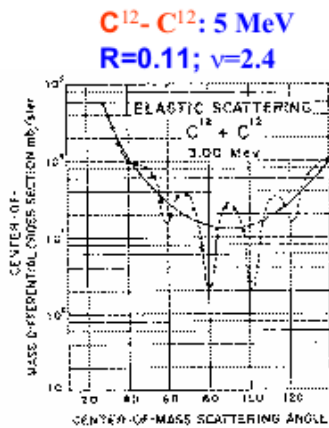


FIG. 7. Elastic scattering angular distribution for  $C^{12} + C^{12}$  at  $E_{cm} = 5.00$  Mev. The solid curve is the Rutherford prediction, the dashed curve is the Mott prediction. The spot distribution compares the statistical counting errors.

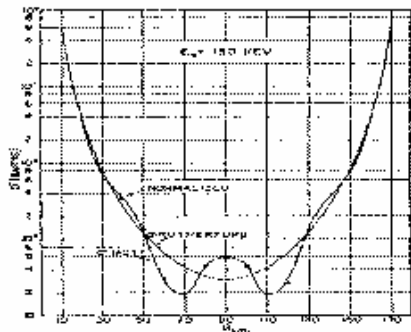


FIG. 8. Angular distribution of  $\alpha-\alpha$  scattering at 150 keV, center energy. Data are normalized at  $90^\circ$  to the Rutherford prediction. Differential cross sections in the plot appear with statistical errors in both known and unknown units. This represents the most detailed confirmation of absence of identity interference.

$\alpha-\alpha$ : 150 keV  
R=0.31; v=0.85

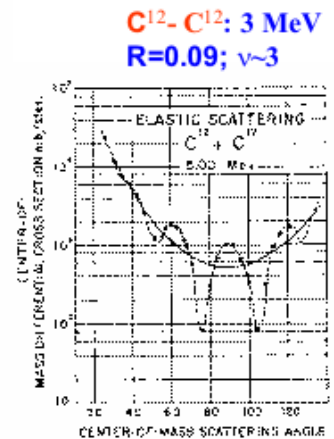


FIG. 9. Elastic scattering angular distribution for  $C^{12} + C^{12}$  at  $E_{cm} = 3.00$  Mev. See caption to Fig. 7.



Daraus sehen wir das die Visibility durch (siehe auch Bramon, Garbarino und Hiesmayr, Phys. Rev. A 69 (2004) 022112)

$$\mathcal{V}(x) = \frac{C^S}{\cosh(x)} \quad (6.44)$$

gegeben ist und die Predictability errechnet sich zu

$$\mathcal{P}(x) = \frac{2S + |\tanh(x)|}{2S + 1} . \quad (6.45)$$

Für  $S = 0$  oder für gleichen Spinzustand beider Streuteilchen folgt demnach

$$\mathcal{P}^2(x) + \mathcal{V}^2(x) = \frac{C^S}{\cosh(x)} + \tanh(x)^2 = 1 \quad (6.46)$$

und damit hat sich auch für diese Streuexperimente bestätigt, dass Bohr's Komplementaritätsprinzip funktioniert! (Mehr dazu in: “*Quantitative complementarity in two-path interferometry*” von A. Bramon, G. Garbarino and B.C. Hiesmayr, *Phys. Rev. A* **69**, 022112, 2004.)

Falls beide Streuteilchen unterschiedliche Spinzustände haben, kommt es zu keiner Interferenz, da man mindestens im Prinzip herausfinden könnte, welches Teilchen woher kam.

Damit haben wir auch wieder gesehen, dass bei ununterscheidbaren Möglichkeiten sich die Wahrscheinlichkeitsamplituden addieren und diese zur Interferenz führen können.

## 6.3 Ein Kaon – ein zerfallender Doppelspalt – stellt sich vor

*Hier werden wir ein Elementarteilchen kennen lernen, das ganz natürlich – so zu sagen von der Natur aus vorgegeben – einen Doppelspalt darstellt.*

### 6.3.1 Die vielen Seltsamkeiten der neutralen Kaonen

Gehen wir zurück in das Jahr 1947. Damals studierten Rochester und Butcher die kosmische Strahlung in Nebelkammern. Die aus dem Universum ununterbrochen auf uns einfallende Strahlung reagiert mit den in der Atmosphäre vorkommenden Atomen und erzeugen damit neue Teilchen und diese neuen Teilchen erzeugen wieder neue Teilchen, so dass ein richtiger Teilchenschauer entsteht.

