Relativitätstheorie und Kosmologie II

Skriptum zum Gebrauch neben einer Vorlesung im Sommersemester 2008

Helmut Rumpf

Sommersemester 2008

Vorwort

Dieses Skriptum ist kein Vorlesungsersatz (es enthält z.B. keine Diagramme), sondern ein Begleittext. Es stützt sich auf sehr viele Quellen. Davon seien nur drei Lehrbücher angeführt:
R. Wald (1984): General Relativity,
W. Rindler (2001): Relativity (Special, General, Cosmological),
R.U. Sexl, H.K. Urbantke (1995): Gravitation und Kosmologie.
Bedanken möchte ich mich bei Frau Susanne Urach und Herrn Patrick Ludl für das aufmerksame Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **4**

2 Physikalische Grundlagen und heuristische Entwicklung der ART **7**

2.1 Äquivalenzprinzip, Feldvariable, Bewegung im Gravitationsfeld 7

2.1.1 Das Äquivalenzprinzip 7

2.1.2 Mathematische Beschreibung des Gravitationsfeldes . . 8

2.1.3 Bewegung im Gravitationsfeld 10

2.1.4 Newtonsche Näherung der Geodätengleichung 12

2.2 Tensoranalysis 13

2.2.1 Riemannsche Normalkoordinaten 13

2.2.2 Tensorfelder 13

2.2.3 Die kovariante Ableitung 14

2.3 Riemann-Tensor und Einsteinsche Feldgleichungen 15

2.3.1 Geodätische Deviation 15

2.3.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen 17

3 Linearisierte Gravitationstheorie **21**

3.1 Lineare Näherung der Feldgleichungen 21

3.1.1 Feldgleichungen und Newtonscher Grenzfall 21

3.1.2 Das elektromagnetische Analogon 23

3.1.3 Allgemeine Lösung der linearisierten Einstein-Gleichungen 24

3.2 Linearisierte Bewegungsgleichungen 25

3.2.1 Gravimagnetismus 25

3.2.2 Geodätische Präzession und Fermi-Walker-Transport . 28

4 Mathematische Vertiefung der ART **32**

4.1 Differentialgeometrie 32

4.1.1 Mannigfaltigkeiten 32

4.1.2 Affine Mannigfaltigkeiten 36

4.1.3 Semi-Riemannsche Geometrie 42

4.2 Isometrien 51
4.2.1 Lie-Ableitung 51
4.2.2 Killingvektoren 54
4.2.3 Rotverschiebung in einer stationären Raum-Zeit 55

5 Die Schwarzschild-Lösung und experimentelle Tests der ART 59
5.1 Die Schwarzschild-Lösung 59
5.2 Geodäten in der Schwarzschild-Metrik 63
5.3 Experimentelle Tests der ART 67
5.3.1 Periastronverschiebung 67
5.3.2 Lichtablenkung 69
5.3.3 Lichtlaufzeitverzögerung und weitere Tests 72

6 Gravitationskollaps und Schwarze Löcher 73
6.1 Sternbau und Gravitationskollaps 73
6.2 Bindungsenergie und Positivität der Masse 77
6.3 Schwarze Löcher 79
6.3.1 Maximale analytische Erweiterung der Schwarzschild-Lösung 79
6.3.2 Gravitationskollaps und allgemeine Schwarze Löcher . . 82

7 Kosmologie 86
7.1 Das kosmologische Prinzip und seine Konsequenzen 86
7.1.1 Isotropie und Homogenität 86
7.1.2 Räume konstanter Krümmung 88
7.1.3 Die Raum-Zeit der isotropen Kosmologie 90
7.1.4 Kosmologische Rotverschiebung 92
7.2 Dynamik und Geschichte des Universums 93
7.2.1 Die Friedmann-Gleichung 93
7.2.2 Das frühe Universum 96

8 Gravitationswellen 99
8.1 Ebene Wellen in linearer Näherung 99
8.1.1 Die transversale spurlose Eichung 99
8.1.2 Bewegung im Feld der ebenen Welle 100
8.2 Gravitationsstrahlung 101
8.3 Nachweis von Gravitationswellen 106
8.3.1 Astrophysikalische Quellen 106
8.3.2 Gravitationswellenantennen 107

Kapitel 1

Einführung

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) mit einigen Anwendungen in der Astrophysik und Kosmologie. Die ART (auch Einsteinsche Gravitationstheorie genannt) ist eine relativistische (d.h. auf der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) aufbauende) Gravitationstheorie, und zwar die einfachste, die mit den bisherigen Experimenten bzw. Beobachtungen verträglich ist. Es gibt also durchaus noch weitere relativistische Gravitationstheorien, jede solche muss aber die ART als Spezialfall enthalten. Für die Notwendigkeit einer Verallgemeinerung der ART gibt es viele, insbesondere quantentheoretische Argumente.

Die Kernaussage der ART ist folgende: *Gravitation ist ein Aspekt der Geometrie der Raum-Zeit.* Eine konsequente Interpretation ihres Formalismus führt sogar zum Schluss, dass die Raum-Zeit das Gravitationsfeld *ist.* (Diese Aussagen gelten für die klassische Theorie; es deutetet vieles darauf hin, dass die Raum-Zeit ein *emergentes* Phänomen, d.h. kein fundamentaler Bestandteil einer Quantentheorie der Gravitation ist.) Somit stellt die ART eine Vereinheitlichung vorher separater Kategorien der klassischen Physik dar. Die klassische Physik verwendet die Grundbegriffe Raum, Zeit, Materie, Wechselwirkung. Vier fundamentale Wechselwirkungen sind bekannt: elektromagnetische, schwache, starke Wechselwirkung und Gravitation. Diese Liste enthält bereits Vereinheitlichungen wie Newtons Zusammenführung von irdischer und Himmelsmechanik und die Vereinheitlichung von Elektrizität und Magnetismus. Außerdem fasst man heute die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung zur elektroschwachen zusammen (auch wenn hier noch nicht alle Details geklärt sind). Die erste kategorienübergreifende Vereinheitlichung stellte die Zusammenfassung von Raum und Zeit zur Raum-Zeit durch die SRT dar. Die Raum-Zeit der SRT bildet die Arena, in der die drei nichtgravitativen Wechselwirkungen agieren. Es stellt sich allerdings heraus, dass die Gravitation in diesen kinematischen Rahmen nicht hineinpasst. Die ART spannt den Bogen der Vereinheitlichung noch weiter und stellt eine Wechselwirkung, eben die Gravitation, als eine Eigenschaft der Raum-Zeit dar. Im Gegensatz zum Minkowskiraum der SRT trägt die Geometrie der Raum-Zeit der ART selbst dynamische Freiheitsgrade. Die Gravitation wird dadurch "geometrisiert". Auch die anderen Wechselwirkungen lassen sich geometrisieren, allerdings erfordert dies abstraktere Konstruktionen (z.B. sog. Faserbündel), die im Gegensatz zur Gravitation mehr als die (vierdimensionale) Raum-Zeit benötigen.

Der Trend zur Vereinheitlichung, der schon die bisherige Entwicklung der theoretischen Physik geprägt hat, setzt sich weiter fort. Hier seien noch die prominentesten (durchwegs noch hypothetischen) Ansätze erwähnt: Die sogenannten GUTs (grand unified theories) vereinheitlichen die drei nicht-gravitativen Wechselwirkungen auf gruppentheoretischer Basis. Eine Vereinheitlichung der Kategorien Materie und Wechselwirkung stellt das Konzept der Supersymmetrie (Fermi-Bose-Symmetrie) dar, das allerdings die Gravitation noch nicht befriedigend einbezieht. Eine totale Vereinheitlichung stellt die Superstring-Theorie bzw. ihre Weiterentwicklung zur sogenannten "M-Theorie" dar: Hier haben alle klassischen Kategorien ihren Ursprung in einem einzigen "Stoff". Dieser "Stoff" manifestiert sich in einer gewissen störungstheoretischen Näherung in der Form von fundamentalen eindimensionalen Objekten ("Strings") in einer 10-dimensionalen Raum-Zeit und davon abgeleiteten d-dimensionalen Objekten ("D-branen", $0 \leq d \leq 9$). (Diese Objekte weisen neben Supersymmetrie noch "innere" Symmetrien auf und stehen miteinander in Kontaktwechselwirkung, es gibt aber keine freie Kopplungskonstante.) In einer anderen störungstheoretischen Näherung hat der "Stoff" aber die Eigenschaften einer gravitierenden 5-dimensionalen Membran in einer 11-dimensionalen Raum-Zeit. Die zugrundeliegende exakte Theorie (deren Existenz auf Grund von "Dualitätssymmetrien", die die diversen störungstheoretischen Näherungen ineinander überführen, vermutet wird) ist noch unbekannt und wird sicherlich ohne die Begriffe Raum, Zeit usw. zu formulieren sein. Die "M-Theorie" ist der bekannteste Ansatz einer "theory of everything" (TOE). Sie ist aber derzeit weder mathematisch exakt definiert noch experimentell getestet.

Wie die eben gemachten Bemerkungen verdeutlichen, wird wegen der bedeutenden Rolle, die die Gravitation in zukünftigen vereinheitlichen Theorien spielen wird, die ART auch für die Teilchenphysik immer relevanter. Obwohl die ART schon vor fast 100 Jahren von Einstein aufgestellt worden ist, ist sie keineswegs ein abgeschlossenes Kapitel der Physik, sondern Gegenstand intensiver Forschungstätigkeit. Die hauptsächlichen aktuellen Forschungsgebiete sind:

1. Mathematische Relativitätstheorie: Sie untersucht mit analytischen

Methoden die Konsequenzen der dynamischen Grundgleichungen der Gravitation, der Einsteinschen Feldgleichungen. Diese bilden ein gekoppeltes System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, für das es keine geschlossene mathematische Theorie gibt.

2. Numerische Relativitätstheorie: Wegen der Kompliziertheit der Feldgleichungen sind nur Lösungen mit sehr speziellen Eigenschaften exakt bekannt. Für realistische Anwendungen der ART z.B. in der Astrophysik sind numerische Methoden mit Computereinsatz das einzige zur Verfügung stehende Mittel.

3. "Quantengravitation": Wie jede andere Wechselwirkung sollte auch die Gravitation Quantencharakter haben. Wegen erheblicher konzeptueller und technischer Schwierigkeiten gibt es jedoch bis zum heutigen Tag keine allgemein akzeptierte Quantenversion der ART. Vielmehr existiert eine Fülle von mehr oder weniger weit gediehenen Ansätzen. Diese reichen von einer mathematisch rigorosen Quantisierung der "puren" ART ("Loop Quantum Gravity") bis zur Stringtheorie, die aus Konsistenzgründen zusätzlich zur Gravitation unendlich viele weitere Freiheitsgrade einbezieht. "Quantengravitation" ist also keine wohldefinierte Theorie. Im weiteren Sinne umfasst sie auch die semiklassische Näherung (Quantenfeldtheorie in einer klassischen Raum-Zeit).

Die ART ist aber nicht nur für Theoretiker von Interesse, sondern liegt auch vielen Experimenten der relativistischen Astrophysik und Kosmologie sowie der Suche nach Gravitationswellen zu Grunde. Darüber hinaus hat eine ihrer Anwendungen mittlerweile im Alltag Eingang gefunden, nämlich in Form des Satellitennavigationssystems GPS.

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen und heuristische Entwicklung der ART

2.1 Äquivalenzprinzip, Feldvariable, Bewegung im Gravitationsfeld

2.1.1 Das Äquivalenzprinzip

Das **Newtonsche** oder **schwache Äquivalenzprinzip** folgt aus der Gleichheit (allgemeiner: Proportionalität) von träger Masse m_{in} und schwerer Masse $m_{g,pass}$ in der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein Testteilchen (darunter verstehen wir ein Teilchen mit vernachlässigbarer Ausdehnung und vernachlässigbarem Eigenfeld, aber kein mathematisches Punktteilchen, weil dieser Begriff in der ART nicht haltbar ist):

$$m_{in}\ddot{\vec{x}} = m_{g,pass}\vec{F}_{grav}, \tag{2.1}$$

wobei $\vec{F}_{grav}$ die Gravitationsfeldstärke bedeutet. Experimente zeigen, dass (in üblichen Einheiten) $m_{in} = m_{g,pass}$ mit einer Genauigkeit besser als 10^{-12}. Daraus folgt $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{grav}$, d.h. die Bewegung von Testteilchen im Gravitationsfeld hängt nicht von deren Masse ab. Das schwache Äquivalenzprinzip lässt sich daher kurz als die Universalität der Trajektorien des freien Falls umschreiben.

Die von einem Punktteilchen (im Koordinatenursprung) gemäß dem Newtonschen Gravitationsgesetz erzeugte Feldstärke

$$\vec{F}_{grav}(\vec{x}) = -\frac{Gm_{g,act}}{|\vec{x}|^3}\vec{x} \tag{2.2}$$

enthält die aktive schwere Masse $m_{g,act}$ des Teilchens. Aus dem 3. Newtonschen Axiom ("actio = reactio") und (2.1) folgt aber unmittelbar $m_{g,act} = m_{g,pass}$. Hingegen ist die Gleichheit von träger und schwerer Masse ein empirischer Sachverhalt, den die Newtonsche Theorie nicht erklärt.

Das **Einsteinsche** oder **starke Äquivalenzprinzip** verschärft das Newtonsche durch folgendes - wiederum von der Erfahrung nahegelegtes - Postulat: Auch bei Vorhandensein eines Gravitationsfeldes existiert in der Umgebung jedes Raum-Zeit-Punkts ein **lokales Inertialsystem** (LIS) (realisiert z.B. durch eine frei fallende Kabine). In einem solchen gilt bezüglich aller lokalen nichtgravitativen Experimente die SRT. "Lokal" bedeutet, dass räumliche und zeitliche Ausdehnung des Systems entsprechend der Beschaffenheit des Gravitationsfeldes einzuschränken sind. Es handelt sich also beim Einsteinschen Äquivalenzprinzip um eine Näherungsaussage. Z.B. ist ein Raumschiff von heute machbarer Größe in Erdumlaufbahn in sehr guter Näherung ein LIS, offenbar sind aber derartige Raumschiffe auf verschiedenen Umlaufbahnen relativ zueinander beschleunigt. Es gibt also im Schwerefeld der Erde kein *globales* IS. Ein weiteres instruktives Beispiel stellt eine frei fallende Punktladung dar: Diese strahlt auf Grund ihrer "Fernwirkung" (d.h. das langreichweitige Coulombfeld der Ladung sprengt den Rahmen jedes LIS). Eine alternative Formulierung des starken Äquivalenzprinzips besagt, dass sich Schwerkraft durch Beschleunigung im Minkowskiraum lokal simulieren lässt. Daraus lässt sich u.a. schließen, dass Lichtstrahlen in einem Gravitationsfeld gekrümmt werden.

Historisch wurde auch noch ein "superstarkes" (ursprünglich ebenfalls als Einsteinsch oder stark bezeichnetes) Äquivalenzprinzip unterschieden, das lokale gravitative Experimente einbezieht. Es spielt für unsere Zwecke jedoch keine Rolle.

2.1.2 Mathematische Beschreibung des Gravitationsfeldes

Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip legt die mathematische Beschreibung des Gravitationsfeldes nahe. Wie bereits angedeutet, liegt ein "echtes" (d.h. von einem reinen Beschleunigungsfeld im Minkowskiraum verschiedenes) Gravitationsfeld dann vor, wenn es LISe gibt, die relativ zueinander beschleunigt sind. In diesem Fall gibt es kein globales IS oder, mathematisch ausgedrückt, keine globalen kartesischen Koordinaten. Dieser Sachverhalt ist ein Hinweis auf die Natur der Raum-Zeit: Bei Vorliegen eines solchen Gravitationsfeldes ist der Minkowskiraum nicht das richtige Modell . Welche Eigenschaften des Minkowskiraums sind nun zu verallgemeinern? Aus der SRT ist bekannt, dass der Minkowskiraum als vierdimensionales Kontinuum (d.h. topologisch identisch $\mathbf{R}^4$) mit affiner Struktur und der Lorentz-Metrik $\eta = \eta_{ik} dx^i \otimes dx^k$ ($\eta_{ik} = diag(-1, 1, 1, 1)$ in kartesischen Koordinaten, in diesen wird das invariante Abstandsquadrat $(\Delta s)^2 = -\eta_{ik} \Delta x^i \Delta x^k$ impliziert) definiert ist. Aus dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip schließen wir, dass eine **allgemeine Raum-Zeit** diese Eigenschaften nur *lokal* aufweisen muss. Die lokale Version eines affinen Raumes führt auf den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit (auf einer solchen ist die Differentiation von Funktionen definiert), der in Kap. 4 präzisiert wird. Für uns genügt vorderhand, dass die Raum-Zeit durch vierdimensionale reelle Koordinatensysteme beschreibbar ist, die allerdings i.a. nur auf offenen Teilmengen definiert sind. In einem solchen Koordinatensystem (KS) wird jeder Punkt (= Ereignis) P durch 4 reelle Zahlen (x^0, x^1, x^2, x^3) repräsentiert, wobei wir nicht immer zwischen P und seinen Koordinaten unterscheiden werden. Die augenfälligste Modifikation des Minkowskiraums betrifft die metrische Struktur. Aus dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip lässt sich nur schließen, dass in einem frei wählbaren Punkt die Standardform der Minkowskimetrik durch geeignete Koordinatenwahl erreichbar ist, nicht jedoch global. Die Metrik der Raum-Zeit muss also mit ortsabhängigen Komponenten $g_{ik}(x)$ angesetzt werden. Der eben vollzogene Schluss bedeutet mathematisch, dass für jeden Punkt P eine Koordinatentransformation (KT) $x'(x)$ existiert, so dass $g'_{ik}(x'(P)) = \eta_{ik}$. Dies bedeutet eine gewisse Einschränkung an die Funktionen $g_{ik}(x)$. Um das einzusehen, benötigen wir ihr Transformationsverhalten unter einer allgemeinen Koordinatentransformation (AKT). Dieses folgt aus dem Transformationsverhalten der Koordinatendifferentiale,

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} dx'^k \tag{2.3}$$

und der Koordinatenunabhängigkeit des Tensors $\mathbf{g} = g_{ik}(x) dx^i \otimes dx^k$ bzw. des "Linienelements" (= infinitesimalen Abstandsquadrats) $ds^2 = -g_{ik}(x) dx^i dx^k$:

$$g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} g_{mn}(x). \tag{2.4}$$

Dies ist das Verhalten eines *kovarianten Tensorfelds* 2. Stufe.

