M1, SS 2014, Übungen 5 version 2

1. Betrachte die Matrix A von Übungsblatt 4 Frage 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} .$$

Finde eine ~~orthogonale~~ Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ diagonal ist. Kann man ein orthogonales U finden?

2. Sei C die Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finde eine ~~unitäre~~ Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ diagonal ist. Kann man ein unitäres U finden?

3. Sei W die Ebene definiert durch

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} .$$

(a) Finde die orthogonale Projektion $P : \mathbb{R}^3 \to W$.

(b) berechne i) $P(1, 1, 2)$; ii) $P(2, 0, 1)$.

4. Sei W der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ aufgespannt durch die Funktionen 1 (=konstante Funktion) und x. Finde die orthogonale Projektion $P(f)$ auf W (bezüglich des Standard-Skalarproduktes) der folgenden Funktionen: i) $f(x) = x^2$; ii) $f(x) = e^x$; iii) $f(x) = 1 + x^2$.

5. Sei E der Raum der komplex-wertigen 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$, mit dem sesquilinearen Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f}(x)g(x)dx .$$

(Sie sollten sich davon überzeugen, daß dies tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.) Finde die Projektion von $f(x) = e^{ix}$ auf (i) $W_1 = \mathrm{Vect}\{\sin x\}$; (ii) $W_2 = \mathrm{Vect}\{\sin x, \cos x\}$; (iii) $W_1^\perp$; (iii) $W_2^\perp$.

(Vect$\{\ldots\}$ bezeichnet den von den Vektoren aufgespannten Unter-Vektorraum.)