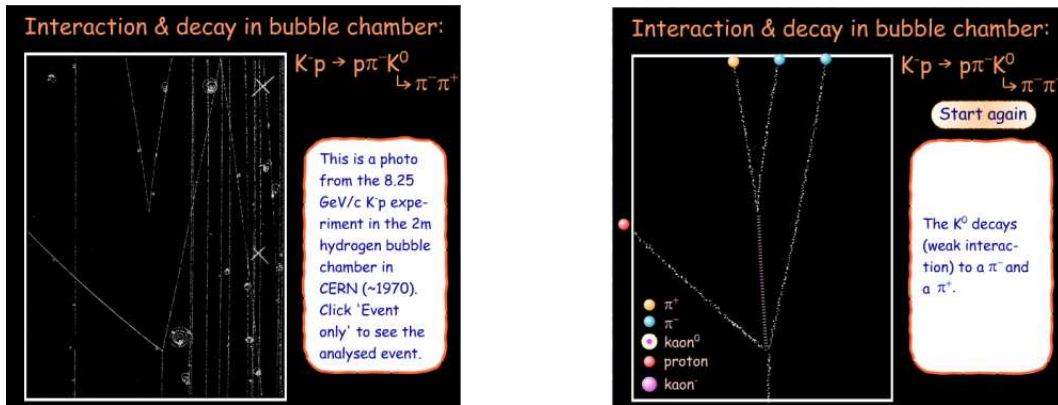


Abbildung 6.5: So sehen die Spuren neutraler Kaonen in der Nebelkammer aus.

Fliegen solche Teilchen durch eine mit Dampf gefüllte Kammer, so kondensieren die vorbeifliegenden Teilchen die Gasmoleküle, ihre Bahn wird sichtbar. Die Physiker fanden eine V-förmige Bahn, die sie als die Erzeugung von neuen schweren neutralen Teilchen deuteten. Im weiteren Studium fanden sie heraus, dass diese Teilchen sehr oft produziert wurden, sie also mit Materie sehr heftig interagieren. Das war aber sehr merkwürdig, weil sie eine sehr lange Lebensdauer hatten. Das war damals ein Rätsel für die Physiker und darum wurde wohl der Begriff 'seltsames' Teilchen geprägt.

Ich bin ein Anti-Kaon, dies kannst du an meinem Hut erkennen. Das bedeutet, dass ich die Strangeness  $-1$  habe, ohne Hut wäre ich ein Kaon und hätte Strangeness  $+1$ . Ich trage immer eine große Krawatte, denn ich bin eine Superposition von einem kurzlebigen Kaon und einem langlebigen Kaon. Und ich bin auch der Verursacher von einer kleinen, aber darum umso interessanteren  $CP$ -Verletzung.

Das Problem wurde von Gell-Mann und Nishijima 1953 gelöst. Sie führten eine neue Quantenzahl, die **Strangeness** (Seltsamkeit)

$$S = 2(Q - I_3 - \frac{B}{2}) \tag{6.47}$$

### 6.3. Ein Kaon – ein zerfallender Doppelspalt – stellt sich vor

ein. Hier ist  $Q$  die Ladungszahl, deren Verletzung in der Natur noch nicht beobachtet wurde.  $B$  steht für die Baryonenzahl, deren Verletzung auch noch nicht beobachtet wurde.  $I_3$  ist die dritte Komponente des Isospins, ein Konzept, das eingeführt wurde, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die starke Wechselwirkung nicht zwischen Protonen und Neutronen unterscheidet. Daher muss  $S$  erhalten sein für starke Wechselwirkung, hingegen für die schwache Wechselwirkung ist  $S$  verletzt, da auch  $I_3$ .