Das Tensorfeld $g_{ik}(x)$ enthält die gesamte Information über das Gravitationsfeld, weil sich aus ihm die Kenntnis der Koordinatentransformationen ergibt, die LISe um verschiedene Punkte ineinander überführen. Physikalisch beinhalten diese Koordinatentransformationen aber die Kenntnis der relativen Beschleunigungen zwischen diesen Systemen. Zusammenfassend können wir also sagen: Das Gravitationsfeld wird beschrieben durch ein **metrisches**

Tensorfeld $g_{ik}(x)$ auf einer vierdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit, das in jedem Punkt auf die **Normalform** η_{ik} transformiert werden kann. Wegen der Symmetrie von η ist $g_{ik} = g_{ki}$. Die erwähnte Einschränkung an das metrische Tensorfeld besteht darin, dass die durch die Koeffizienten $g_{ik}(x)$ bestimmte quadratische Form eine eindeutige Normalform hat (vgl. den Sylvesterschen Trägheitssatz der linearen Algebra). Die in der Normalform geforderte Reihenfolge der Vorzeichen (-,+,+,+) wird als **Lorentz-Signatur** bezeichnet, das eben erhaltene mathematische Modell der Raum-Zeit als **Lorentz**-(oder pseudo-Riemannsche) **Mannigfaltigkeit**.

2.1.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Wir interessieren uns für die Weltlinien frei fallender Testteilchen im Gravitationsfeld und setzen diese zunächst als zeitartig voraus, d.h. die Weltlinie habe überall zeitartigen Tangentenvektor. Zwei Ereignisse heißen zeitartig getrennt, wenn es keine (differenzierbare) raum- oder lichtartige Verbindungslinie zwischen ihnen gibt.
Gesucht: Verallgemeinerung der geradlinig gleichförmigen Bewegung im Minkowskiraum.
Lösung: Übernehme die Charakterisierung dieser Bewegung durch ein Variationsprinzip: Die Weltlinie "freien Falls" $\mathcal{C}$, die die beiden zeitartig getrennten Ereignisse P_1 und P_2 verbindet, hat die Eigenschaft maximaler Länge (Eigenzeit) oder

$$-\int_{\mathcal{C}} ds = min. \tag{2.5}$$

Diese Eigenschaft definiert die geodätische Linie oder kurz **Geodäte**, die die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet. Das Variationsproblem (2.5) hat lokal (d.h. bei nicht zu großer Trennung der Punkte) eine eindeutige Lösung und läßt sich auf eine Differentialgleichung zurückführen. Dazu wählen wir eine beliebige Parametrisierung (da wir nur an der Differentialgleichung interessiert sind, ist die Annahme, dass $\mathcal{C}$ in einem einzigen Koordinatengebiet liegt, keine Einschränkung) $\lambda \mapsto x^i(\lambda)$ für $\mathcal{C}$ (aus der *Linie* wird dadurch eine *Kurve*). $\Rightarrow ds = \sqrt{-g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d\lambda \equiv -Ld\lambda$, $\dot{} \equiv d/d\lambda$. Das Variationsproblem lautet nun

$$S[x(\lambda)] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x, \dot{x})d\lambda = min \tag{2.6}$$

mit Randbedingung: $x(\lambda_1)$, $x(\lambda_2)$ fest. $\Rightarrow$

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{2.7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} g_{kl,i}\, \dot{x}^k \dot{x}^l = \frac{d}{d\lambda}\frac{g_{ik}\dot{x}^k}{L} = -\frac{1}{L^2}\frac{dL}{d\lambda} g_{ik}\dot{x}^k + \frac{1}{L} g_{ik,l}\, \dot{x}^k \dot{x}^l + \frac{1}{L} g_{ik}\ddot{x}^k.$$

Wähle $\lambda \propto$ Bogenlänge (Eigenzeit) $s \Rightarrow \frac{dL}{d\lambda} = 0$.

$$\Rightarrow g_{ik}\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\dot{x}^k\dot{x}^l = 0$$

mit $\Gamma_{ikl} \equiv \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i})$.
Überschieben dieser Gleichung mit der inversen Metrik

$$g^{ik} \equiv (g^{-1})^{ik} \Rightarrow g^{il} g_{lk} = \delta^i{}_k \tag{2.8}$$

liefert schließlich die **Geodätengleichung**

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l = 0, \tag{2.9}$$

in der das **Christoffel-Symbol** (2. Art)

$$\Gamma^m_{kl} := \frac{1}{2} g^{im}(g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}) \tag{2.10}$$

auftritt.

Die Herleitung der Geodätengleichung (2.9) bleibt auch im Fall raumartiger Trennung der beiden Randpunkte richtig und führt dann auf raumartige Geodäten. Lichtartige oder **Nullgeodäten** sind als lichtartige Lösungen der Geodätengleichung definiert. Allerdings lassen sie sich nicht auf das Variationsproblem (2.5) zurückführen, da in der Herleitung der Geodätengleichung durch L dividiert wurde und dieses im lichtartigen Fall verschwindet. Der Parameter - er sei im allgemeinen Fall τ genannt - hat dann nicht mehr die Bedeutung einer Bogenlänge oder Eigenzeit. Offenbar ist die Geodätengleichung invariant unter einer affinen Parametertransformation $\tau \mapsto \alpha\tau + \beta$, weshalb τ als **affiner Parameter** bezeichnet wird. Ein alternatives Variationsprinzip, das die Geodätengleichung (2.9) auch im lichtartigen Fall liefert, ist durch die Lagrangefunktion

$$L' = \frac{1}{2} g_{ik}(x)\dot{x}^i\dot{x}^k$$

definiert. Die durch L' definierte Wirkung hat keine geometrische Bedeutung, wenn die Geodätengleichung nicht erfüllt ist. Sie ist der Prototyp einer Klasse von Wirkungen, die in der Feldtheorie als nichtlineare Sigma-Modelle bezeichnet werden (wobei insbesondere der eindimensionale Parameterraum zu einer höherdimensionalen Riemann-Mannigfaltigkeit verallgemeinert wird). Deren Lösungen heißen harmonische Abbildungen (wave maps).

2.1.4 Newtonsche Näherung der Geodätengleichung

Annahme 1: Schwaches Gravitationsfeld $\Rightarrow \exists$ KS so dass $g_{ik}(x) = \eta_{ik} + 2h_{ik}(x)$, $|h_{ik}| \ll 1$, $|h_{ik},_l| \ll 1$. (Diese Koordinatenbedingung ist sehr speziell und nicht einmal lorentzinvariant!)
Annahme 2: $v \ll 1 \Rightarrow \dot{x} \approx (1, \vec{0})$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{00} = 0, \; ds \approx dt\sqrt{1-v^2} \approx dt$$
$$\Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha{}_{00} = 0, \; \alpha = 1, 2, 3,$$
$$\Gamma^\alpha{}_{00} = g^{\alpha i}\Gamma_{i00} \approx \eta^{\alpha i}\Gamma_{i00} = \Gamma_{\alpha 00} = \frac{1}{2}(2g_{\alpha 0},_0 - g_{00},_\alpha).$$

Annahme 3: Gravitationsfeld statisch $\Rightarrow \Gamma^\alpha{}_{00} = -\frac{1}{2}g_{00},_\alpha$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}g_{00},_\alpha = h_{00},_\alpha$$

$\Rightarrow -h_{00} = V$ ist das Newtonsche Gravitationspotential.
$\Rightarrow$ **Linienelement in Newtonscher Näherung der Bewegungsgleichungen**:

$$ds^2 = (1 + 2V)dt^2 - d\vec{x}^2. \tag{2.11}$$

Da die Christoffel-Symbole aus den ersten Ableitungen der Metrik gebildet werden, haben sie die physikalische Bedeutung von "Feldstärken".

Im **Sonnensystem** sind die Voraussetzungen der Newtonschen Näherung sehr gut erfüllt: Mit $V = -GM/r$ erhalten wir

$$2h_{00} = -\frac{2V}{c^2} = \frac{2\mathcal{M}}{r},$$
$$2\mathcal{M} \equiv \frac{2GM}{c^2} \tag{2.12}$$

ist der sogenannte **Schwarzschild-Radius** der Masse M. Für die Sonne erhalten wir aus $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}kg$ den Schwarzschild-Radius $2\mathcal{M}_\odot \approx 3km$. Da das Potential im freien Raum des Sonnensystems auf der Sonnenoberfläche den tiefsten Wert annimmt und ihr Radius $R_\odot \approx 7 \times 10^5 km$ ist, folgt $|h_{ik}| \leq 10^{-5}$ im Sonnensystem. Außerdem sind hier die Geschwindigkeiten aller Himmelskörper sehr klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit.

2.2 Tensoranalysis

2.2.1 Riemannsche Normalkoordinaten

Wir betrachten alle Geodäten, die von einem Punkt P mit Koordinaten (x_0^i) ausgehen und parametrisieren diese affin so, dass $\tau = 0$ in P. In einer Umgebung von P liegt jeder Punkt Q auf genau einer solchen Geodäte mit Anfangsdaten (x_0^i, u_0^i) und zum Wert τ_Q des affinen Parameters. Die Abbildung $Q \mapsto y^i \equiv u_0^i \tau_Q$ definiert ein lokales Koordinatensystem (y^i), das **geodätisches Koordinatensystem** genannt wird. In diesem KS sind die Koordinatengeraden $y^i = c^i\tau$ Geodäten, insbesondere die Koordinatenlinien ($c^i = \delta^i_m$, $m = 0, 1, 2, 3$). Sei $\bar{g}_{ij}$ die Metrik in diesem KS. Die Geodätengleichung $\ddot{y}^i + \bar{\Gamma}^i_{jk}\dot{y}^j\dot{y}^k = 0$ hat dann laut Konstruktion des KS Lösungen $y^i = c^i\tau \Rightarrow \bar{\Gamma}^i_{jk}(0)c^jc^k = 0 \quad \forall c \Rightarrow \bar{\Gamma}^i_{jk}(0) = 0 \Rightarrow \bar{g}_{ij},_k(0) = 0$ wegen $\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = g_{ij},_k$. Außerdem ist $\bar{g}_{ij}(0) = \eta_{ij}$ erreichbar durch eine lineare KT $y^i \mapsto C^i{}_j y^j$.
(DEF) **Riemannsches Normalkoordinatensystem** (RNKS) = geodätisches KS mit $g_{ij}(0) = \eta_{ij}$. Ein RNKS ist Spezialfall eines LIS. Ein solches hat die Eigenschaften
(DEF) **LIS**: $g_{ij}(0) = \eta_{ij}$, $g_{ij},_k(0) = 0$. Wir werden in Kap. 4 (Übungsaufgabe) sehen, dass diese Bedingungen nicht nur in einem Punkt, sondern sogar entlang einer beliebigen Linie erfüllbar sind. Mit der eben gemachten Präzisierung eines LIS sehen wir rückblickend, dass wir für die mathematische Beschreibung des Gravitationsfeldes gar nicht die Existenz von LISen, sondern nur die einer allgemeineren Klasse von KSen benötigt haben, nämlich:
(DEF) **Lokales Lorentzsystem** (LLS): $g_{ij}(0) = \eta_{ij}$.

2.2.2 Tensorfelder

Ein (Koordinaten-)**Tensorfeld vom Typ (m,n)** (m-fach kontra- und n-fach kovariant, m+n heißt die Stufe) ist durch folgendes Transformationsverhalten seiner Komponentenfunktionen unter AKTen charakterisiert:

$$T'^{i_1\cdots i_m}{}_{j_1\cdots j_n}(x') = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_n}}{\partial x'^{j_n}} T^{k_1\cdots k_m}{}_{l_1\cdots l_n}(x). \tag{2.13}$$

Die Metrik erlaubt es, den Typ (aber nicht die Stufe) eines Tensorfeldes durch Indextransport (Überschieben mit den kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten der Metrik) zu ändern. Wir fassen die so erhaltenen verschiedenen Versionen der Komponenten eines Tensorfeldes als verschiedene mathematische Beschreibungen ein- und desselben physikalischen Objekts auf. Ungeachtet dessen hat aber jedes solche Objekt eine “natürliche”

Indexstellung. Z.B. lautet die kovariante Version eines kontravarianten Vektorfeldes $v_i = g_{ij}v^j$, umgekehrt $v^i = g^{ij}v_j$, usw. Wegen der Existenz der Metrik ist die Operation der Spurbildung oder **Kontraktion** nicht nur für gemischte Tensoren, sondern für beliebige Tensoren der Stufe ≥ 2 definiert, z.B. $T_{ik} \to T^i{}_i = g^{ik}T_{ik}$.

Die fundamentale Rolle von Tensorfeldern in der Physik folgt aus ihrem koordinatenunabhängigen Charakter (nur ihre Komponenten hängen vom gewählten KS ab). Die Grundgleichungen der ART werden "allgemein kovariant" formuliert, d.h. sie nehmen in jedem KS dieselbe Form an. Jede derartige Gleichung läßt sich als das Verschwinden eines Tensorfeldes darstellen.

2.2.3 Die kovariante Ableitung

Die partielle Ableitung eines Tensorfeldes ist i.a. *kein* Tensorfeld, z.B. ist im Falle eines kontravarianten Vektorfelds

$$\frac{\partial v'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}v^m{}_{,n} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^n}v^m,$$

was sich vom Transformationsverhalten eines Tensorfeldes vom Typ (1,1) durch einen Zusatzterm unterscheidet. Wie schon aus der klassischen Mechanik und SRT bekannt, ist aber die partielle Ableitung in speziellen ("physikalischen") Koordinaten durchaus sinnvoll. Daher
(DEF) **Kovariante Ableitung eines Tensorfeldes** in P = Tensor definiert durch die partielle Ableitung in einem LIS mit P als Ursprung. Damit ist die kovariante Ableitung eines Tensorfeldes vom Typ (p,q) selbst ein Tensorfeld vom Typ (p,q+1). In Formeln:
$\nabla_i T^{j\cdots}{}_{k\cdots} \equiv T^{j\cdots}{}_{k\cdots;i} \doteq T^{j\cdots}{}_{k\cdots,i}$ im Ursprung eines LIS.
$\Rightarrow \nabla_i f = \partial_i f$, falls f skalar und $\nabla_i g_{jk} = 0$, d.h. das metrische Tensorfeld ist *kovariant konstant.*
Berechnung der kovarianten Ableitung in beliebigen Koordinaten:
Die kovariante Ableitung ist laut Definition eine *lineare* Operation $\to$
Ansatz: $\nabla_k v^i = v^i{}_{,k} + L^i{}_{jk}v^j$ (linearer "Korrekturterm") $\Rightarrow L^i{}_{jk} = 0$ im Ursprung eines LIS.
Tatsächlich ist $L^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk}$ (Beweis: Übungen).
Erweiterung auf beliebige Tensorfelder:
Skalare: $\nabla_i f = \partial_i f$ ist Kovektor.
Kovektoren: $u^i v_i$ ist skalar, ∇ erfüllt wegen seiner Definition die Leibnizregel, also
$\nabla_k(u^i v_i) = (\nabla_k u^i)v_i + u^i \nabla_k v_i \Rightarrow \nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma^l{}_{ik}v_l$ (Beweis: Übungen).

