Kapitel 1

Bellsche Ungleichungen oder existiert Einstein's spukhafte Fernwirkung wirklich?

Hier betrachten wir ein Gedankenexperiment, das bereits in unterschiedlichster Weise realisiert wurde, und uns gleich mitten in die Quantenwelt führt.

1.1 Worum gehts?

In vielen Experimenten mit verschiedensten Teilchen ist nun gezeigt worden, dass Verschränkung (engl. Entanglement) über große Distanzen existiert. Der Begriff Verschränkung wurde vom österreichischen Nobelpreisträger Erwin Schrödinger eingeführt und ist eine grundlegende Eigenschaft der Quantenphysik. Diese Eigenschaft ist die Ursache eines sehr merkwürdigen Verhaltens von zwei räumlich getrennten Teilchen, die Einstein auch verächtlich als spukhafte Fernwirkung verurteilte: Das Messresultat des einen Teilchens wird scheinbar durch die Wahl der Messungsart des anderen Teilchens beeinflusst, obwohl beide Teilchen voneinander getrennt sind und nicht mehr miteinander „kommunizieren“können.

Zwei miteinander verschränkte Teilchen verhalten sich so ähnlich wie zwei telepathisch begabte Zwillingsschwestern. Nimmt man an einem der beiden Teilchen eine Messung vor, dann „spürt“das ihre Zwillingsschwester augenblicklich und nimmt abhängig vom Ergebnis dieser Messung einen definierten Quantenzustand an. In den Experimenten wurden zwei verschränkte Photonen (=Lichtteilchen) erzeugt und in entgegengesetzte Richtungen geschickt. Photonen sind masselose Teilchen, daher bewegen sie sich mit der maximal erlaubten Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit. Geht man von der sichtlich vernünftigen Voraussetzung aus, dass die auseinander fliegenden Teilchen sich gegenseitig nicht beeinflussen und nicht kommunizieren können, dann müssen alle möglichen Messresultate in dem Moment der Produktion vorbestimmt sein. Nur etwas, das ich lokal beim Teilchen verändere, kann auch einen Einfluss auf dieses Teilchen aber nicht auf das andere weit entfernte Teilchen haben.

Wie der berühmte Physiker John Bell zeigen konnte, müssen alle solche Theorien, die auf dieser vernünftigen Voraussetzung fußen, für eine gewisse Messkombination einen Wert kleiner oder gleich 2 ergeben. Die Quantentheorie hingegen sagt für diese Messkombination einen Wert größer als 2 voraus.

Wer hat nun Recht, die Quantentheorie oder eine solche vernünftige Theorie (Fachausdruck: lokal realistische Theorie)?

Als Schiedsrichter fungiert in der Wissenschaft das Experiment. Dieses lieferte mit sehr überzeugender Genauigkeit einen Wert größer als zwei, also eine eindeutige Siegerin, die Quantenphysik.

Was bedeutet nun, dass es ein nicht-lokales Phänomen gibt, eine scheinbar spukhafte Fernwirkung über räumliche Distanzen?

In der Quantentheorie muss man die zwei Teilchen, obwohl sie theoretisch beliebig weit auseinander sein können, als ein zusammenhängendes System betrachten und nicht als zwei getrennte Teilchen. Das klingt merkwürdig, aber die Natur ist so!
Nun stellt sich auch die Frage, ob diese komische Eigenschaft der Verschränkung nur für Photonen gültig ist. Photonen sind ja recht spezielle Teilchen, da sie masselos sind.

Existiert dieses nicht–lokale Phänomen auch für massive Teilchen, spukt es auch im Kaonen-System?

Dazu kann man so genannte seltsame Teilchen betrachtet, neutrale Kaonen. Sie sind nicht masselos wie die Photonen und zerfallen nach einer gewissen Zeit in andere Teilchen. Genau wie oben muss der Wert für eine gewisse Messkombination im Falle einer vernünftigen Theorie kleiner 2 sein, im Falle der Quantentheorie kann überraschenderweise auch kein Wert größer als 2 gefunden werden. D.h. man kann keine Aussage darüber machen, ob es auch in diesem Kaonen-System spukt!

Man muss ein wenig trickreicher sein, um diesem Kaonen-System doch noch eine Antwort zu entlocken.

Bis vor fast 40 Jahren dachten Physiker, dass es keinen Unterschied zwischen einer Welt aus Materie und einer Welt aus Antimaterie gibt. Zu jedem gefunden Teilchen gibt es ein Antiteilchen, das die gleiche Masse aber unterschiedliche Ladung hat. Zum Beispiel gibt es zum Proton, das positiv geladen ist, ein Antiproton, das negativ geladen ist. Unsere Welt besteht zu 99% aus Materie. Würden wir alle Materie durch Antimaterie ersetzen, würden die gleichen Gesetze gelten, wie wir sie in unserer Welt aus Materie beobachten, d.h. wir würden keinen Unterschied bemerken. Auch zu einem Kaon gibt es ein Antikaon. Da beide die gleiche Masse haben, sollten auch deren Zerfälle mit der gleichen Häufigkeit beobachtet werden. Das ist aber nicht der Fall. Es existiert ein kleiner Unterschied zwischen Materie und Antimaterie!