Mit dieser neuen Quantenzahl war es nun möglich zu erklären, warum manche Reaktionen beobachtet wurden, andere nicht und natürlich auch das obige Rätsel der großen Häufigkeit und langen Lebenszeit.

$S$	$I_3$	
	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
+1	$K^+$	$K^0$
-1	$\bar{K}^0$	$K^-$

Es gibt 4 verschiedene Kaonen; je 2 Kaonen mit Strangeness +1, das positive geladene Kaon und das neutrale Kaon und je 2 Kaonen mit Strangeness -1, das negative geladene Kaon und das neutrale Anti-Kaon.

Uns interessieren die neutralen Kaonen, also das Kaon und das Anti-Kaon. Ein Kaon kann folgende Reaktion vollführen:

$$\begin{array}{r}
 K^0 \quad + \quad p \quad \Rightarrow \quad n \quad + \quad K^+ \\
 S : \quad +1 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0 \quad + \quad 1.
 \end{array}$$

Ein Kaon mit einem Proton geht über in ein Neutron und ein positiv geladenes Kaon. Dieselbe Reaktion ist aber für ein Anti-Kaon verboten, ein Anti-Kaon und ein Proton kann nicht in ein Neutron plus ein positiv geladenes Kaon übergehen:

$$\begin{array}{r}
 \bar{K}^0 \quad + \quad p \quad \not\Rightarrow \quad n \quad + \quad K^+ \\
 S : \quad -1 \quad + \quad 0 \quad \neq \quad 0 \quad + \quad 1.
 \end{array}$$

D.h. bei starken Reaktionen ist die Strangeness erhalten, rechts und links steht in Summe die gleiche Strangenesszahl.

Der Zerfall der neutralen Kaonen ist ein schwacher Prozess. Die schwache Wechselwirkung erhält nicht die Strangenesszahl, dadurch können Kaonen in Teilchen zerfallen, die keine Strangeness haben.

Betrachten wir einen Kaonenstrahl, bestehend aus vielen Kaonen und Anti-Kaonen, dann werden wir nach einer kurzen Zeit  $\approx 10^{-10}s$  den Zerfall in zwei Pionen beobachten. Dann geschieht lange Zeit nichts und erst nach  $\approx 10^{-8}s$  beobachten wir den Zerfall des restlichen Kaonenstrahls in drei Pionen.

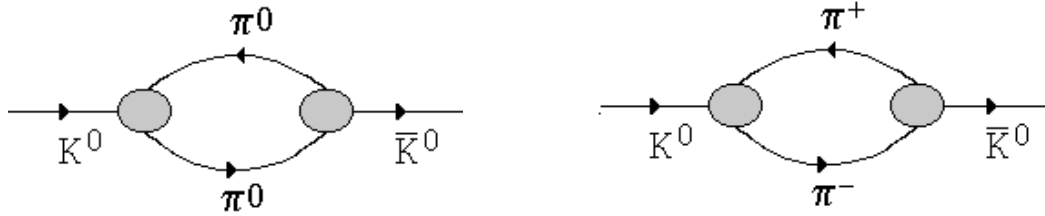


Abbildung 6.6: Ein Kaon wandelt sich in ein Anti-Kaon um, dargestellt durch einen Feynman-Graph.

Das führt zu dem Schluss, dass ein Kaon aus einer Superposition aus einem kurzlebigen Kaon  $|K_S\rangle$  und aus einem langlebigen Kaon  $|K_L\rangle$  besteht - analog zu Schrödingers Katze, die als Superposition von einer lebenden und einer toten Katze aufgefasst werden muss - oder in Formeln:

$$\begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K_1\rangle + \varepsilon|K_2\rangle\} = \frac{N}{2p}\{|K_S\rangle + |K_L\rangle\} \\ |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\varepsilon|K_1\rangle + |K_2\rangle\} = \frac{N}{2q}\{-|K_S\rangle + |K_L\rangle\} \end{aligned} \quad (6.48)$$

mit  $p = 1 - \varepsilon, q = 1 + \varepsilon$  und  $N^2 = |p|^2 + |q|^2$ .  $|\varepsilon| = 10^{-3}$  ist der  $\mathcal{CP}$  verletzende Parameter und  $K_{1/2}$  sind die  $\mathcal{CP}$  Eigenzustände.