Tensoren höherer Stufe transformieren wie Produkte von Vektoren und Kovektoren $\Rightarrow$

$$\nabla_k T^{i\cdots}{}_{j\cdots} = \partial_k T^{i\cdots}{}_{j\cdots} + \Gamma^i{}_{mk} T^{m\cdots}{}_{j\cdots} + \cdots - \Gamma^m_{jk} T^{i\cdots}{}_{m\cdots} - \cdots \quad (2.14)$$

Zusammenfassend: ∇ ist linear, erfüllt die Leibniz-Regel und erhöht die Kovarianzstufe des Tensorfeldes um 1.
(DEF) **Absolute Ableitung** eines Tensorfeldes entlang einer Kurve $x(\lambda) =$ kovariante Ableitung in Richtung der Tangente, notiert als

$$\frac{D}{d\lambda} T^{i\cdots}{}_{j\cdots} := T^{i\cdots}{}_{j\cdots;k} \frac{dx^k}{d\lambda}. \quad (2.15)$$

Z.B. ist für eine zeitartige Weltlinie $x^i(s)$

$$\frac{Dx^i}{ds} = x^i{}_{,k}\, \dot{x}^k = \frac{dx^i}{ds} \equiv u^i$$

die **Vierergeschwindigkeit** und

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = \frac{Du^i}{ds} = u^i_{;k} u^k \equiv a^i$$

die **Viererbeschleunigung**. Die Geodätengleichung (2.9) lässt sich manifest kovariant auch als

$$\frac{D^2 x^i}{d\tau^2} = 0$$

schreiben. Vom Standpunkt der ART ist also die freie Fallbewegung *unbeschleunigt.*

2.3 Riemann-Tensor und Einsteinsche Feldgleichungen

2.3.1 Geodätische Deviation

Wir betrachten zwei benachbarte Geodäten $x^i(\tau)$, $y^i(\tau) = x^i + \delta x^i$. Der "infinitesimale Verbindungsvektor" $\delta x^i(\tau)$ (hängt von der relativen affinen Parametrisierung durch τ ab) wird auch als Jacobi-Feld bezeichnet. In einem echten Gravitationsfeld ist die Relativbeschleunigung $D^2 \delta x^i / d\tau^2$ von Null verschieden und daher als Kriterium für die Echtheit von besonderem Interesse. Sie lässt sich aus der Geodätengleichung berechnen: Bilde die Differenz der beiden Gleichungen

$$\ddot{x}^i + \delta\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{jk}(x + \delta x)(\dot{x}^j + \delta\dot{x}^j)(\dot{x}^k + \delta\dot{x}^k) = 0$$

und

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,$$

behalte nur Terme linear in δx und seinen Ableitungen und bestimme daraus $\delta\ddot{x}^i$. Setze dies ein in

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\delta x^i = \frac{d}{d\tau}(\delta\dot{x}^i + \Gamma^i{}_{jk}\delta x^j\dot{x}^k) + \Gamma^i{}_{jk}(\delta\dot{x}^j + \Gamma^j{}_{mn}\delta x^m\dot{x}^n)\dot{x}^k$$

(wiederum entwickelt nur bis zur 1. Ordnung in δx) und verwende die Geodätengleichung für $\ddot{x}^k$. Das Resultat läßt sich zusammenfassen zur **geodätischen Deviationsgleichung**

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\delta x^i = R^i{}_{jkl}\dot{x}^j\dot{x}^k\delta x^l, \tag{2.16}$$

worin

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^i{}_{mk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} \tag{2.17}$$

den **Riemannschen Krümmungstensor** (Riemann-Tensor) definiert. Dieser beschreibt, da aus den ersten Ableitungen der "Feldstärken" $\Gamma^i{}_{jk}$ gebildet, die "Gezeitenbeschleunigungen" und ist von zentraler Bedeutung für die ART. Aus der Definition (2.17) folgen die **algebraischen Symmetrien**

$$R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}, \tag{2.18}$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \tag{2.19}$$

$$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{ljk} + R^i{}_{klj} = 0. \tag{2.20}$$

Es hat den Anschein, dass (2.16) (ausgewertet als quadratische Form in $\dot{x}$) den Tensor $R^i{}_{jkl}$ nicht eindeutig festlegt, sondern nur den symmetrischen Anteil

$$R^i{}_{(jk)l} \equiv \frac{1}{2}(R^i{}_{jkl} + R^i{}_{kjl}).$$

Tatsächlich ist aber der Riemann-Tensor auf Grund seiner algebraischen Symmetrien durch seinen symmetrischen Anteil eindeutig bestimmt. Wegen dieser Symmetrien sind auch nur 20 Komponenten des Riemann-Tensors algebraisch unabhängig. Der Beweis dieser Tatsachen sowie der algebraischen Symmetrien selbst erfolgt in den Übungen. Der Riemann-Tensor erfüllt auch eine wichtige Differentialidentität, nämlich die **Bianchi-Identität**

$$R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jmk;l} + R^i{}_{jlm;k} = 0 \tag{2.21}$$

(Beweis $\to$ Übungen bzw. Kap. 4). Sie reduziert die Zahl der *funktional* unabhängigen Komponenten auf 6 ($\to$ Kap. 4). (Die Bianchi-Identität erinnert an die homogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Schreibweise,

$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0$. Tatsächlich ist der Riemann-Tensor ein mathematisches Analogon des Feldstärkentensors F_{ik}. Er ist nämlich aus den Christoffel-Symbolen so gebildet wie der Feldstärkentensor einer nichtabelschen Eichtheorie aus den Eichpotentialen, wobei die relevante Symmetriegruppe hier die Lorentzgruppe ist. *Physikalisch* entspricht der Riemann-Tensor allerdings dem Gradienten einer Feldstärke.)
Aus der geodätischen Deviationsgleichung (2.16) folgt als Kriterium für die Echtheit des Gravitationsfeldes

$$R^i{}_{jkl} = 0 \Leftrightarrow g_{ij} \ Minkowskisch. \tag{2.22}$$

Eine Raum-Zeit mit $R^i{}_{jkl} \neq 0$ heißt **gekrümmt**, ansonsten **flach**. Die Begründung für diese Terminologie erfolgt in Kap. 4. Die Echtheit des Gravitationsfeldes entspricht also genau der Krümmung der Raum-Zeit.

2.3.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Jede klassische Feldtheorie basiert auf zwei Typen von Grundgleichungen: der Bewegungsgleichung für Testteilchen im vorgegebenen Feld und den Feldgleichungen, die festlegen, wie das Feld durch Quellen erzeugt wird (der erste Typ läßt sich aus dem zweiten gewinnen, s. das Ende dieses Abschnitts). Die Feldgleichung der Newtonschen Theorie lautet

$$\Delta V = 4\pi G\rho, \ \rho\text{...Massendichte.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat eine Beziehung zur Gezeitenbeschleunigung, die sich analog zur geodätischen Deviationsgleichung als

$$\delta \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \delta(-V_{,\alpha}) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\delta x^\alpha = -V_{,\alpha\beta}\,\delta x^\beta$$

darstellen lässt. Das legt folgende relativistische Verallgemeinerung nahe: Der "Gezeitentensor" $V_{,\alpha\beta}$ entspricht in der geodätischen Deviationsgleichung (2.16) dem Term $-R^\alpha{}_{jk\beta}\dot{x}^j\dot{x}^k$, wenn $\delta x^0 = 0$ gesetzt wird. Die Newtonsche Vakuumfeldgleichung $V_{,\alpha\alpha} = 0$ hat daher die kovariante Entsprechung $-R^i_{jki}u^ju^k = 0 \ \forall u$ oder

$$R_{jk} = 0 \tag{2.23}$$

mit dem **Ricci-Tensor**

$$R_{jk} := R^i_{jki} = R_{kj}. \tag{2.24}$$

Damit sind bereits die *Vakuumfeldgleichungen* der ART gewonnen.
Bei Anwesenheit von Materie ist noch die rechte Seite der Newtonschen Gleichung zu verallgemeinern. In der SRT ist die Masse ein Aspekt des Energie-Impulses, und dessen Dichte wird durch den **Energie-Impuls-Tensor** (EIT)

$T_{ik}(x)$ beschrieben. Aus Kovarianzgründen muss dieses Tensorfeld als Quellterm der gesuchten relativistischen Feldgleichungen auftreten (insbesondere ist die Massendichte ρ gleich $\epsilon/c^2 = (1/c^2)T_{00}$ mit der Energiedichte ϵ zu setzen). Nach den bisherigen Überlegungen wäre also

$$-R_{ik} \propto T_{ik} \text{ ?}$$

ein Kandidat für die gesuchten Feldgleichungen. Dieser Ansatz führt aber auf einen Widerspruch. Denn in der SRT ist der EIT eines abgeschlossenen Systems divergenzfrei, $T^{ik}_{\ ,k} = 0$, woraus bekanntlich die Energie-Impuls-Erhaltung folgt. Gemäß dem Äquivalenzprinzip verallgemeinert sich diese Eigenschaft in der ART zur kovarianten Divergenzfreiheit,

$$T^{ik}_{\ ;k} = 0. \tag{2.25}$$

Daran ist zunächst bemerkenswert, dass aus dieser Gleichung *kein* Erhaltungssatz folgt, weil der Satz von Gauß nur für partielle, aber nicht für kovariante Ableitungen gilt. Der physikalische Grund ist, dass das Gravitationsfeld nicht als Bestandteil des abgeschlossenen Systems aufgefasst wird, aber selbst auch Energie-Impuls trägt (dessen Lokalisierung allerdings Schwierigkeiten bereitet). Wegen der Universalität der Gravitation muss der Quellterm der Feldgleichung die Beiträge *aller* Systembestandteile (Materie und nichtgravitative Felder) umfassen und erfüllt daher automatisch Gl. (2.25). Die linke Seite unseres Ansatzes für die Feldgleichungen (der Ricci-Tensor) ist aber i.a. *nicht* kovariant divergenzfrei, und dies zusätzlich zu fordern ist eine zu starke Einschränkung (sie impliziert nämlich $R \propto T^l{}_l = const$). Es erscheint natürlicher, den Ricci-Tensor zu einem Tensor zu modifizieren, dessen kovariante Divergenz *identisch* verschwindet. Dies gelingt mit Hilfe der Bianchi-Identität (2.21): Überschieben wir diese Gleichung mit $\delta_i{}^k$ und g^{jl}, erhalten wir

$$-R_{;m} + 2R^l{}_{m;l} = 0, \tag{2.26}$$

wobei der **Krümmungsskalar** durch

$$R := g^{ik}R_{ik} \tag{2.27}$$

definiert ist. Mit der Definition des **Einstein-Tensors**

$$G_{ik} := R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \tag{2.28}$$

schreibt sich die (zweifach) **kontrahierte Bianchi-Identität** (2.26) als

$$G^l{}_{m;l} = 0. \tag{2.29}$$

Ein mathematisches Theorem (Lovelock) besagt, dass G_{ik} tatsächlich der einzige aus g_{ik} und deren partiellen Ableitungen gebildete Tensor 2. Stufe ist, dessen kovariante Divergenz verschwindet (neben g_{ik} selbst; es sind beliebig hohe Ableitungen zugelassen).

Die Ausführungen des letzten Absatzes führen auf die **Einsteinschen Feldgleichungen** (Einstein-Gleichungen)

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik}. \tag{2.30}$$

Da im Newtonschen Grenzfall ($u^i \approx (1, \vec{0})$)

$$-R_{00} \approx \frac{\Delta V}{c^2} = 4\pi \frac{G\epsilon}{c^4}$$

und

$$T_{ik} = \epsilon u_i u_k \approx \epsilon \delta_{i0} \delta_{k0}$$

(staubartige Materie), folgt aus

$$R_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} g^{lm} G_{lm} \tag{2.31}$$

($\Rightarrow R_{00} \approx G_{00}/2$) und (2.30)

$$\kappa = 8\pi \frac{G}{c^4}. \tag{2.32}$$

Wegen der Symmetrie des Einstein-Tensors (2.28) und der kontrahierten Bianchi-Identität (2.29) sind die Einstein-Gleichungen ein System von $10 - 4 = 6$ unabhängigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für die 10 algebraisch unabhängigen Komponenten des metrischen Tensors. Daher ist zu erwarten, dass die Lösungen in Klassen mit je 4 freien Funktionen zerfallen. Diese entsprechen der Tatsache, dass Lösungen nur bis auf AKTen bestimmt sind. Der Riemann-Tensor und daher auch der Einstein-Tensor ist linear in den 2. Ableitungen der Metrik (allerdings hängen deren Koeffizienten von der Metrik ab). Aus diesem Grunde sind die Einstein-Gleichungen *quasilinear*. Bemerkenswert ist auch, dass die ART die *Symmetrie* des EIT voraussetzt. Das hat Anlass zu Verallgemeinerungen der Theorie in Hinblick auf nichtklassische (fermionische) Materie gegeben. Eine unmittelbare physikalische Konsequenz der Einstein-Gleichungen und der oben verwendeten physikalischen Bedeutung von R_{00} ist, dass in der ART wegen (2.31) nicht nur ϵ, sondern (im Fall eines idealen Fluids) $\epsilon + 3p$ zur schweren Masse einer isolierten Materieverteilung beiträgt, d.h. auch Druck wirkt anziehend.

Die Einstein-Gleichungen implizieren die Geodätengleichung für strukturlose Testteilchen. Beweis: Betrachte eine Ansammlung von solchen Teilchen

$\rightarrow$ Kontinuumslimes: Staub $\Rightarrow T_{ik} = \epsilon u_i u_k$. Daher

$$0 = \nabla_k T^{ik} = u^i \nabla_k (\epsilon u^k) + \epsilon \underbrace{u^k \nabla_k u^i}_{a^i}. \tag{2.33}$$

Angenommen, die Vierbeschleunigung erfüllt $a \neq 0$. Dann sind wegen $u^i a_i = 0$ u und a linear unabhängig, und aus (2.33) folgt $\epsilon = 0$. Daher folgt aus $\epsilon \neq 0$, dass $a = 0$, d.h. die Geodätengleichung. (Außerdem folgt die *Kontinuitätsgleichung* $\nabla_k (\epsilon u^k) = 0$.)

Kapitel 3

Linearisierte Gravitationstheorie

3.1 Lineare Näherung der Feldgleichungen

3.1.1 Feldgleichungen und Newtonscher Grenzfall

Wie in 2.1.4 setzen wir $g_{ik} = \eta_{ik} + 2h_{ik}$ mit einer kleinen Korrektur h_{ik} voraus, so dass $h^i{}_k \approx \eta^{ij} h_{jk}$. Betrachten wir nun eine infinitesimale Koordinatentransformation

$$x^i = x'^i + 2\Lambda^i(x'),\ \Lambda^2 \approx 0,\ \Lambda h \approx 0.$$

$$\Rightarrow \eta_{ik}+2h'_{ik} = g'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} g_{mn} = (\delta^m_i+2\Lambda^m{}_{,i})(\delta^n{}_k+2\Lambda^n{}_{,k})(\eta_{mn}+2h_{mn}) \Rightarrow$$

$$h'_{ik} = h_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}, \tag{3.1}$$

wo $\Lambda_i \equiv \eta_{im}\Lambda^m$. Gleichung (3.1) beschreibt eine abelsche "Eichtransformation", d.h. das Resultat zweier solcher Transformationen hängt nicht von ihrer Reihenfolge ab. Der Riemann-Tensor der linearen Näherung, $R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l}$ mit $\Gamma_{ijk} = h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}$, ist eichinvariant (s. Übungen), daher auch der Ricci-Tensor

$$R_{ij} \equiv R^l{}_{ijl} = h^l{}_{l,ij} - h_{il}{}^{,l}{}_j - h^l{}_{j,il} + h_{ij}{}^{,l}{}_l. \tag{3.2}$$

Wie in der Elektrodynamik vereinfacht sich die linke Seite der Feldgleichungen durch Auferlegen einer Eichbedingung. Das Analogon zur Lorenz-Eichung ist die **harmonische Eichbedingung**

$$h_{ik}{}^{,k} - \frac{1}{2}h^k{}_{k,i} = 0. \tag{3.3}$$

Sie ist lokal immer zu erreichen: Angenommen, (3.3) ist nicht erfüllt, dann existiert eine Eichtransformation $h'_{ik} = h_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}$, so dass h'_{ik} die harmonische Eichbedingung erfüllt. Dazu ist das Vektorfeld Λ^i nur so zu wählen, dass $\Box\Lambda_i = -({h_{ik}}^{,k} - \frac{1}{2}h^k_{k,i})$ mit dem d'Alembert-Operator $\Box \equiv \eta^{ij}\partial_i\partial_j$ gilt (s. Übungen). In den Übungen wird auch gezeigt, dass die harmonische Eichbedingung (3.3) aus der **harmonischen Koordinatenbedingung**

$$\Box_g x^i = 0 \tag{3.4}$$

folgt, wobei

$$\Box_g := g^{ij}\nabla_i\nabla_j. \tag{3.5}$$

Einsetzen der harmonischen Eichbedingung in (3.2) vereinfacht den Ricci-Tensor zu

$$R_{ij} = \Box h_{ij}. \tag{3.6}$$

Da $R_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}{G_l}^l$, lauten die **linearisierten Einstein-Gleichungen in der harmonischen Eichung**

$$\Box h_{ik} = -\kappa(T_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}{T_l}^l). \tag{3.7}$$

Betrachten wir nun den **Newtonschen Grenzfall** $T_{ik} = diag(\epsilon, 0, 0, 0)$ zeitunabhängig:

$$\Rightarrow \Box h_{ik} = 0 \ f.\ i \neq k,$$
$$\Box h_{ii} = -\frac{\kappa}{2}\epsilon \quad i = 0, \cdots, 3.$$

Im statischen Fall (h_{ik} zeitunabhängig) reduziert sich der d'Alembert-Operator auf den Laplace-Operator, und die letzte Gleichung daher auf die Poisson-Gleichung

$$\Delta h_{ii} = -4\pi G\epsilon \tag{3.8}$$

für die Komponenten h_{ii}, die daher mit dem Negativen des Newtonschen Potentials V zu identifizieren sind. Wir erhalten somit aus der Newtonschen Näherung der Feldgleichungen das **Linienelement in 1. post-Newtonscher Näherung**

$$ds^2 = (1 + 2V(\vec{x}))dt^2 - (1 - 2V(\vec{x}))d\vec{x}^2. \tag{3.9}$$

Man beachte, dass zwar die Quelle als schwach, druckfrei und statisch vorausgesetzt, aber keinerlei Einschränkung an die Geschwindigkeit von Testteilchen gemacht wurde. Daher enthält das Linienelement (3.9) mehr Information als das Linienelement (2.11) und geht damit bereits über die Newtonsche Theorie hinaus.

3.1.2 Das elektromagnetische Analogon

Der Energie-Impuls-Tensor hat die allgemeine Form

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} \epsilon & -\vec{S}^T \\ -\vec{S} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

wo $\vec{S}$ die Energiestromdichte (Impulsdichte) bedeutet. Definieren wir

$$\psi_{ik} := h_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}{h_l}^l, \tag{3.11}$$

wird die harmonische Eichbedingung (3.3) zu

$$\psi^{ik}_{\ \ ,k} = 0 \tag{3.12}$$

und die linearisierte Feldgleichung (3.7) zu

$$\Box\psi_{ik} = -\kappa T_{ik} \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow \Box\psi_{0i} = \kappa S_i \tag{3.14}$$

mit der Vierer-Energiestromdichte

$$(S_i) = (-\epsilon, \vec{S}) \tag{3.15}$$

(kovariant: $S^i = -{T^i}_k u^k$ ist die physikalische Vierer-Energiestromdichte gemessen von einem Beobachter mit Vierergeschwindigkeit u). Der Vergleich mit den Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Viererpotential in der Lorenz-Eichung (in Gauß'schen Einheiten)

$$\Box A_i = -4\pi j_i$$

mit

$$j_i = (-\rho, \vec{j})$$

liefert die formale Korrespondenz

$$A_i \leftrightarrow -\frac{1}{2}\psi_{0i},\ j_i \leftrightarrow GS_i. \tag{3.16}$$

Mit der Umkehrung von (3.11),

$$h_{ik} = \psi_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}{\psi^l}_l \Rightarrow h_{0\alpha} = \psi_{0\alpha},$$

folgt insbesondere die Entsprechung

$$h_{0\alpha} \leftrightarrow -2A_\alpha. \tag{3.17}$$

Wir erwarten daher eine "**gravimagnetische**" Wechselwirkung von Energieströmen analog zum klassischen Magnetismus von Ladungsströmen (die englische Bezeichnung für Gravimagnetismus ist "gravitomagnetism"). Diese Analogie wird im Abschnitt 3.2 mit den Bewegungsgleichungen vervollständigt.