Zurück zu unserem Problem, ob es auch in massiven Systemen nicht-lokale Phänomene gibt. Es stellt sich folgendes heraus. Berechnet man eine gewisse geschickte Messkombination für eine vernünftige Theorie, dann darf es keinen Unterschied zwischen Materie und Antimaterie geben. Aber im Experiment wird ein solcher Unterschied gemessen! Damit können wir indirekt schließen, dass auch für Kaonen nicht-lokale Phänomene existieren und Verschränkung ein allgemein gültiges Phänomen ist.

Aber Verschränkung eröffnet nicht nur neue Einsichten in der Grundlagenforschung, sondern ist auch ein essentieller Baustein für völlig neue Methoden der sicheren Kommunikation (Quantenkryptographie) oder eines möglichen Quantencomputers.

Tabelle 1.1: Erklärung des Experiments unter Annahme von verborgenen Parametern:

Häufigkeit	Teilchen A	Teilchen B
N_1	$(\vec{a}+,\vec{b}+,\vec{c}+)$	$(\vec{a}-,\vec{b}-,\vec{c}-)$
N_2	$(\vec{a}+,\vec{b}+,\vec{c}-)$	$(\vec{a}-,\vec{b}-,\vec{c}+)$
N_3	$(\vec{a}+,\vec{b}-,\vec{c}+)$	$(\vec{a}-,\vec{b}+,\vec{c}-)$
N_4	$(\vec{a}+,\vec{b}-,\vec{c}-)$	$(\vec{a}-,\vec{b}+,\vec{c}+)$
N_5	$(\vec{a}-,\vec{b}+,\vec{c}+)$	$(\vec{a}+,\vec{b}-,\vec{c}-)$
N_6	$(\vec{a}-,\vec{b}+,\vec{c}-)$	$(\vec{a}+,\vec{b}-,\vec{c}+)$
N_7	$(\vec{a}-,\vec{b}-,\vec{c}+)$	$(\vec{a}+,\vec{b}+,\vec{c}-)$
N_8	$(\vec{a}-,\vec{b}-,\vec{c}-)$	$(\vec{a}+,\vec{b}+,\vec{c}+)$

Tabelle 1.2: tabbell

1.2 Herleitung der Bellschen Ungleichung

Logischerweise muss immer gelten

$$N_3 + N_4 \;\leq\; (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7)\;, \tag{1.1}$$

da die Häufigkeiten positive Zahlen sind.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Alice in Richtung $\vec{a}$ und Bob in Richtung $\vec{b}$ messen, ist dann gegeben durch

$$P(\vec{a}+;\vec{b}+) \;=\; \frac{N_3 + N_4}{\sum_i^8 N_i} \tag{1.2}$$

und auf gleiche Weise erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(\vec{a}+;\vec{c}+) &= \frac{N_2 + N_4}{\sum_i^8 N_i} \\ P(\vec{c}+;\vec{b}+) &= \frac{N_3 + N_7}{\sum_i^8 N_i}\;. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Damit wird die Ungleichung (1.1) falls wir diese noch durch $\sum_i^8 N_i$ dividieren

$$P(\vec{a}+;\vec{b}+) \leq P(\vec{a}+;\vec{c}+) + P(\vec{c}+;\vec{b}+)\;. \tag{1.4}$$

Wir haben unsere erste Bell Ungleichung (in Wigner Form), die auf dem Einsteinschen Lokalitätsprinzip beruht, gefunden!

Anmerkung: Bei der Herleitung ist man davon ausgegangen, dass die Korrelation bei gleicher Richtung exakt ist, dass ist experimentell nie realisierbar, da es keine Detektoren gibt, die immer alle ankommenden Teilchen registrieren können. Wenn man dies noch berücksichtigt, kommt man auf eine Ungleichung, die Clauser–Horn–Shimony–Holt Ungleichung (CHSH–Ungleichung). Sie lautet

$$S_{CHSH} \;=\; \left|E(\vec{a},\vec{b}) + E(\vec{a},\vec{b}')\right| + \left|E(\vec{a}',\vec{b}) - E(\vec{a}',\vec{b}')\right| \;\leq\; 2\;, \tag{1.5}$$

wobei der Erwartungswert E mit der obigen Wahrscheinlichkeit so zusammenhängt $E \;=\; -1 + 4P(+,+)$.

1.3 Und was sagt die Quantentheorie dazu?

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit dem quantenmechanischen Formalismus ergibt (falls Spins angenommen werden, falls Photonen gemeint sind, muss der Winkel mit 2 multipliziert werden):

$$P(\vec{a}\,+;\vec{b}\,+) \;=\; \frac{1}{2}\cos^2(\frac{\pi-\phi_{ab}}{2}) \;=\; \frac{1}{4}(1-\cos(\phi_{ab}))\;. \tag{1.6}$$

Damit lautet die Bell Ungleichung, die Einstein's Lokalitätsprinzip berücksichtigt,

$$\cos(\phi_{ac}) + \cos(\phi_{cb}) \leq \cos(\phi_{ab}) + 1. \tag{1.7}$$

Wählen wir $\phi_{ab} \;=\; 2\phi$ and $\phi_{bc} = \phi_{ac} \;=\; \phi$ und setzen z.B. $\phi \;=\; \frac{\pi}{4}$ erhalten wir $0.7 \leq 0.5$, also einen klaren Widerspruch!

Damit konnte erstmals eine philosophische Fragestellung im Experiment beantwortet werden! Damit muss man die Lokalität oder/?und? die Realität aufgeben.