Wir können den Spieß natürlich umdrehen und fragen, wie ein kurzlebiges Kaon  $|K_S\rangle$  sich aus den Strangeness-Eigenzuständen, also Kaon und Anti-Kaon, zusammensetzt. Dies ist eine einfache mathematische Rechnung und folgt aus obigen Formeln:

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{N}\{p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle\} \\ |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle\}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Im Folgende können wir die sehr kleinen Effekte der  $\mathcal{CP}$  Verletzung, des Unterschieds zwischen einer Welt und einer Antiwelt, vernachlässigen.

Die Zeitentwicklung erhält man wie üblich in der Quantentheorie durch die Schrödingergleichung. Kaonen müssen aufgrund der Strangeness-Oszillation als Zweizustandssystem beschrieben werden, daher muss man eine effektive Schrödingergleichung lösen. Die Zeitentwicklung für die *Lifetime*-Zustände errechnen sich zu

$$\begin{aligned} |K_S(t)\rangle &= e^{-i\lambda_S t} |K_S\rangle \\ |K_L(t)\rangle &= e^{-i\lambda_L t} |K_L\rangle \end{aligned} \quad (6.50)$$

wobei  $\lambda_{S,L} = m_{S,L} + \frac{i}{2}\Gamma_{S,L}$ . Hierbei sind  $m_{S,L}$  die Massen des kurzlebigen und des langlebigen Zustandes und  $\Gamma_{S,L}$  die Zerfallsbreiten dieser Zustände.

Durch die Beobachtung, dass sowohl Kaonen als auch Anti-Kaonen in zwei Pionen zerfallen

$$\begin{aligned} K^0 &\Rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, \\ \bar{K}^0 &\Rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0. \end{aligned} \quad (6.51)$$

war den Physikern klar, dass der Zerfallsprozess des Kaons und des Anti-Kaons nicht getrennt von einander beobachtet werden kann. Ein Kaon kann sich in ein Anti-Kaon und umgekehrt umwandeln. Dies kann man sich wie in Abbildung 6.6 dargestellt vorstellen: ein Kaon geht in zwei virtuelle Pionen über, die sich anschließend wieder vereinigen und zwar zu einem Anti-Kaon. Dies ist ein so genannter Feynman-Graph.

Hat man also zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein Kaon, dann kann man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu einem späteren Zeitpunkt  $t$  ein Anti-Kaon finden. Dieses Phänomen nennt man Strangeness-Oszillation. Diese Wahrscheinlichkeit werden wir nun berechnen.

### 6.3.2 Die Strangeness Interferenz

Richard Feynman's Statement „*the double slit contains the only mystery*“ ist berühmt, aber sein Statement über Kaonen ist nicht weniger treffend „*If there is any place where we have a chance to test the main principles of quantum mechanics in the purest way — does the superposition of amplitudes work or doesn't it? — this is it.*“ [8].

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-im_L t - \frac{\Gamma_L}{2} t} \left\{ e^{i\Delta m t + \frac{\Delta\Gamma}{2} t} |K_S\rangle + |K_L\rangle \right\}, \quad (6.52)$$

$$\Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_S < 0$$

$$|K^0(t)\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2 \cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2} t)}} e^{-\frac{\Delta\Gamma}{4} t} \left\{ e^{i\Delta m t + \frac{\Delta\Gamma}{2} t} |K_S\rangle + |K_L\rangle \right\}. \quad (6.53)$$