3.1.3 Allgemeine Lösung der linearisierten Einstein-Gleichungen

Die Feldgleichungen (3.7) können bei gegebener Quelle mit der retardierten Greenfunktion (entsprechend einem verschwindenden einlaufenden Feld) für den d'Alembert-Operator,

$$G^{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(t - |\vec{x}|),$$

gelöst werden:

$$\Box G^{ret}(x) = -\delta^{(4)}(x) \Rightarrow$$

$$h_{ik}(t, \vec{x}) = 2G \int d^3x' \frac{T_{ik}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') - \frac{1}{2}\eta_{ik}T_l{}^l(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.18)$$

Insbesondere erhält man für ein isoliertes System (konzentriert um $r \equiv |\vec{x}| = 0$), falls $r \gg$Ausdehnung des Systems,

$$h_{00}(t, r) = \frac{2G}{r} \int d^3x'(T_{00} + \frac{1}{2}T_l{}^l)_{ret}. \quad (3.19)$$

Gemäß der SRT ist die träge Masse (im Schwerpunktsystem) gegeben durch

$$M_{in} \doteq P^0 = \int d^3xT^{00}.$$

Für "normale" Materie (Druckterme vernachlässigbar) gilt

$$T_l{}^l \approx -T_{00} \Rightarrow V = -h_{00} = -\frac{GM_{in}}{r} \Rightarrow M_{g,act} = M_{in},$$

also die Gleichheit von aktiver schwerer Masse und träger Masse, wie zu erwarten. Allgemeiner läßt sich zeigen (Übungsaufgabe), dass *jede stationäre* Energie-Impulsverteilung das asymptotische Feld

$$h_{00} = \frac{GM_{in}}{r} \quad (3.20)$$

erzeugt.

3.2 Linearisierte Bewegungsgleichungen

3.2.1 Gravimagnetismus

Mit Beibehaltung der Terme erster Ordnung in $\vec{v}$ ($\dot{x} \approx (1, \vec{v})$) lauten die Raumkomponenten der Geodätengleichung

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\ 00} + 2\Gamma^\alpha_{\ 0\beta}\dot{x}^\beta \approx 0. \tag{3.21}$$

Im *stationären* Feld der linearen Näherung ist

$$\Gamma^\alpha_{\ 00} \approx -h_{00,\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{\ 0\beta} \approx \Gamma_{\alpha 0\beta} \approx h_{\alpha 0,\beta} - h_{0\beta,\alpha}.$$

Die linearisierte Bewegungsgleichung im stationären Feld lautet daher

$$\ddot{x}^\alpha = h_{00,\alpha} - 2(h_{0\alpha,\beta} - h_{0\beta,\alpha})\dot{x}^\beta.$$

Wegen $h_{ik} = \psi_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\psi^l_{\ l}$ folgt daraus im druckfreien Fall ($\psi_{\alpha\beta} = 0$)

$$\ddot{x}^\alpha = \frac{1}{2}\psi_{00,\alpha} - 2(\psi_{0\alpha,\beta} - \psi_{0\beta,\alpha})\dot{x}^\beta. \tag{3.22}$$

Diese Bewegungsgleichung legt es nahe, gravielektrische und gravimagnetische Feldstärken zu definieren:

$$\mathcal{E}_\alpha := -\frac{1}{2}\psi_{00,\alpha} \leftrightarrow -A^0_{,\alpha}, \tag{3.23}$$

$$\mathcal{B}_\gamma := -\frac{1}{2}(\partial_\alpha\psi_{0\beta} - \partial_\beta\psi_{0\alpha}) \leftrightarrow A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}, \tag{3.24}$$

wobei in der letzten Gleichung (α, β, γ) zyklisch aus (1,2,3) hervorgehen (vgl. (3.16). Damit ist

$$-\frac{1}{2}(\psi_{0\alpha,\beta} - \psi_{0\beta,\alpha})\dot{x}^\beta = -\mathcal{B}_\gamma\dot{x}^\delta + \mathcal{B}_\delta\dot{x}^\gamma$$

mit (α, δ, γ) zyklisch aus (1,2,3). Die Bewegungsgleichung (3.22) lässt sich daher in der Form

$$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\mathcal{E}} - 4\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}} \tag{3.25}$$

schreiben. Die rechte Seite dieser Gleichung hat bis auf einen numerischen Faktor die Form der Lorentzkraft, allerdings sind die Vorzeichen wegen des anziehenden Charakters der Gravitation umgekehrt. Der geschwindigkeitsabhängige Term ist wesentlich für das bereits angedeutete Phänomen des

Gravimagnetismus. Z.B. liefert er einen abstoßenden Beitrag zur Kraft, die zwei parallele Massenströme aufeinander ausüben (der aber von der immer vorhandenen Newtonschen Anziehung dominiert wird).

Folgende gravimagnetische Effekte sind von fundamentalem Interesse:

1. Die Beeinflussung von **Satellitenbahnen** um rotierende Zentralkörper (**Thirring-Lense-Effekt**(1918)):

a) *Präzession der Bahnebene* = konstante Wanderung des aufsteigenden Knotens in Rotationsrichtung. Der Effekt wurde durch die lasergestützte Vermessung der Bahnen zweier künstlicher Erdsatelliten mit der Bezeichnung LAGEOS verifiziert. Die erwartete Präzession von ca. 0,03"/Jahr wurde im Zeitraum 1993/01-2003/12 mit einer Genauigkeit von besser als 10 Prozent bestätigt. Eine weitere qualitative Bestätigung des Effekts erblickt man in den sogenannten quasiperiodischen Oszillationen der Intensität der Röntgenstrahlung von Akkretionsscheiben um Neutronensterne und Schwarze Löcher. Diese Oszillationen entsprechen einer Präzessionsfrequenz in der Größenordnung von 50 Hz!

b)*Präzession der Periapsis* = konstante Änderung des Arguments der Periapsis. Sie wurde ebenfalls mit den LAGEOS-Satelliten (mit Periapsis = Perigäum) verifiziert, für die sie ca. 0,05"/Jahr ausmacht.
Im Fall der Erde werden die Effekte a) und b) von den gleichartigen, aber viel größeren Effekten überdeckt, die die Abweichung des Geoids von der Kugelgestalt (insbesondere das Massenquadrupolmoment J_2) schon gemäß der Newtonschen Theorie erzeugt.

2. **Spin-Spin-Wechselwirkung**
Dieser Effekt ist das exakte Analogon zur Präzession eines rotierenden magnetischen Dipols (Elementarteilchen mit magnetischem Moment) im äußeren Magnetfeld, verursacht durch das Drehmoment

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \tag{3.26}$$

wo $\vec{s}$ der Eigendrehimpuls des Dipols und

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})$$

das magnetische Dipolmoment ist. Der entsprechende gravimagnetische Effekt folgt gemäß der Bewegungsgleichung (3.25) aus der Substitution $\vec{\mu} \to \vec{m}$, $\vec{B} \to -4\vec{\mathcal{B}}$ mit dem "gravimagnetischen Moment"

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{S}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{s}.$$

Da $\vec{S}$ hier die Rolle der *passiven* gravitativen Ladungsssstromdichte hat, ist es nicht mit G zu multiplizieren; außerdem kommt die Bedeutung von $\vec{S}$ als Impulsdichte zum Tragen. Das gravimagnetische Moment ist also im wesentlichen der Drehimpuls (da im stationären Fall $div\vec{S} = 0$, kommt es auf die Wahl des Koordinatenurspungs nicht an, vgl. die Magnetostatik). Ein gravimagnetischer Dipol wird daher durch einen symmetrischen Kreisel realisiert. Für einen solchen übersetzt sich (3.26) in die Präzessionsgleichung

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = -\vec{m} \times 4\vec{\mathcal{B}} = 2\vec{\mathcal{B}} \times \vec{s}, \tag{3.27}$$

woraus man die *gravimagnetische Präzessionsfrequenz*

$$\vec{\Omega}_m = 2\vec{\mathcal{B}} \tag{3.28}$$

abliest. Es ist naheliegend, ein **frei fallendes Bezugssystem** (FFS) so zu definieren, dass in einem solchen ein Kreisel konstanten Drehimpulsvektor $\vec{s}$ hat (eine mathematische Definition eines FFS wird am Ende dieses Kapitels gegeben). Damit gewinnen wir die Aussage, dass ein FFS i.a. relativ zum stationären KS der linearen Näherung rotiert, wobei $\vec{\Omega}_m$ der Beitrag "ferner rotierender Massen" ist. Dieser "Mitzieheffekt" (engl. "frame dragging") kann als eine Realisation des *Machschen Prinzips* aufgefasst werden, das das Phänomen der Trägheit überhaupt als eine Konsequenz der Existenz solcher ferner Massen erkärt. Die volle Gültigkeit dieses Prinzips in der ART ist jedoch umstritten. Außerdem ist $\vec{\Omega}_m$ nicht der einzige Beitrag zur Präzession frei fallender Kreisel im Gravitationsfeld, sondern er wird i.a. von der noch zu besprechenden *geodätischen Präzession* dominiert.

Experimentell interessant ist vor allem die durch die Erdrotation hervorgerufene gravimagnetische Präzession. Nähern wir die Erde als eine starr rotierende Kugel mit Drehimpuls $\vec{J}$, dann erzeugt ihr gravimagnetisches Dipolmoment $\vec{M} = \frac{1}{2}\vec{J}$ ein reines Dipolfeld. Der Vergleich mit dem Magnetfeld eines magnetischen Dipols mit Moment $\vec{\mu}$,

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{\mu}}{r^3} \quad (\vec{n} \equiv \frac{\vec{x}}{r}),$$

liefert mit der Substitution $\vec{\mu} \to G\vec{M}$ sofort

$$\vec{\Omega}_m = 2\vec{\mathcal{B}} = G\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{J}}{r^3}. \tag{3.29}$$

Diese Frequenz ist auch auf der Erdoberfläche sehr klein. Bevor wir auf ihre Messung eingehen, noch eine Bemerkung zum Machschen Prinzip. Der Drehimpuls ferner um uns rotierender Massen mit Gesamtmasse M und Winkelgeschwindigkeit ω ist von der Größenordnung $J \sim Mr^2\omega$

$$\Rightarrow \Omega_m \sim \frac{GJ}{r^3} \sim \frac{GM}{r}\omega \sim \frac{\mathcal{M}}{r}\omega.$$

Daraus lesen wir den “Mitziehfaktor” $\sim \mathcal{M}/r$ (halber Schwarzschildradius von M durch Abstand) ab. Dieser Mitziehfaktor könnte im Fall eines geschlossenen Universums durchaus dem Wert 1 nahekommen, der exakt dem Machschen Prinzip entspräche.

Die Messung der gravitativen Spin-Spin-Wechselwirkung wurde nach einem Vorschlag von Schiff (1959) endlich durch das Satellitenexperiment Gravity Probe-B realisiert. Dabei handelt es sich um elektrostatisch “aufgehängte” Kreisel innerhalb eines Satelliten auf einer polaren Erdumlaufbahn in 640 km Höhe. Die Theorie sagt für diese eine mittlere Präzessionsfrequenz von Ω_m=0,04”/Jahr voraus (Übungsaufgabe). Allerdings gibt es noch zusätzlich den “statischen” Effekt der geodätischen Präzession (s. unten) von 6,6”/Jahr. Die Messperiode 2004/08-2005/08 (353 Tage) wurde durch 6 “Anomalien” unterbrochen (insgesamt waren dann noch 307 Tage auswertbar), was eine Messgenauigkeit von 2 Prozent (statt der ursprünglich erhofften 1 Prozent) für die gravimagnetische Präzession und von 0,02 (statt 0,01) Prozent für die geodätische Präzession erwarten ließ. Wegen unerwarteter apparatbedingter Störungen der Kreiselbewegung dauert allerdings die Datenauswertung noch mindestens bis September 2008, und bisher ist nur die geodätische Präzession einwandfrei nachgewiesen. Mehr Details zum Experiment und dessen Auswertung sind auf der Projekt-Homepage *einstein.stanford.edu* nachzulesen.

3.2.2 Geodätische Präzession und Fermi-Walker-Transport

In einem FFS gibt es keine Spin-Präzession. Diese Bedingung lässt sich kovariant als

$$\frac{Ds^i}{ds} = 0 \tag{3.30}$$

formulieren (wir werden in Kapitel 4 sehen, dass diese Bedingung die *Parallelverschiebung* des Vierervektors s^i entlang der Geodäte bedeutet). Hier ist

$$s_i := \epsilon_{ijkl} s^{jk} u^l \tag{3.31}$$

der Spin-Vierervektor, der aus dem Pseudotensor ϵ_{ijkl} (im Minkowskiraum identisch mit dem alternierenden ϵ-Symbol $\epsilon(i,j,k,l)$ (mit $\epsilon(0,1,2,3)=1$)), dem Drehimpulstensor (wohldefiniert im Rahmen der linearen Näherung)

$$s^{jk} = \int_\Sigma (x^j T^{kl} - x^k T^{jl}) d\sigma_l$$

(Σ ist eine raumartige Hyperfläche und $d\sigma_l$ ihr kovektorielles Hyperflächenelement) des frei fallenden Kreisels und der Vierergeschwindigkeit $u^i = dx^i/ds$

gebildet wird. Er reduziert sich in einem mitfallenden System ($u^\alpha \doteq 0$) auf $s^i = (0, \vec{s})$ und ist insbesondere raumartig. Die Gleichung (3.30) ist auch als Bedingung an die raumartigen Achsenrichtungen eines FFS zu verstehen, wenn man s^i durch die entsprechenden Richtungsvektoren ersetzt. Diese Richtungen sind dann nach Wahl eines Anfangsdatums eindeutig festgelegt. Als zeitartige Richtung kommt die Vierergeschwindigkeit u hinzu, die automatisch (3.30) erfüllt. Wählt man die Richtungen aufeinander orthogonal und als Koordinatenlinien Geodäten mit diesen Richtungen als Anfangsdaten, dann definieren die Bogenlängen entlang dieser Geodäten ein natürliches **frei fallendes Koordinatensystem**. Offenbar ist die Eigenzeit der Fallbewegung die Zeitkoordinate.

Experimentell ist man an der Rotation der Kreiselachse "relativ zu den Fixsternen", gemessen im mitfallenden System, interessiert. In der linearen Näherung und im Fall einer Kreisbahn ist die entsprechende Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\Omega}_{geod} \times \vec{s} \tag{3.32}$$

mit

$$\vec{\Omega}_{geod} = \vec{\Omega}_{stat} + \vec{\Omega}_m. \tag{3.33}$$

Hier bedeutet $\vec{\Omega}_{stat}$ den Beitrag der *statischen* Metrik (3.9), d.h. die geodätische Präzession im Fall $h_{0\alpha} = 0$. Wir werden zeigen, dass

$$\vec{\Omega}_{stat} = -\frac{3}{2}\vec{v} \times \vec{\nabla}V. \tag{3.34}$$

Bevor wir das tun, bemerken wir noch, dass im Fall einer Erdumlaufbahn die statische Präzession in der $(\vec{x}, \vec{v})$-Ebene = Bahnebene, die gravimagnetische Präzession aber um $\vec{\mathcal{B}}$ stattfindet. Die polare Umlaufbahn für Gravity Probe-B wurde deswegen gewählt, weil auf dieser $\vec{\Omega}_m \perp \vec{\Omega}_{stat}$ ist, was die Trennung dieser beiden Effekte erleichtert. Die statische Präzession im Gravitationsfeld der Sonne wurde für das Erde-Mond-System seit 1987 mit dem Lunar Laser Ranging verifiziert (sowohl relativ zum "planetary frame" (erdzentriertes, nicht rotierendes Bezugssystem) als auch relativ zu weit entfernten Quasaren unter Zuhilfenahme von VLBI (very long baseline interferomety = Bestimmung der Himmelskoordinaten mit hochauflösender Radioastronomie). (Da Mondbahnebene und Ekliptik nur wenig zueinander geneigt sind, äußert sich die Präzession vorwiegend in einer Wanderung des Perigäums, sodass tatsächlich die Präzession des Lenz-Vektors gemessen wird.)

Herleitung der statischen Präzession. Gemäß der Definition von $\vec{\Omega}_{stat}$ setzen wir das Linienelement

$$ds^2 = (1 + 2V)dt^2 - (1 - 2V)d\vec{x}^2 \tag{3.35}$$

und berechnen Ds^α/ds. Es gilt

$$0 = \frac{Ds^\alpha}{d\tau} = \dot{s}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\ ij} s^i u^j \approx \dot{s}^\alpha + (h_{\alpha i,j} + h_{\alpha j,i} - h_{ij,\alpha}) s^i u^j \approx$$

$$\dot{s}^\alpha + h_{\alpha\alpha,\beta} s^\alpha v^\beta + h_{\alpha\alpha,\beta} s^\beta v^\alpha - h_{00,\alpha} s^0 - h_{\beta\gamma,\alpha} s^\beta v^\gamma \approx$$

$$\dot{s}^\alpha - V_{,\beta}(s^\alpha v^\beta + s^\beta v^\alpha) + V_{,\alpha} s^0 + V_{,\alpha} s^\beta v^\beta \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V) + \vec{v}(\vec{s} \cdot \vec{\nabla} V) - \vec{\nabla} V (s^0 + \vec{s} \cdot \vec{v}). \tag{3.36}$$

Aus (3.31) folgt $s_i u^i = 0$ und daher $s^0 = \vec{s} \cdot \vec{v}$. Damit wird (3.36) zu

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V) + \vec{v}(\vec{s} \cdot \vec{\nabla} V) - 2\vec{\nabla} V (\vec{s} \cdot \vec{v}). \tag{3.37}$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt eine Dilatation des Spinvektors (und verschwindet im Fall einer Kreisbahn) und ist für uns nicht weiter interessant. Die restlichen beiden Terme enthalten den gesuchten Effekt. Um dies zu erkennen, bemerken wir, dass zwar die Viererbeschleunigung des freifallenden Kreisels, nicht aber seine kinematische Beschleunigung relativ zu einem ruhenden Beobachter im Unendlichen verschwindet. Für diesen sind unsere Koordinaten kartesisch, und er wird allein auf Grund der Minkowskigeometrie die *Thomas-Präzession* eines beschleunigten Kreisels messen. Die Thomas-Präzession impliziert für *kleine Geschwindigkeiten* (insbesondere die hier interessierenden gebundenen Bahnen mit $v^2 \sim |V|$)

$$\frac{d\vec{s}}{dt}|_{Thomas} \approx \vec{v}(\vec{s} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt})$$

(Übungsaufgabe). Gleichung (3.37) lässt sich daher nach Weglassen des Dilatationsterms wegen $d\vec{v}/dt = -\vec{\nabla} V$ auch darstellen als

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}|_{Thomas} + 2\vec{v}(\vec{s} \cdot \vec{\nabla} V) - 2(\vec{v} \cdot \vec{s})\vec{\nabla} V = \frac{d\vec{s}}{dt}|_{Thomas} + 2\vec{s} \times (\vec{v} \times \vec{\nabla} V) \equiv$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt}|_{Thomas} + \vec{\Omega} \times \vec{s}, \quad \vec{\Omega} = -2\vec{v} \times \vec{\nabla} V.$$

Diese Gleichung bedeutet, dass der Kreisel zusätzlich zur Thomas-Präzession mit Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\Omega}_{Thomas} \approx -\frac{1}{2}\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{\nabla} V$$

(Übungsaufgabe) noch mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ präzediert. Die physikalische Präzessionsfrequenz relativ zu einem ruhenden Beobachter im Unendlichen (gleichbedeutend mit der Präzessionsfrequenz eines Sterns im frei fallenden System) ist daher

$$\vec{\Omega}_{stat} = \vec{\Omega}_{Thomas} + \vec{\Omega} = -\frac{3}{2}\vec{v} \times \vec{\nabla} V.$$

(Im Fall einer *beliebigen* Weltlinie mit Viererbeschleunigung a ist zu $\vec{\Omega}_{geod}$ der zusätzliche Beitrag der Thomas-Präzession $-\frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{a}$ zu addieren.)

Fermi-Walker-Transport. Durch welche Gleichung wird der Transport eines Kreisels entlang einer *beliebigen* Weltlinie beschrieben? Die Antwort folgt eindeutig aus den Forderungen, dass die gesuchte Gleichung sich im unbeschleunigten Fall auf (3.30) reduziert, die Ableitung der Vierergeschwindigkeit die Viererbeschleunigung ergeben muss und das innere Produkt erhalten bleibt:

$$\frac{Ds^i}{ds} = (u^i a_j - a^i u_j) s^j. \tag{3.38}$$

Diese Gleichung definiert den **Fermi-Walker-Transport** für beliebige (auch zeitartige) Vierervektoren s. Im Minkowskiraum reduziert sich der Fermi-Walker-Transport auf die Thomas-Präzession.

Aus dem Fermi-Walker-Transport läßt sich für einen beliebig beschleunigten (nicht rotierenden) Beobachter ein optimal angepasstes KS auf folgende Weise gewinnen: Seien $\mathbf{e}_1(s),\ \mathbf{e}_2(s),\ \mathbf{e}_3(s)$ drei normierte, auf u und untereinander orthogonale, entlang der Weltlinie Fermi-Walker-verschobene Vektorfelder (alle vier bilden ein sog. *orthonormales Vierbeinfeld*). Einem (nicht zu weit von der Weltlinie entfernten) Raum-Zeit-Punkt P können dann auf folgende Weise Koordinaten zugeordnet werden: Die Zeitkoordinate sei der Wert von s, für den eine auf die Weltlinie orthogonale (raumartige) geodätische (d.h. von Geodäten aufgespannte) Hyperfläche den Punkt P enthält. In dieser Hyperfläche existiert eine raumartige Geodäte, die die Weltlinie mit P verbindet. Der normierte Tangentenvektor t in ihrem Anfangspunkt definiert dann durch $x^\alpha = Lt^\alpha$ die räumlichen Koordinaten von P, wobei t^α die Komponenten von t bezüglich $\mathbf{e}_\alpha(s)$ und L die Länge der Verbindungsgeodäte sind. Diese Konstruktion definiert ein **Fermi-Koordinatensystem** für die Weltlinie. Offenbar stimmt es im Fall einer Geodäte mit dem früher definierten frei fallenden KS überein. Entlang der Weltlinie gilt in Fermi-Koordinaten $g_{ik} \doteq \eta_{ik}$, im Fall einer Geodäte außerdem $\Gamma^i{}_{jk} \doteq 0$.

Kapitel 4

Mathematische Vertiefung der ART

4.1 Differentialgeometrie

4.1.1 Mannigfaltigkeiten

Die Raum-Zeit der ART wird als 4-dimensionales Kontinuum modelliert, dessen globale Topologie aber im allgemeinen nicht mit $\mathbf{R}^4$ übereinstimmt. Für eine präzise Formulierung benötigt man die folgenden Definitionen, die Grundbegriffe der allgemeinen Topologie voraussetzen:

Topologische Mannigfaltigkeit $M =$ topologischer Raum (*Hausdorff* (= punktetrennend) und *parakompakt* (jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche Verfeinerung $\Rightarrow \exists$ Zerlegung der Eins)) lokal homöomorph zum $\mathbf{R}^n$, d.h. $\forall P \in M \; \exists \; U_P \ni P, \; \psi_P : \; U_P \to O_P \subset \mathbf{R}^n$ umkehrbar stetig. U_P (*Kartenumgebung*) ist eine offene Menge, die P enthält. Die Abbildung ψ_P heißt **Karte**. Sie definiert **lokale Koordinaten** durch $U_P \ni Q \mapsto (x^1, \cdots, x^n)$.
Einfache Beispiele sind stetige (auch geknickte) Streckenzüge ($n = 1$) im $\mathbf{R}^2$ und Flächen ($n = 2$), die stetig im $\mathbf{R}^3$ eingebettet sind. Bereits im Fall der *Sphäre* stellt es sich heraus, dass die Mannigfaltigkeit nicht durch eine einzige Karte überdeckt werden kann: Die stereografische Projektion schließt einen "Pol" aus, das Kugelkoordinatensystem deren zwei. Im Überlappungsgebiet zweier Karten wird der *Kartenwechsel* durch eine stetige Koordinatentransformation beschrieben.
Um differenzierbare Funktionen definieren zu können, benötigt man den Begriff

Differenzierbare (glatte) Mannigfaltigkeit M = n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit einer **Differenzierbarkeitsstruktur**. Eine solche wird definiert durch einen **Atlas** $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}$: $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\psi_\alpha : U_\alpha \to O_\alpha \subset \mathbf{R}^n$ sind Karten. Falls $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, ist $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine differenzierbare Abbildung (ein Diffeomorphismus) zwischen offenen Teilmengen des $\mathbf{R}^n$.
Zwei Atlanten $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ heißen **verträglich**, wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ wieder ein Atlas ist. (In der Mathematik wird eine differenzierbare Mannigfaltigkeit gleichgesetzt mit einem *maximalen Atlas*, d.i. ein Atlas, der nur mit Teilmengen seiner selbst verträglich ist.)
$f : M \to \mathbf{R}$ heißt **differenzierbar**, wenn die lokalen *Repräsentanten* $\tilde{f}_\alpha = f \circ \psi_\alpha^{-1} : O_\alpha \to \mathbf{R}$ auf O_α differenzierbar sind. (In der Physik wird nicht immer zwischen f und seinen Repräsentanten unterschieden.)
Ein Homöomorphismus $\Phi : M \to M'$ heißt (aktiver) **Diffeomorphismus**, wenn die Repräsentanten $\psi'_i \circ \Phi \circ \psi_j^{-1} : O_j \to O'_i$ (falls definiert) Diffeomorphismen sind. Dabei sind O_j, O'_i i.a. nur gewisse offene Teilmengen der ursprünglichen Kartengebiete. M' kann natürlich auch mit M identisch oder auch dieselbe topologische Mannigfaltigkeit mit einer anderen Differenzierbarkeitstruktur sein. Nicht verträgliche Differenzierbarkeitsstrukturen sind immer lokal diffeomorph, aber nicht immer global (= *isomorph*). Für $n \neq 4$ ist die Differenzierbarkeitsstruktur von $\mathbf{R}^n$ bis auf Isomorphie eindeutig, aber $\mathbf{R}^4$ hat überabzählbar unendlich viele nicht isomorphe Differenzierbarkeitsstrukturen (von denen die Physik bis auf die Standard-Struktur noch keinen Gebrauch gemacht hat). Wegen der (passiven) Invarianz unter AKTen ist die ART auch invariant unter aktiven Diffeomorphismen, was zur Folge hat, dass ein Punkt $P \in M$ keine "ontologische Signifikanz" (Individuation) hat. Eine Raum-Zeit ist daher eine *Äquivalenzklasse* von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (mit weiteren zu spezifizierenden Eigenschaften).

Beispiele für differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind *glatte* Flächen im $\mathbf{R}^3$. In der Tat kann jede Mannigfaltigkeit durch Einbettung in R^n mit genügend großem n realisiert werden, doch erweist sich dies als unhandlich.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt **orientierbar**, wenn ein orientierter Atlas existiert, d.h. alle Übergangsfunktionen positive Jacobi-Determinante haben.

Im Falle der Einbettung in einem $\mathbf{R}^n$ besitzt eine glatte Mannigfaltigkeit in jedem Punkt P einen *Tangentialraum*, den man sich als von den infinitesimalen Verbindungsvektoren von P zu benachbarten Punkten erzeugt vorstellen kann. Die exakte und einbettungsunabhängige Definition von Tangentenvektoren macht Gebrauch von der Korrespondenz zwischen Vektoren $v = (v^1, \cdots, v^n)$ und *Richtungsableitungen* $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ im $\mathbf{R}^n$:
(DEF) T_P = **Tangentenraum** im Punkte $P \in M$: = linearer Raum der

Abbildungen $v : C^\infty(U(P)) \to \mathbf{R}$ mit
(i) $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$ (Linearität),
(ii)$v(fg) = v(f)g(P) + f(P)v(g)$ (Leibniz-Regel),
d.h. v ist eine **Derivation** von $C^\infty(U(P))$ nach $\mathbf{R}$. Wir nennen eine solche Abbildung **Tangentenvektor** oder Vektor in P. $U(P)$ ist eine beliebig kleine Umgebung von P (man benötigt zur Definition von Tangentenvektoren nicht einmal Funktionen, sondern nur *Funktionskeime*). In den Übungen wird gezeigt, dass jede Karte durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_P f := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}|_{\psi(P)}$$

eine Basis (**Koordinatenbasis**) $\{\partial/\partial x^i|_P\}$ für T_P definiert. Daher ist $dim\ T_P = dim\ M$. Die Entwicklung eines Tangentenvektors v nach diesen Basisvektoren definiert seine *Komponenten* in den lokalen Koordinaten durch

$$v = v^i \partial_i|_P.$$

Bei *Kartenwechsel* haben wir

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^k} \Rightarrow v'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}|_P v^i,$$

also das bekannte Transformationsverhalten eines Vektors.
(DEF) **Kotangentialraum** in P = Dualraum T_P^* des Tangentialraums, die Elemente heißen Ko(tangenten)vektoren. T_P^* wird erzeugt von der **dualen Koordinatenbasis**

$$\{dx^i|_P\} : \ dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i{}_j.$$

Aus der Entwicklung $T_P^* \ni w^* = w_i dx^i$ erhält man wieder das bekannte Transformationsverhalten von Kovektorkomponenten:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \Rightarrow w'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} w_i.$$

Ein **Tensor in P vom Typ (p, q)** ist eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{T_P^* \times \cdots \times T_P^*}_{p} \times \underbrace{T_P \times \cdots \times T_P}_{q} \to \mathbf{R}$$

(diese Definition benötigt die endliche Dimensionalität von T_P). Die Komponenten eines Tensors T sind definiert durch die Entwicklung nach einer Koordinatenbasis im entsprechenden Tensorproduktraum:

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}, \qquad (4.1)$$

wo z.B. $v \otimes w^*(a^*, b) = v(a^*)w^*(b)$ etc. (wir haben den Bidualraum T_P^{**} auf natürliche Weise mit T_P identifiziert). Das so definierte *Tensorprodukt* liegt neben der offensichtlichen linearen Struktur der *Tensoralgebra* zu Grunde, die alle Tensoren ungeachtet ihres Typs umfasst. Wieder folgt aus der Entwicklung (4.1) das bekannte Transformationsverhalten von Tensorkomponenten. Ein (glattes) **Tensorfeld** auf M ordnet (falls global definiert) jedem Punkt P einen Tensor in P zu (so dass die Komponenten C^∞-Funktionen sind). Alle für Tensoren definierten algebraischen Operationen lassen sich auf (global definierte) Tensorfelder erweitern.

Ein glattes Vektorfeld ist auch eine Derivation: $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, die Menge $X(M)$ aller dieser Vektorfelder ein *Modul* über dem Ring $C^\infty(M)$. Allerdings ist die Verknüpfung $u \circ v$ zweier Vektorfelder i.a. kein Vektorfeld, wohl aber die **Lie-Klammer**

$$[u, v] := u \circ v - v \circ u. \tag{4.2}$$

Total antisymmetrische kovariante Tensorfelder heißen auch **Differentialformen** (*p-Formen* im Fall der Stufe p). Die Koordinatenbasis für p-Formen wird mit Hilfe des **Keilprodukts** notiert:

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \equiv \sum_{j_1, \cdots j_p} \epsilon(j_1, \cdots, j_p) dx^{i_{j_1}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{j_p}},$$

wobei $(j_1, \cdots, j_p)$ alle Permutationen von $(1, \cdots, p)$ durchläuft. Eine p-Form läßt sich wegen der Antisymmetrie des ϵ-Symbols darstellen als

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Das Keilprodukt einer p- mit einer q-Form wird durch Bilinearität und die Assoziativität von

$$(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}}) = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}}$$

definiert. Bemerkenswert ist die Existenz einer kartenunabhängig und global definierten Differentialoperation, nämlich der **äußeren Ableitung**

$$d\omega = \sum \omega_{i_1 \cdots i_p, k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Die Form ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$, und *exakt*, falls $\omega = d\nu$ für ein gewisses ν. Wegen $d^2 = 0$ folgt aus Exaktheit Geschlossenheit, aber die Umkehrung gilt i.a. nur *lokal* (global allerdings im $\mathbf{R}^n$). Außerdem ist für p-Formen ein Integral über (orientierte kompakte) p-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten definiert (durch Zurückführen auf die Integration im $\mathbf{R}^p$ mittels Kartenabbildungen). Insbesondere definiert jede n-Form, die nirgends verschwindet, ein (orientiertes) Volumen. Eine solche Form existiert genau dann, wenn die Mannigfaltigkeit orientierbar ist (allerdings ist mit ω auch $f\omega$ eine Volumsform, wenn f stetig und auf ganz M von 0 verschieden ist). Es gilt der *Hauptsatz der äußeren Differentialrechnung* (verallgemeinerte Satz von Stokes): Sei ω eine (p-1)-Form ($p \geq 1$) und N eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit *mit Rand*, d.h. N ist lokal homöomorph zum Halbraum $H^p := \{x^p \geq 0\} \subset \mathbf{R}^p$, und in den Kartenabbildungen sind die Mengen O durch $O \cap H^p$ zu ersetzen. Dann ist

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega. \tag{4.3}$$

Hier bedeutet ∂N den ((p-1)-dimensionalen) Rand von N, d.h. die Menge der Punkte, die unter Kartenabbildungen in Randpunkte von H^p abgebildet werden. Außerdem ist ∂N mit der *induzierten Orientierung* zu versehen, die jene Vektorbasen auszeichnet, die eine positiv orientierte Basis in N ergeben, wenn man sie durch einen *nach außen* weisenden Vektor ergänzt.

Der für Formen entwickelte Kalkül erlaubt eine kompakte Notation und effiziente Berechnung vieler geometrischer Objekte. Diese Vorlesung verwendet aber vorzugsweise die (abstrakte) Indexnotation.

Das "Prinzip der allgemeinen Kovarianz" fordert, dass die physikalischen Grundgesetze sich als Tensorfeldgleichungen schreiben lassen. Tatsächlich ist es aber nur eine mathematische Notwendigkeit und enthält keine physikalische Information, weil jede beliebige physikalische Theorie sich durch die Einführung "absoluter Objekte" kovariant formulieren lässt. Hilfreich ist aber folgende (notwendigerweise unpräzise) Abwandlung des Prinzips: Die kovariante Formulierung einer Theorie soll möglichst einfach sein.

4.1.2 Affine Mannigfaltigkeiten

Die Differenzierbarkeitsstruktur einer Mannigfaltigkeit definiert zwar die Differenzierbarkeit eines Tensorfeldes, liefert aber nur für Formen einen kovarianten Ableitungsbegriff. Die Definition einer kovarianten Ableitung für beliebige Tensorfelder erfordert daher eine zusätzliche Struktur. Der Inhalt dieser Struktur lässt sich aus der Bemerkung folgern, dass die partielle Ableitung $\partial_i T$ eines Tensorfelds T deshalb kein Tensorfeld ist, weil die Differenz $\tilde{T}(x+dx)-\tilde{T}(x)$ bzw. $T(P)-T(Q)$ ohne eine Identifikation der Vektorräume T_P und T_Q keine invariante Bedeutung hat. Diese Vektorräume sind zwar isomorph, aber nicht *natürlich* isomorph, d.h. es gibt keinen *ausgezeichneten*

Isomorphismus zwischen den beiden. Ein solcher wird auch als **Paralleltransport** bezeichnet. In einem *affinen Raum* besteht das Problem nicht, weil es nur einen einzigen assoziierten Vektorraum gibt. In einer **affinen Mannigfaltigkeit** wird dieser Sachverhalt insofern verallgemeinert, als in dieser ein *wegabhängiger* Paralleltransport definiert ist.