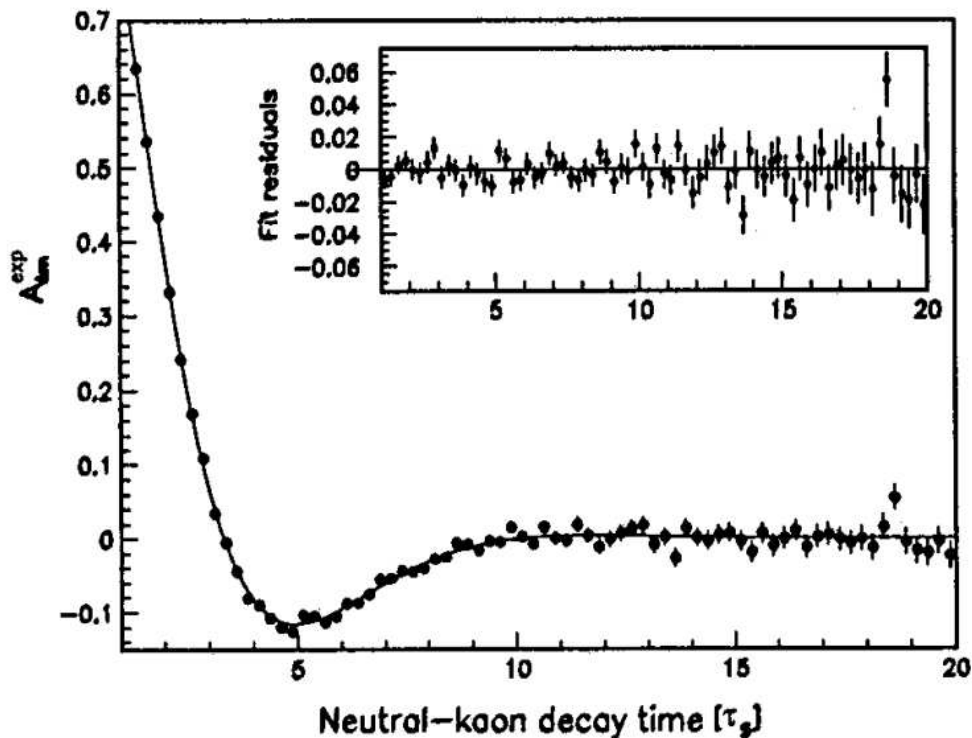
Dieser Zustand (6.53) kann folgendermaßen interpretiert werden: Die zwei Lifetime Zustände  $|K_S\rangle, |K_L\rangle$  stellen zwei Spalte dar. Bei der Zeit  $t = 0$  haben beide Spalte gleiche Breite. Mit fortschreitender Zeit wird der eine Spalt im Vergleich zum anderen kleiner.

Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten für den Fall, dass wir ein  $K^0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  erzeugt haben und zum Zeitpunkt  $t$  ein  $K^0$  oder ein  $\bar{K}^0$  erhalten:

$$\begin{aligned}
 P(K^0 t, |K^0\rangle) &= |\langle K^0 | K^0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\cos(\Delta m t)}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2} t)} \right\} \\
 P(\bar{K}^0 t, |K^0\rangle) &= |\langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\cos(\Delta m t)}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2} t)} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{6.54}$$

Hier erkennen wir die Interferenz der Kaonen, die auch im Experiment gemessen wurde:

*A. Angelopoulos et al. / Physics Reports 374 (2003) 165–270*



Aber funktioniert Bohr's Komplementaritätsprinzip auch hier?

Aus den obigen Formeln erkennen wir die Visibility

$$\mathcal{V}(t) = \frac{1}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2}t)}. \quad (6.55)$$

Die Predictability errechnen sich zu

$$\mathcal{P}(t) = |P(K_{St}, |K^0\rangle) - P(K_{Lt}, |K^0\rangle)| = |\tanh(\frac{\Delta\Gamma}{2}t)|. \quad (6.56)$$

Und damit erkennen wir, dass Bohr's Komplementaritätsprinzip auch für das neutrale Kaonensystem gilt! (Mehr dazu in: "Quantitative complementarity in two-path interferometry" von A. Bramon, G. Garbarino and B.C. Hiesmayr, *Phys. Rev. A* **69**, 022112, 2004.)

## 6.4 Warum sehen wir keine Quanteneffekte im Alltag?

Die Antwort auf diese Frage kennt man nicht, sie ist Gegenstand aktueller Forschung. Es gibt nur Lösungsansätze.