Das dazu benötigte geometrische Objekt gewinnt man durch Betrachten einer infinitesimalen Übertragung eines Tensors T in x nach $x + dx$ (das Ergebnis der Übertragung wird durch einen Querstrich notiert, und das Argument gibt an, in welchem Punkt der Tensor definiert ist, mit $T(x)$ ist also hier kein Tensor*feld* gemeint), $T(x) \mapsto \bar{T}(x + dx)$, und aus der Forderung, dass diese linear in $T(x)$ und in dx ist und sich für $dx \to 0$ auf die Identität reduziert. Für einen Skalar muss offenbar gelten

$$\bar{\phi}(x + dx) = \phi(x),$$

für einen Vektor lautet der allgemeine Ansatz

$$\bar{v}^i(x + dx) = v^i(x) - L^i(x, v, dx).$$

Die geforderte Linearität impliziert

$$L^i(x, v, dx) = L^i{}_{jk}(x) v^j dx^k$$

mit den **Konnexionskoeffizienten** $L^i{}_{jk}(x)$. Diese spezifizieren also das gesuchte geometrische Objekt L, das **affine Konnexion** (auch Affinzusammenhang oder affine Übertragung) genannt wird. Das Paar (M, L) heißt Mannigfaltigkeit mit Affinzusammenhang oder **affine Mannigfaltigkeit**. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit lassen sich unendlich viele Konnexionen definieren.

Da die Parallelverschiebung koordinatenunabhängig definiert sein soll, müssen die Konnexionskoeffizienten ein spezielles Transformationsverhalten unter AKT aufweisen, das noch herzuleiten ist. Aus der Form der infinitesimalen Übertragung folgt insbesondere die Formel für die **Parallelverschiebung** eines Vektors v entlang einer (orientierten) Linie $\mathcal{C}$: Sei $x(\lambda)$ eine Parametrisierung

$$\Rightarrow dv^i = -L^i{}_{jk}(x(\lambda)) v^j \frac{dx^k}{d\lambda} d\lambda \equiv -\mathbf{L}^i{}_j(\lambda) v^j d\lambda \Rightarrow$$

$$\bar{v}(Q) = \mathcal{P}(e^{-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{L}(\lambda') d\lambda'}) v(P), \tag{4.4}$$

wenn P und Q Anfangs- und Endpunkt der Linie zum Parameterwert λ_1 bzw. λ_2 sind ($\mathcal{P}$ bedeutet die *Wegordnung* des nachfolgenden formalen Exponentialintegrals). Die Abbildung $H_{\mathcal{C}}(L) : v(P) \mapsto \bar{v}(Q)$ wird als die **Holonomie** der Konnexion L bezüglich der Linie $\mathcal{C}$ bezeichnet. Sie lässt sich mit der matrixwertigen 1-Form ω, $\omega^i{}_j \equiv L^i{}_{jk}dx^k$, manifest reparametrisierungsinvariant als

$$H_\mathcal{C}(L) = \mathcal{P}e^{-\int_\mathcal{C}\omega}$$

darstellen. Die Darstellung einer affinen Konnexion als matrixwertige 1-Form entspricht genau der üblichen Darstellung der Eichpotentiale in Eichfeldtheorien. Dort sind die Matrixindizes allerdings nicht wie hier Raum-Zeit-Indizes, sondern sie beziehen sich auf eine Darstellung der Lie-Algebra der jeweiligen inneren Symmetriegruppe. Der inneren Symmetriegruppe entspricht hier die allgemeine lineare Gruppe $GL(n)$, die in jedem Tangentenraum wirkt, die Rolle der Eichtransformationen spielen ortsabhängige Basiswechsel in den Tangentenräumen. (Auch Diffeomorphismen lassen sich als Eichtransformationen interpretieren, nämlich als *lokale Translationen* in einem ursprünglich affinen Raum. Da Translationen von partiellen Ableitungen erzeugt werden, haben die zugehörigen "Eichpotentiale" $T_A = T_A{}^i\partial_i$, $A = 0, \cdots 3$, Ableitungscharakter und werden so zu Vektorfeldern (die Koordinaten x^A des ursprünglichen affinen Raums verlieren ihre Bedeutung). Sie treten als Bestandteile von *n-Beinfeldern* (= Tetraden f. n = 4) $e_A = e_A^i\partial_i$ mit $e_A^i = \delta_A^i + T_A^i$ auf. Ein n-Beinfeld ist i.a. eine sogenannte *anholome* Basis in $X(M)$, d.h. es existieren keine lokalen Koordinaten x^A mit $e_A = \partial_A$.)

Mit der Konnexion lässt sich das **kovariante Differential** eines Tensor*felds* definieren, u.zw. heuristisch durch

$$\nabla T(x) = T(x + dx) - \bar{T}(x + dx) \equiv \nabla_i T dx^i,$$

abstrakt als Abbildung ∇: Typ(p,q) $\to$ Typ(p,q+1) mit den Eigenschaften:
(i) Linearität,
(ii) $\nabla f = df$ für skalare Funktionen f,
(iii) Gültigkeit der Leibnizregel bezüglich des Tensorprodukts.
Statt der Konnexion L kann auch das kovariante Differential als bestimmendes Objekt einer affinen Mannigfaltigkeit aufgefasst werden, man schreibt dann letztere als das Paar (M, ∇).

In Indexnotation schreibt man

$$(\nabla T)^{\cdots}{}_{\cdots i} \equiv \nabla_i T^{\cdots}{}_{\cdots}$$

und definiert die **kovariante Richtungsableitung** bezüglich eines Vektors v durch

$$(\nabla_v T)^{\cdots}{}_{\cdots} := v^i \nabla_i T^{\cdots}{}_{\cdots}. \tag{4.5}$$

Im Fall eines Vektorfelds folgt aus der heuristischen Definition

$$\nabla v^i = v^i(x + dx) - v^i(x) + v^i(x) - \bar{v}^i(x + dx) = dv^i + L^i{}_{jk}v^j dx^k \Rightarrow$$

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + L^i{}_{jk} v^j. \tag{4.6}$$

Wegen (ii) und (iii) folgt daraus für ein Kovektorfeld w

$$\nabla_k w_i = w_{i,k} - L^j{}_{ik} w_j \tag{4.7}$$

und unter Verwendung von (iii) schließlich allgemein

$$\nabla_k T^{i\cdots}{}_{j\cdots} = T^{i\cdots}{}_{j\cdots,k} + L^i{}_{mk} T^{m\cdots}{}_{j\cdots} + \cdots - L^m{}_{jk} T^{i\cdots}{}_{m\cdots} - \cdots . \tag{4.8}$$

Die eben eingeführte kovariante Ableitung entspricht der eichkovarianten Ableitung in Eichtheorien, allerdings mit dem Unterschied, dass sie hier auf Tensorfelder in der Mannigfaltigkeit und nicht auf Felder mit Werten in einem Tensorprodukt über einem Darstellungsraum der inneren Symmetriegruppe wirkt. (Im Fall der früher erwähnten Eichtheorie der Translationsgruppe ist die kovariante Ableitung als $\nabla_A = e_A^{\ i}\partial_i$ (für alle Typen von Tensoren) zunächst nur für die Komponenten bezüglich des n-Beinfelds definiert. Sie lässt sich aber auch als affine kovariante Ableitung auffassen, wobei die Konnexionskoeffizienten bezogen auf das n-Beinfeld verschwinden. Es gibt daher einen *absoluten Parallelismus* und die n-Beinfelder sind kovariant konstant. Die kovariante Ableitung im Sinne der Eichtheorie der *affinen Gruppe* $GA(n)$ (semidirektes Produkt aus $GL(n)$ und der Translationsgruppe T_n) ist $\nabla_A = e_A^{\ i}\nabla_i$.)

Das Transformationsverhalten der Konnexionskoeffizienten folgt aus dem Vergleich von

$$\nabla v'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^n}\nabla v^n = \frac{\partial x'^i}{\partial x^n}(dv^n + L^n{}_{lm} v^l dx^m)$$

mit

$$\nabla v'^i = dv'^i + L'^i{}_{jk} v'^j dx'^k = d(\frac{\partial x'^i}{\partial x^l} v^l) + L'^i{}_{jk} v'^j dx'^k$$

zu

$$L'^i{}_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^c}{\partial x'^k} L^a{}_{bc} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^j \partial x'^k}. \tag{4.9}$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass der antisymmetrische Anteil der Konnexion

$$S^i{}_{jk} := L^i{}_{[jk]} \equiv \frac{1}{2}(L^i{}_{jk} - L^i{}_{kj}) \tag{4.10}$$

ein Tensorfeld ist. Es wird als **Torsion** bezeichnet. Z.B. definiert das Christoffel-Symbol eine torsionsfreie Konnexion (da es aus der Metrik gebildet wird, ist die so definierte affine Struktur aus der metrischen Struktur abgeleitet, s. nächsten Abschnitt). Die anschauliche Bedeutung der Torsion ergibt sich aus der Betrachtung zweier linear unabhängiger infinitesimaler Vektoren δu,

δv in einem Punkt P. Werden diese als Verbindungsvektoren aufgefasst und wird δu entlang δv verschoben bzw. umgekehrt, dann bilden die vier Vektoren δu, δv, $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$ nur dann ein geschlossenes Parallelogramm, wenn die Torsion verschwindet. Andernfalls geht die Torsion in den "Defizitvektor" $\Delta = \delta v + \delta\bar{u} - \delta u - \delta\bar{v}$ ein (Übungsaufgabe). Koordinatenfrei lässt sich die Torsion als bilineare Abbildung S: $X(M) \times X(M) \to X(M)$ durch

$$2S(u,v) = \nabla_v u - \nabla_u v - [v,u]$$

definieren.

Krümmung

Eine Konnexion heißt **integrabel**, wenn die Parallelverschiebung wegunabhängig ist (es existiert dann ein "'Fernparallelismus"). Eine affine Mannigfaltigkeit (M,L) heißt **gekrümmt**, wenn L nicht integrabel ist, andernfalls (affin) **flach**. Z.B. ist ein Zylindermantel mit dem Standardparallelismus (definiert durch die ebene *Abwicklung*) flach, ein Kegelmantel aber nur lokal flach (man betrachte z.B. einen geschlossenen Weg, der um die Kegelspitze herumführt), weil die Kegelspitze ein Ort singulärer Krümmung ist. Die Sphäre (mit Paralleltransport entlang Großkreisen definiert durch Wahrung eines konstanten Winkels des transportierten Vektors im Sinne der euklidischen Einbettungsgeometrie) ist offenbar (konstant) gekrümmt, man betrachte z.B. als geschlossenen Weg den Rand eines Oktanten.

Um ein Maß für die lokale Krümmung zu bekommen, betrachten wir den Paralleltransport eines Vektors um eine infinitesimale Schleife, die durch Schließung eines infinitesimalen Parallelogramms entsteht, das von 2 l.u.a. Vektoren δ_1, δ_2 in einem Punkt (= Koordinatenursprung) aufgespannt wird. (Wir vernachlässigen den Beitrag des Defizitvektors, da dieser von höherer Ordnung in δ ist; aus demselben Grund unterscheiden wir auch nicht zwischen δ_A und $\bar{\delta}_A$.) Sei $\mathcal{C}_1$ der Weg von 0 über δ_1 nach $\delta_1+\delta_2$ und $\mathcal{C}_2$ der entsprechende Weg über δ_2. Dann liefert der Transport eines Vektors v entlang

$$\mathcal{C}_1: \; v_1^a(\delta_1+\delta_2) = v^a(\delta_1) - L^a{}_{bc}(\delta_1)v^b(\delta_1)\delta_2^c$$

bzw. entlang

$$\mathcal{C}_2: \; v_2^a(\delta_1+\delta_2) = v^a(\delta_2) - L^a{}_{bc}(\delta_2)v^b(\delta_2)\delta_1^c$$

mit

$$v^a(\delta_A) = v^a - L^a{}_{bc}(0)v^b\delta_A^c.$$

Taylorentwicklung von $L^a{}_{bc}$ um 0 liefert

$$v_1^a - v_2^a \equiv \delta v^a = -R^a{}_{bcd}v^bF^{cd} + O(\delta^3), \tag{4.11}$$

wo $F^{cd} \equiv \delta_1^{[c}\delta_2^{d]}$ der *Bivektor* des von der Schleife umschlossenen Flächenelements ist und

$$R^a{}_{bcd} = L^a{}_{bd,c} - L^a{}_{bc,d} + L^a{}_{ec}L^e{}_{bd} - L^a{}_{ed}L^e{}_{bc} \tag{4.12}$$

den **Krümmungstensor** der Konnexion L definiert. Berechnet man statt δv die Änderung $\delta_0 v$ des Vektors v nach einem Transport um die ganze Schleife zurück in den Ausgangspunkt, erhält man bis auf Terme $O(\delta^3)$ dasselbe Resultat. Der Krümmungstensor kann kartenfrei definiert werden als Abbildung R: $X(M) \times X(M) \to End(X(M))$ (letzteres bedeutet den Raum der *Endomorphismen* (strukturerhaltenden Abbildungen des Moduls $X(M)$ auf sich selbst)) durch

$$R(u,v) = \nabla_u\nabla_v - \nabla_v\nabla_u - \nabla_{[u,v]} - 2\nabla_{S(u,v)}.$$

Die kovariante Ableitung erfüllt die folgenden Vertauschungsrelationen, die in den Übungen bewiesen werden:

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)f = 2S^k{}_{ij}\nabla_k f, \tag{4.13}$$

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)v^a = R^a{}_{bij}v^b + 2S^k{}_{ij}\nabla_k v^a. \tag{4.14}$$

Lemma 1: $R^a{}_{bcd} = 0 \Leftrightarrow L$ *integrabel.*
Bew. $\Rightarrow$: Betrachte 2 Linien $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ mit demselben Anfangs- und Endpunkt und einen Vektor v im Anfangspunkt, der entlang dieser Linien transportiert wird. Die Differenz Δv der beiden Transportergebnisse im Endpunkt lässt sich dadurch abschätzen, dass man die beiden Linien durch ein Netz von Schleifen mit Koordinatenflächen $O(\delta^2)$ verbindet und z.B. $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{C}_2$ schrittweise um jeweils eine Schleife deformiert. Dann hat man, da jede Schleife gemäß Gl. (4.11) einen Beitrag $\delta v = O(\delta^3)$ liefert,

$$\Delta v = \sum \delta v = O(\delta^{-2})O(\delta^3) = O(\delta) \to 0 \; f.\; \delta \to 0.$$

Bew. $\Leftarrow$: Wegen der Integrabilität von L existiert ein kovariant konstantes Vektorfeld v (erhalten z.B. durch Transport eines Vektors von einem Punkt ausgehend in alle anderen Punkte). Dieses erfüllt überall $\nabla_b v^a = 0$ und daher $\nabla_{[i}\nabla_{j]}v^a = 0$ und kann außerdem in einem Punkt frei gewählt werden. Mit (4.14) folgt dann $R^a{}_{bij} = 0$

Lemma 2: L torsionsfrei und integrabel $\Leftrightarrow$ $\exists$ *Koordinatisierung mit* $L^i{}_{jk} = 0$.
Bew. $\Leftarrow$: $L^i{}_{jk} = 0 \Rightarrow S^i_{jk} = 0$ und $R^a{}_{bcd} = 0$.

Bew. $\Rightarrow$: Seien v_A n l.u.a. kovariant konstante Vektorfelder (solche existieren, weil lineare Unabhängigkeit unter Paralleltransport erhalten bleibt (wegen dessen Invertierbarkeit)). $\Rightarrow$ Die Komponentenmatrix (v_A^i) ist invertierbar: $\exists v_i{}^A$ mit $v_i{}^A v_B^i = \delta_B^A$, $v_i{}^A v_A^j = \delta_i{}^j$. Überschieben der Bedingung der kovarianten Konstanz $\partial_k v_A^i + L^i{}_{jk} v_A^j = 0$ mit $v_l{}^A$ ergibt $L^i{}_{lk} = -v_l{}^A \partial_k v_A^i = v_A^i \partial_k v_l{}^A \Rightarrow v_A^i(\partial_k v_l{}^A - \partial_l v_k{}^A) = L^i{}_{lk} - L^i{}_{kl} = 0$ (weil torsionsfrei) $\Rightarrow \partial_k v_l{}^A - \partial_l v_k{}^A = 0$ (Matrix (v_A^i) regulär) $\Rightarrow v_k{}^A = \partial_k f^A$ lokal. Sei $x'^A = f^A(x) \Rightarrow$

$$\frac{\partial x'^A}{\partial x^b} = v_b{}^A,\ \frac{\partial x^a}{\partial x'^B} = v_B{}^a.$$

Die Transformationsgleichung

$$L^i{}_{lk} = v_A^i v_l{}^B v_k{}^C L'^A_{BC} + \underbrace{v_A^i v_l{}^A{}_{,k}}_{L^i{}_{lk}}$$

liefert dann $L'^A_{BC} = 0$.

Bemerkung: Wenn die Torsion *nicht* verschwindet, verallgemeinert sich das Lemma 2 dahingehend, dass dann ein *anholonomes* Basisfeld $\{e_A = v_A^i \partial_i\}$ existiert, sodass die Konnexionskoeffizienten L^A_{BC} bezogen auf dieses Basisfeld verschwinden. Anholonomie bedeutet, dass die Basisvektoren e_A nicht Koordinatenbasisvektoren ∂_A eines Koordinatensystems $\{x^A\}$ sind.

4.1.3 Semi-Riemannsche Geometrie

Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) = n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem symmetrischen kovarianten Tensorfeld g_{ik}, das in jedem Tangentenraum T_P eine *nicht entartete* Bilinearform $\mathbf{g}$ definiert. g_{ik} heißt **metrischer Tensor**, die Bilinearform **g inneres Produkt**. Dieses innere Produkt $\mathbf{g}(u, v) = g_{ik} u^i v^k$ definiert wegen

$$g \equiv det(g_{ik}) \neq 0 \tag{4.15}$$

einen Isomorphismus $T_P \to T_P^* : v \mapsto \mathbf{g}(\cdot, v) \equiv v^*$, $v_i^* \equiv v_i = g_{ik} v^k$. Das erlaubt es, v und v^* als Repräsentanten ein- und desselben physikalischen Objekts anzusehen. Die Umrechnung von Vektor- auf Kovektorkomponenten bzw. umgekehrt erfolgt durch "Indextransport" mit g_{ik} bzw. mit der inversen Metrik $(g^{-1})^{ik} \equiv g^{ik}$.

Riemannsche Mannigfaltigkeit: **g** ist positiv definit.

Lorentz-(pseudo-Riemannsche) **Mannigfaltigkeit**: **g** hat *Normalform* $diag(-1, +1, +1, \cdots) \equiv \eta$.

(Eine Riemannsche Struktur existiert auf jeder (parakompakten) Mannigfaltigkeit, eine Lorentz-Metrik unter einer gewissen topologischen Voraussetzung (Euler-Zahl = 0).)
Wie wir schon wissen, modelliert die ART die Raum-Zeit als eine 4-dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit. Diese benötigt keine zusätzliche affine Struktur, weil eine solche durch die Metrik ausgezeichnet wird, s.u. In verallgemeinerten Gravitationstheorien wird aber eine zumindest teilweise unabhängige affine Struktur postuliert. Dafür benötigt man folgende Definitionen:
(M, L, g) heißt **metrisch-affine** Mannigfaltigkeit, wenn L allgemein.
(M, L, g) heißt **Riemann-Cartan-Mannigfaltigkeit**, wenn $\nabla_i g_{jk} = 0$. Die Konnexion L heißt dann metrisch oder metrik-kompatibel, hat 64-40=24 unabhängige Komponenten, und L ist eindeutig durch die Torsion $S^i{}_{jk}$ bestimmt. Dieser letzte Sachverhalt verallgemeinert den

Fundamentalsatz der (semi-)Riemannschen Geometrie:
In jeder semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert eine eindeutige Konnexion Γ mit $\nabla_i g_{jk} = 0$ und $S^i{}_{jk} = 0$.
Bew.: Definiert man $\Gamma_{ijk} := g_{il}\Gamma^l{}_{jk}$, dann folgt aus der Metrizität von Γ

$$g_{jk,i} - \Gamma^l{}_{ji}g_{lk} - \Gamma^l{}_{ki}g_{jl} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} = g_{jk,i}$$

und aus der Torsionsfreiheit $\Gamma_{kji} - \Gamma_{kij} = 0$ weiter

$$g_{jk,i} + g_{ji,k} - g_{ki,j} = 2\Gamma_{jki} \Rightarrow$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}), \tag{4.16}$$

d.h. das bekannte Christoffel-Symbol. Die so definierte Konnexion wird auch als *Levi-Civita-Konnexion* bezeichnet. In Kap. 2 war das Christoffel-Symbol in der Geodätengleichung aufgetreten. Nunmehr sehen wir, dass Geodäten identisch mit *Autoparallelen* sind, d.h. Linien, deren Tangentenvektoren parallelverschoben sind. Allerdings gilt das nur im (semi-)Riemannschen Fall, nicht in allgemeineren Geometrien.
Der Krümmungstensor der Konnexion Γ wird als **Riemann-Tensor** bezeichnet, vgl. Gl. (2.17). Die Mannigfaltigkeit (M, g) heißt (metrisch) **flach**, wenn $R^i{}_{jkl}(\Gamma) = 0$. Falls M homöomorph zum $\mathbf{R}^n$ ist, handelt es sich dann um einen semi-euklidischen Raum.

Lemma 3: g_{ik} global auf Normalform transformierbar $\Leftrightarrow$ (M, g) flach.
Bew. $\Rightarrow$: Trivial.

Bew. $\Leftarrow$: Lemma 1 u. 2 $\Rightarrow \exists$ KS, in dem ${\Gamma^i}_{jk} = 0$

$$\Rightarrow \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} = g_{jk,i} = 0 \Rightarrow g_{jk} \; konstant,$$

und eine konstante Metrik lässt sich durch eine lineare KT auf Normalform bringen.

Anschauliche Bedeutung der Levi-Civita-Konnexion und des Riemann-Tensors:
Im Fall einer 2-dimensionalen Fläche, die im euklidischen Raum $\mathbf{E}^3$ eingebettet ist, bedeutet der Paralleltransport entlang einer Linie $\mathcal{C}$ die Parallelverschiebung bezüglich der euklidischen Geometrie der Ebene, in die der Tangentenstreifen entlang der Linie isoaffin eingebettet werden kann. Im Fall positiver Krümmung kann diese Einbettung durch Abrollen der Fläche entlang der Linie realisiert werden.
Die **Gauß'sche Krümmung** K der Fläche in einem Punkt P ist definiert über die *Schmiegkreise*, die die Fläche in P berühren (mit Radiusvektor orthogonal zur Fläche). Unter allen diesen Schmiegkreisen gibt es zwei, deren Radien R_1 bzw. R_2 *extremal* sind (*Hauptkrümmungsradien*). Die Definition lautet

$$K := \frac{1}{R_1 R_2} \tag{4.17}$$

(das Produkt ist negativ, falls die beiden extremalen Schmiegkreise auf verschiedenen Seiten der Fläche liegen). Gauß erkannte, dass diese Krümmung *biegeinvariant*, d.h. eine Eigenschaft der inneren Geometrie der Fläche ist. Genauer besagt dieses *"Theorema egregium"*, dass

$$K = -\frac{1}{2} R[g_{ik}], \tag{4.18}$$

wobei g_{ik} die (durch die euklidische Einbettung) *induzierte Metrik* der Fläche bedeutet und R den Krümmungsskalar (Beweis: Übungen).
In einer höherdimensionalen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit verallgemeinert sich die Gauß'sche Krümmung zur
Schnittkrümmung $K(u, v)$ = Gauß'sche Krümmung der von den Tangentenvektoren u, v in P erzeugten geodätischen Fläche:

$$K(u, v) = \frac{R_{abcd} u^a v^b u^c v^d}{(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) u^a v^b u^c v^d} \tag{4.19}$$

(o. Bew.). Der Nenner des Bruchs stellt das Quadrat des *Flächeninhalts* des von u, v aufgespannten Parallelogramms dar. In n Dimensionen existieren $\binom{n}{2}$ unabhängige Orientierungen von 2-Flächen (= Zahl der nichttrivialen

Bivektoren, die aus n unabhängigen Vektoren gebildet werden können). Daher sind $\binom{n}{2}$ Komponenten von $R^a{}_{bcd}$ *funktional* unabhängig (modulo KTen). Das folgt natürlich auch daraus, dass der Riemann-Tensor aus Ableitungen der Metrik gebildet wird, die modulo Koordinatentransformationen $n(n+1)/2 - n$ unabhängige Komponenten aufweist. Dennoch legt der Riemann-Tensor die Metrik nicht fest (außer im Fall $R^a{}_{bcd} = 0$). Deswegen sind i.a. *krümmungskollineare* Mannigfaltigkeiten (zwischen solchen existiert ein Diffeomorphismus, der die beiden Krümmungstensoren ineinander überführt) nicht *isometrisch* (Isometrie = Diffeomorphismus, der die Metriken ineinander überführt). Ähnlich ist die Situation in nichtabelschen Eichtheorien. Hingegen legt in der Maxwell-Theorie der Feldstärkentensor das Viererpotential lokal bis auf eine Eichtransformation fest.

Algebraische Symmetrien des Riemann-Tensors:
1. $R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$ (gilt allgemein affin, folgt unmittelbar aus der Definition)
2. $R^i{}_{[jkl]} = 0$ (zyklische (1. Bianchi-)Identität, folgt allgemein aus $S^i{}_{jk} = 0$). (Der total antisymmetrische Anteil bezüglich einer Menge von p Indizes ist definiert als $1/p!$ mal der Summe über alle Permutationen der Menge gewichtet mit dem Vorzeichen der Permutation.)
3. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ (gilt allgemein für Riemann-Cartan)
Bew.: $(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)w_a = -R^b{}_{aij}w_b + 2S^k{}_{ij}\nabla_k w_a \Rightarrow$

$$0 = (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)g_{kl} = -R^m{}_{kij}g_{ml} - R^m{}_{lij}g_{km}.$$

4. $R_{ijkl} = R_{klij}$ (gilt nur im Riemannschen Fall)
folgt aus 1., 2., 3. (siehe Übungen).

Algebraische Zerlegung des Riemann-Tensors:
Der **Ricci-Tensor** ist allgemein als Spur des Krümmungstensors

$$R_{ij} := R^l{}_{ijl} \tag{4.20}$$

definiert, erfüllt aber nur im Riemannschen Fall $R_{ij} = R_{ji}$. (Anschauliche Bedeutung in diesem Fall: Die Summe der Gauß'schen Krümmungen von $n-1$ orthogonalen Geodätenflächen durch einen Punkt P, die einen Vektor u in P gemeinsam haben, ist

$$\sum_{a=1}^{n-1} K_a = \frac{R_{ik}u^i u^k}{g_{ik}u^i u^k}.)$$

Eine weitere Spurbildung (ist in jeder metrisch-affinen Mannigfaltigkeit möglich) liefert den **Krümmungsskalar**

$$R := g^{ik}R_{ik}. \tag{4.21}$$

Im Riemannschen Fall existiert ein eindeutiger total spurfreier Anteil des Riemann-Tensors, der dieselben algebraischen Symmetrien wie dieser aufweist, nämlich der **Weyl-Tensor** (konforme Krümmungstensor)

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{2}{n-2}(g_{i[k}R_{l]j} + g_{j[l}R_{k]i}) + \frac{2R}{(n-1)(n-2)} g_{i[l}g_{k]j}. \qquad (4.22)$$

Er ist offenbar nur für $n > 2$ definiert und nur für $n \geq 4$ von 0 verschieden. Im Vakuum ($R_{ij} = 0$) ist der Weyl-Tensor mit dem Riemann-Tensor identisch. Er ist außerdem **konform invariant**, d.h. ändert sich nicht unter einer **konformen Transformation** der Metrik

$$g_{ik}(x) \to \bar{g}_{ik}(x) = \Omega^2(x) g_{ik}(x), \;\; \Omega \neq 0. \qquad (4.23)$$

Eine Metrik, die konform zur flachen Metrik η ist, heißt *konform flach*. In zwei Dimensionen ist jede Metrik konform flach. Der Weyl-Tensor verschwindet genau dann, wenn die Metrik konform flach ist (o. Bew.).

Die (2.) **Bianchi-Identität**

$$\nabla_{[k|} R^i{}_{j|lm]} = 0 \qquad (4.24)$$

gilt allgemein, wenn die Konnexion torsionsfrei ist. Ein kartenfreier Beweis ergibt sich durch Betrachten von

$$(\nabla_{[i}\nabla_j)\nabla_{k]} w_l = \nabla_{[i}(\nabla_j \nabla_{k]}) w_l$$

(ein anderer Beweis wird in den Übungen geführt).

Metrische Volumsformen
Falls die Mannigfaltigkeit orientierbar ist, zeichnet die Metrik zwei global definierte Volumsformen ϵ durch

$$\epsilon(e_1, \cdots, e_n) = \pm 1 \qquad (4.25)$$

für ein beliebiges orthonormales n-Bein-Feld (= Tetrade f. n = 4) $\{e_A : \mathbf{g}(e_A, e_B) = \eta_{AB}\}$ aus. (Ein solches Feld existiert i.a. nur lokal, z.B. ist die 2-Sphäre S^2 nicht *parallelisierbar*, d.h. es gibt kein Vektorfeld, das nirgends verschwindet.) Die linke Seite der Gleichung hat die Bedeutung eines orientierten Volumens des von den Vektoren $e_1, \cdots, e_n$ aufgespannten Parallelepipeds. Offenbar ist mit ϵ auch $-\epsilon$ eine metrische Volumsform, und weitere existieren nicht. Eindeutigkeit der Volumsform wird erreicht durch die Wahl einer **Orientierung**, d.h. Auszeichnung einer Klasse von n-Beinen, die durch Tranformationen mit positiver Jacobi-Determinante auseinander hervorgehen, und die Bedingung der Positivität von ϵ. In lokalen Koordinaten ist

$$\epsilon = \pm\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{4.26}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{i_1 \cdots i_n} = \pm\sqrt{|g|}\epsilon(i_1, \cdots, i_n). \tag{4.27}$$

Der Faktor $\pm\sqrt{|g|}$ vor $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ garantiert den Tensorcharakter von ϵ. Er ist der Prototyp einer *skalaren Dichte vom Gewicht 1*, d.h. einer Funktion, die unter einer AKT ihren Wert um den Faktor J^{-1} ändert, wo J die Jacobi-Determinante der Transformation bedeutet. Festlegung auf das Pluszeichen in der letzten Gleichung macht aus der Volumsform den *Levi-Civita-Pseudotensor*

$$\eta_{i_1 \cdots, i_n} = \sqrt{|g|}\epsilon(i_1, \cdots, i_n). \tag{4.28}$$

Dieser transformiert nur unter Diffeomorphismen mit positiver Jacobi-Determinante J wie ein Tensor, ist dafür aber *invariant* unter solchen mit $J = \pm 1$. Diese Vorzeichenwahl hat nichts mit der oben erwähnten Wahl einer der beiden Volumsformen zu tun! Aus Traditionsgründen wird in der Physik bevorzugt mit dieser Pseudotensor-Version der Volumsform gearbeitet, obwohl sie mathematisch überflüssig ist. Bezüglich einer positiv orientierten Basis ($\epsilon(e_1, \cdots, e_n) > 0$) sind die Komponenten des Levi-Civita-Pseudotensors identisch mit denen der Volumsform. Der Einfachheit halber wählen wir im Folgenden eine solche Basis bzw. ein entsprechendes Koordinatensystem. Die kontravariante Version der Volumsform lautet dann

$$\epsilon^{i_1 \cdots i_n} = sgn(g)\frac{1}{\sqrt{|g|}}\epsilon(i_1, \cdots, i_n).$$

In der ART erhalten wir

$$\epsilon_{ijkl} = \sqrt{-g}\epsilon(i, j, k, l), \tag{4.29}$$

$$\epsilon^{ijkl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon(i, j, k, l). \tag{4.30}$$

Die Volumsform definiert die (Hodge-)**Dualitätsabbildung** $*$: {p-Formen} $\rightarrow$ {(n-p)-Formen} durch

$$(*\omega)_{i_1 \cdots i_{n-p}} = \frac{1}{p!}\epsilon_{i_1 \cdots i_{n-p}}{}^{j_1 \cdots j_p}\omega_{j_1 \cdots j_p}. \tag{4.31}$$

Die Integration einer Volumsform definiert ein *orientiertes* (vorzeichenbehaftetes) *Volumen* für n-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten. In der Physik ist man aber auch am Volumen als positives Mengenmaß interessiert. Die lokale Version dieses Maßes wird durch das invariante **Volumselement** dV definiert:

$$dV(v_1, \cdots, v_n) = |\epsilon(v_1, \cdots, v_n)| \tag{4.32}$$

oder kurz $dV = |\epsilon|$. Offenbar ist dV, da nicht linear, keine Differentialform, geschweige denn eine exakte. Es ist aber invariant und im Gegensatz zu ϵ positiv definit. Außerdem läßt sich das Integral über dV völlig analog zu dem einer n-Form definieren. Diese Definition kann folgendermaßen motiviert werden: Wir betrachten zunächst eine kompakte n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $N \subset M$, die im Definitionsbereich einer Kartenfunktion ψ liegt, und errichten ein n-dimensionales Gitter von Koordinatenlinien mit "Gitterkonstanten" Δx^i, das N überdeckt. Wir nummerieren die Gitterzellen mit einem Index α und approximieren sie durch Parallelepipede aufgespannt von den Vektoren $\Delta x^i \partial_i|_{P_\alpha}$, $i = 1, \cdots, n$, wo P_α ein Punkt in der Zelle mit Nummer α ist. Das gesuchte Integral einer skalaren Funktion f über N soll der Grenzwert einer Riemannschen Summe sein:

$$\int_N f dV = \lim_{\Delta x^i \to 0} \sum_\alpha f(P_\alpha) V_\alpha,$$

worin V_α das Volumen des Parallelepipeds Nummer α ist:

$$V_\alpha = dV(\Delta x^1 \partial_1|_{P_\alpha}, \cdots, \Delta x^n \partial_n|_{P_\alpha}) = \sqrt{|g(P_\alpha)|} \Delta x^1 \cdots \Delta x^n.$$

Falls der Grenzwert existiert, schreibt er sich in den lokalen Koordinaten als

$$\int_N f dV = \int_{\psi(N)} \tilde{f}(x) \sqrt{|\tilde{g}(x)|} d^n x. \tag{4.33}$$

Diese Gleichung soll als Definition verstanden werden. Sie führt die Integration über eine Mannigfaltigkeit auf die Integration im $\mathbf{R}^n$ zurück, wobei letztere wegen der größeren Allgemeinheit bevorzugt im (Lebesgue-)maßtheoretischen Sinn interpretiert wird. Die Verallgemeinerung der Definition auf den Fall mehrerer Kartengebiete macht Gebrauch von der Zerlegung der Eins, "uneigentliche" Integrale über nicht kompakte Mannigfaltigkeiten werden wie im $\mathbf{R}^n$ als Grenzwerte definiert.