Zum Beispiel versucht Markus Arndt et al. (Universität Wien) in ihren Experimenten, u.a. zu zeigen, ob es eine fundamentale Grenze für die Kohärenz von de Broglie-Wellen gibt. D.h. er versucht, immer größere Objekte durch einen Doppelspalt (ein Gitter) zu schicken. Dabei war er bereits mit sehr großen komplexen Molekülen, im Detail mit Fullerenen („Fußbälle“ aus 60 Kohlenstoff-Molekülen), erfolgreich, d.h. auch diese Moleküle zeigen Interferenz, siehe Fig. 6.7 und Fig. 6.8. Ob es eine Grenze gibt oder nicht, ist eine völlig offene Frage. Offensichtlich ist das einfache Größenargument nicht richtig.

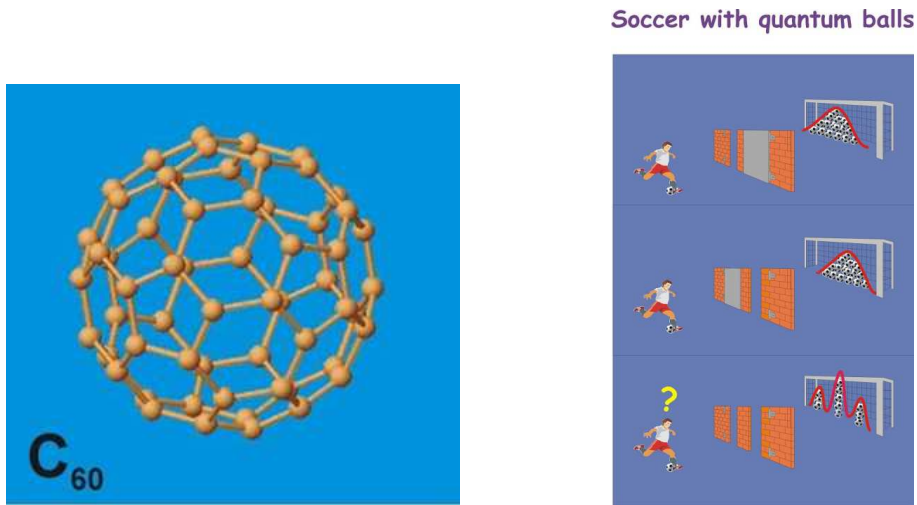


Abbildung 6.7: So sieht ein Quantenfußball aus.

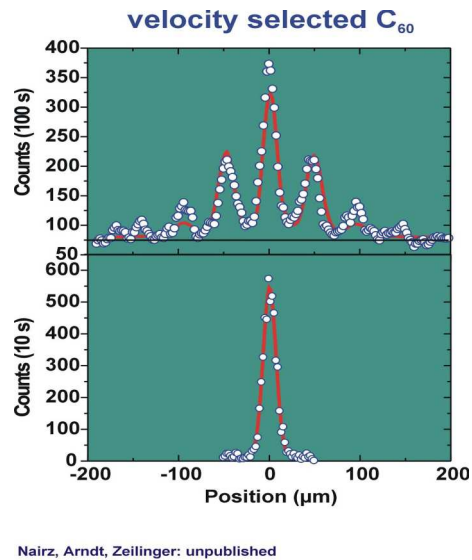
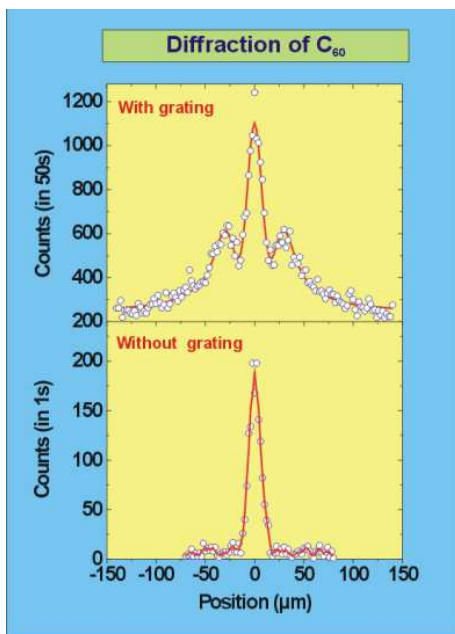


Abbildung 6.8: Hier ist das gemessene Interferenzmuster für Fullerene vor und nach der Geschwindigkeitsselektion dargestellt.