Das Volumselement induziert auch ein entsprechendes Integrationsmaß auf p-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von M. Das **skalare Hyperflächenelement** auf einer (n-1)-dimensionalen *Hyperfläche* Σ ist definiert durch

$$d\sigma(v_1, \cdots, v_{n-1}) = dV(n, v_1, \cdots, v_{n-1}), \tag{4.34}$$

wo n einen normierten Normalenvektor (2 Orientierungen möglich, vorderhand sei $n^2 \neq 0$ vorausgesetzt) und v_α Tangentenvektoren an Σ bedeuten.

Die konkrete Berechnung von $d\sigma$ erfolgt am besten in einer Parametrisierung von Σ der Gestalt $x^i = \phi^i(u^1, \cdots, u^{n-1})$. Die *induzierte Metrik*

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} g_{ij}$$

macht Σ selbst zu einer (n-1)-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit, deren Volumselement mit $d\sigma$ identisch ist. Daher gilt in der gewählten Parametrisierung die Substitution

$$d\sigma \to \sqrt{|h|} d^{n-1}u. \tag{4.35}$$

Wegen der Linearität von ϵ lässt sich $d\sigma$ nach den Komponenten von n entwickeln:

$$d\sigma = n^i d\sigma_i \tag{4.36}$$

$$\Rightarrow d\sigma_i = \pm n_i d\sigma \tag{4.37}$$

im Falle $n^2 = \pm 1$. Im Fall einer lichtartigen oder *Nullhyperfläche* ($n^2 = 0$) ist $d\sigma = 0$. Das **kovektorielle Hyperflächenelement** $d\sigma_i$ hingegen bleibt nichttrivial, weil (4.36) durch eine allgemeinere Darstellung zu ersetzen ist: Da

$$\epsilon(n, \cdot) = \frac{1}{(n-1)!} n^i \epsilon_{ij_1 \cdots j_{n-1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-1}},$$

gilt in einer Karte die Darstellung

$$d\sigma_i \mapsto \pm\sqrt{|g|}(-1)^{i-1} \frac{\partial(x^1, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots x^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^{n-1})} d^{n-1}u \equiv \sqrt{|g|} d\bar{\sigma}_i, \tag{4.38}$$

Das Pluszeichen gilt, wenn die aus den Komponenten von n und den Tangentenvektoren $\frac{\partial x}{\partial u^\alpha}$ gebildete Determinante positiv ist, d.h. die Vektoren in dieser Reihenfolge ein positiv orientiertes System bilden. Aus der Darstellung (4.38) ist ersichtlich, dass

$$d\sigma_i = \pm\epsilon(\frac{\partial}{\partial x^i}, \cdot)$$

im Gegensatz zu $d\sigma$ nur die Volumsform benötigt. Die Darstellung (4.38) lässt sich mit Hilfe der Beobachtung umschreiben, dass

$$\nu = \epsilon(\cdot, \frac{\partial x}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}})$$

eine **Konormale** von Σ ist ($\nu_i t^i = 0$ für alle Tangentenvektoren t). Offenbar ist

$$d\bar{\sigma}_i = \pm sgn(\nu_i)|\frac{\partial(x^1, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots x^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^{n-1})}|d^{n-1}u \equiv \pm sgn(\nu_i) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n.$$

Im Fall der Nicht-Lichtartigkeit und positiver Orientierung ist $\nu_i = \pm\lambda n_i$ mit $\lambda > 0$ für $n^2 = \pm 1$ (da die Positivität von $d\sigma$ $n^i \nu_i > 0$ impliziert). Daher ist

$$d\bar{\sigma}_i = sgn(n^2) sgn(n_i) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n. \tag{4.39}$$

Ist nur eine Komponente von n (ko- oder kontravariant) von Null verschieden, ist

$$sgn(n^2) sgn(n_i) = sgn(n^i). \tag{4.40}$$

Dieselbe Gleichung gilt für allgemeines n im Fall einer *diagonalen Riemannschen* Metrik, weil für eine semi-Riemannsche diagonale Metrik $sgn(n_i) = \eta_{ii} sgn(n^i)$ gilt. Die Gleichung (4.40) ist auch allgemein in einem beliebigen Punkt durch Koordinatenwahl erreichbar. Dort gilt dann die manifest positive Darstellung des skalaren Hyperflächenelements

$$d\sigma \mapsto \sqrt{|g|}|n^i| dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n. \tag{4.41}$$

Das kovektorielle "Koordinatenhyperflächenelement" $d\bar{\sigma}_i$ tritt im klassischen **Satz von Gauß** im $\mathbf{R}^n$ mit der Standard-Volumsform $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ auf:

$$\int_N d^n x v^i{}_{,i} = \int_{\partial N} dx^2 \cdots dx^n sgn(\nu_1) v^1 + \cdots + \int_{\partial N} dx^1 \cdots dx^{n-1} sgn(\nu_n) v^n = \int_{\partial N} v^i d\bar{\sigma}_i.$$

(Die erste Gleichung folgt aus dem Hauptsatz der gewöhnlichen Analysis, die Vorzeichenfaktoren $sgn(\nu_i)$ sind am einfachsten zu verifizieren, indem man (nur zu diesem Zwecke) die euklidische Standardmetrik verwendet, mit der $sgn(\nu_i) = sgn(n^i)$.) Dieser Satz hat eine direkte Verallgemeinerung auf semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die im Fall, dass ganz N von einer Karte ψ überdeckt wird, einfach herzuleiten ist: Die kovariante Divergenz eines Vektorfelds v lässt sich als

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} v^i) \tag{4.42}$$

darstellen (Übungsaufgabe). Daher ist

$$\int_N dV \nabla_i v^i = \int_{\psi(N)} d^n x (\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{v}^i)_{,i} = \int_{\psi(\partial N)} \sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{v}^i d\bar{\sigma}_i = \int_{\partial N} v^i d\sigma_i. \tag{4.43}$$

Falls N nicht von einer Karte überdeckt wird, folgt der Gauß'sche Satz dennoch aus dem Hauptsatz der äußeren Differentialrechnung: Setzt man die (n-1)-Form $\omega = *v \equiv \epsilon(\cdot, v)$, dann ist (mit geeigneter Orientierung von N)

$$\int_N dV \nabla_k v^k = \int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega = \int_{\partial N} v^k d\sigma_k.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil ∂N so zu orientieren ist, dass der nach außen weisende Normalenvektor zusammen mit der orientierten Tangentenbasis (in dieser Reihenfolge) so wie N orientiert ist. Man beachte, dass die kovariante Version des Satzes von Gauß nur für Vektorfelder und *total antisymmetrische* Tensorfelder gilt!
Allgemein induziert dV *skalare* und *tensorielle p-dimensionale Volumselemente* (letztere total antisymmetrisch mit Stufe $n - p$) auf p-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M. Neben diesen orthogonalen kovariant tensoriellen Volumselementen existieren auch tangentiale kontravariant tensorielle "Integrationselemente": das Wegelement dx^i, das bivektorielle Flächenelement $dx^i \wedge dx^j$ usw. Diese benötigen jedoch keine Volumsform und gehen in die Verallgemeinerungen des klassischen Satzes von Stokes ein, die auch keine Metrik benötigen (wenn man sich auf Formen beschränkt). Der Satz von Gauß geht durch Dualität aus dem Satz von Stokes hervor und benötigt daher eine Volumsform.

4.2 Isometrien

4.2.1 Lie-Ableitung

Gegeben sei ein Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ zwischen offenen Teilmengen $U, V \subset M$. Von der Mannigfaltigkeit M wird in diesem Abschnitt nur die Differenzierbarkeitsstruktur benötigt. Sei $f : V \to \mathbf{R}$ eine skalare Funktion. Dann ist der **Pullback von f unter** Φ definiert durch

$$\Phi^* f := f \circ \Phi : U \to \mathbf{R} \tag{4.44}$$

bzw.

$$(\Phi^* f)(P) = f(\Phi(P)). \tag{4.45}$$

Im Fall einer Funktion $f : U \to \mathbf{R}$ definiert

$$\Phi_* f := f \circ \Phi^{-1} = (\Phi^{-1})^* f \tag{4.46}$$

den **Pushforward von f unter** Φ. (Im Gegensatz zum Pushforward existiert der Pullback einer skalaren Funktion auch dann, wenn Φ nicht invertierbar

ist.)
Diese Transportoperation lässt sich auf beliebige Tensorfelder erweitern. Der **Pushforward eines Vektorfelds** v auf U lässt sich zurückführen auf den Pullback einer skalaren Funktion:

$$(\Phi_* v)(f) := v(\Phi^* f). \tag{4.47}$$

Die Abbildung $T_P\Phi : v|_P \mapsto (\Phi_* v)|_{\Phi(P)}$, $T_P\Phi : T_P \to T_{\Phi(P)}$, heißt das *Differential* oder die *Tangentenabbildung* von Φ. (Das Differential ist offenbar auch dann definiert, wenn Φ nicht invertierbar ist, der Pushforward eines Vektor*feldes* aber i.a. nicht, weil das Differential zwei Vektoren aus 2 verschiedenen Punkten in 2 verschiedene Vektoren in demselben Bildpunkt abbilden kann.) In lokalen Koordinaten ist

$$(\Phi_* v)^k(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} v^i(x),\ \bar{x} \equiv \tilde{\Phi}(x).$$

Die ebenso natürliche Definition des **Pullback eines Vektorfeldes** lautet

$$(\Phi^* v)(f) := v(\Phi_* f). \tag{4.48}$$

Analog definiert man den **Pullback** eines Kovektorfeldes w auf V durch

$$(\Phi^* w)(v) := w(\Phi_* v). \tag{4.49}$$

Die Abbildung $T_P^*\Phi : T_{\Phi(P)}^* \to T_P^*$, die $w|_{\Phi(P)}$ in $\Phi^* w|_P$ überführt, heißt das *Kodifferential* oder die *Kotangentenabbildung* von Φ (sie wird in einer Karte durch die transponierte Jacobi-Matrix von $\tilde{\Phi}$ dargestellt). (Wieder existiert das Kodifferential auch, falls Φ nicht invertierbar ist, nicht aber i.a. der Pullback eines Kovektor*feldes*.) In lokalen Koordinaten ist

$$(\Phi^* w)_i(x) = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} w_k(\bar{x}). \tag{4.50}$$

Unmittelbare Verallgemeinerung des Bisherigen liefert schließlich die Definition z.B. des **Pushforward eines beliebigen Tensorfeldes** T vom Typ (p,q):

$$(\Phi_* T)(w_{(1)}, \cdots, w_{(p)}; v_{(1)}, \cdots, v_{(q)}) = T(\Phi^* w_{(1)}, \cdots, \Phi^* w_{(p)}; \Phi^* v_{(1)}, \cdots, \Phi^* v_{(q)}). \tag{4.51}$$

Die analoge Formel für den Pullback folgt aus $\Phi^* = (\Phi^{-1})_*$. In lokalen Koordinaten folgt

$$(\Phi_* T)^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} T^{k_1 \cdots}{}_{\cdots l_q}(x). \tag{4.52}$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Pushforward die aktive Version einer AKT ist.
Ein Diffeomorphismus $\Phi : M \to M$ heißt **Symmetrietransformation** für das Tensorfeld T, falls $\Phi_* T = T$. Im Fall des metrischen Tensorfelds heißt ein solcher Diffeomorphismus **Isometrie**.
Eine **1-parametrige Gruppe von Diffeomorphismen** Φ_t ist eine C^∞-Abbildung: $\mathbf{R} \times M \to M$ so dass für jedes $t \in \mathbf{R}$ $\Phi_t : M \to M$ ein Diffeomorphismus ist und $\forall t, s \in \mathbf{R}$ $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ gilt ($\Rightarrow \Phi_0 = id$). Für jeden Punkt $P \in M$ ist $(\Phi_t(P))_{t \in \mathbf{R}} : \mathbf{R} \to M$ eine Kurve (ein *Orbit* von Φ_t). Sei $v|_P$ die Tangente dieser Kurve zu $t = 0$. Da diese Konstruktion für alle P definiert ist und jedes P auf genau einer Kurve liegt, wird auf diese Weise jeder 1-parametrigen Diffeomorphismengruppe ein Vektorfeld zugeordnet, das **erzeugende Vektorfeld** der Gruppe. *Umgekehrt* besitzt jedes Vektorfeld $v \in X(M)$ eine Familie von **Integralkurven** mit der Eigenschaft, dass jedes $P \in M$ auf genau einer Kurve liegt und deren Tangente in P identisch mit $v|_P$ ist (vgl. die Stromlinien einer Flüssigkeit). (Bew.: Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen $\frac{dx^i}{dt} = v^i(x)$ hat für jeden Anfangswert zumindest lokal eine eindeutige Lösung.) Wir definieren für jedes P den Punkt $\Phi_t(P)$ als den Punkt zum Parameterwert t auf der Kurve, die zu $t = 0$ in P beginnt. Die so definierten Abbildungen Φ_t bilden eine 1-parametrige Diffeomorphismengruppe, den **von v erzeugten Fluss**. (Wie schon angedeutet ist es allerdings möglich, dass die Kurven nur bis zu einem endlichen Wert von t definiert sind.)
Sei Φ_t eine 1-parametrige Diffeomorphismengruppe erzeugt von einem Vektorfeld v und $T(x)$ ein Tensorfeld. Die **Lie-Ableitung** des Tensorfeldes bezüglich v ist definiert als

$$\mathcal{L}_v T = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t^* T \tag{4.53}$$

oder

$$(\mathcal{L}_v T)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{T(x) - (\Phi_{\epsilon *} T)(x)}{\epsilon}, \tag{4.54}$$

d.h. als die negative Änderungsrate des Tensorfeldes unter dem *Lie-Transport*: $T \mapsto \Phi_{t*} T$. $\Rightarrow$ Die Lie-Ableitung ist eine lineare Abbildung: Typ(p,q)$\to$Typ(p,q), vertauscht mit der Kontraktion und erfüllt die Leibnizregel bezüglich des Tensorprodukts, mit anderen Worten: Sie ist eine *Derivation* auf der Tensorfeldalgebra.

Die Berechnung der Lie-Ableitung ist am besten aus (4.54) ersichtlich. Wir setzen an

$$\Phi_\epsilon : x^i \mapsto x^i + \epsilon v^i(x) \equiv \bar{x}^i. \tag{4.55}$$

Für eine skalare Funktion erhalten wir

$$(\Phi_{\epsilon *}f)(x) = (f \circ \Phi_\epsilon^{-1})(x) = f(x - \epsilon v) = f(x) - \epsilon v^i f_{,i} \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}_v f = v^i \partial_i f = v(f). \tag{4.56}$$

(Genauer hat in der “abgebrochenen Taylorreihe” statt $f_{,i}$ ein Kovektor $g_i(x - \epsilon v)$ zu stehen, der im Limes $\epsilon \to 0$ zu $f_{,i}(x)$ wird, vgl. das Lemma aus Übungsaufgabe 31.)
Die Lie-Ableitung eines Vektorfelds erfüllt

$$\mathcal{L}_v u = [v, u] \tag{4.57}$$

(Übungsaufgabe). Die eines beliebigen Tensorfelds T folgt aus (4.52) zu

$$(\mathcal{L}_v T)^{i\cdots}{}_{j\cdots} = -v^i{}_{,a} T^{a\cdots}{}_{j\cdots} - \cdots + v^b{}_{,j} T^{i\cdots}{}_{b\cdots} + \cdots + T^{i\cdots}{}_{j\cdots,k} v^k. \tag{4.58}$$

Die Lie-Ableitung ist aber (wie auch Pullback und Pushforward) nicht nur für Tensorfelder, sondern beliebige geometrische Objekte definiert. Die Formel für die Ableitung ergibt sich formal aus einer infinitesimalen KT $x'^i = x^i - v^i$, indem vom transformierten Objekt nur die Terme 1. Ordnung in v beibehalten werden. Im Falle einer affinen Mannigfaltigkeit mit torsionsfreier Konnexion können in der Lie-Ableitung eines Tensorfeldes sämtliche partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt werden (dies muss aber ausnahmslos geschehen). Beweis: Die beiden Versionen stimmen in dem Koordinatensystem überein, in dem die Konnexion in dem ausgewählten Punkt verschwindet, und sind daher identisch, weil Tensoren.

4.2.2 Killingvektoren

Auf einer *semi-Riemannschen* Mannigfaltigkeit lautet die Lie-Ableitung des metrischen Tensors bezüglich eines Vektorfelds ξ

$$\mathcal{L}_\xi g_{ik} = g_{ik;l}\xi^l + \xi^j_{;i} g_{jk} + \xi^j_{;k} g_{ij} = \xi_{k;i} + \xi_{i;k}. \tag{4.59}$$

Wie schon bemerkt beschreibt dieselbe Formel auch die (passive) Änderung von g_{ik} unter einer infinitesimalen KT und entspricht den Eichtransformationen der linearisierten Theorie. Offenbar erzeugt das Vektorfeld ξ eine 1-parametrige Gruppe von *Isometrien* genau dann, wenn $\mathcal{L}_\xi g_{ik} = 0$. Ein solches Vektorfeld heißt **Killingvektorfeld** und erfüllt die **Killing-Gleichung**

$$\nabla_i \xi_k + \nabla_k \xi_i = 0. \tag{4.60}$$

Dieses Gleichungssystem hat i.a. keine nichttriviale Lösung. Die Isometrien einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit bilden offensichtlich eine Gruppe, ihre **Isometriegruppe**. Z.B. lautet im *Minkowskiraum* die Killinggleichung in kartesischen Koordinaten $\xi_{i,k} + \xi_{k,i} = 0$ und besitzt die Lösungen

$$\xi_i = a_i + \omega_{ik} x^k, \ \omega_{ik} = -\omega_{ki} \tag{4.61}$$

mit 10 freien Parametern a_i, ω_{ik}. Es gibt daher 10 l.u.a. Killingfelder. Diese erzeugen die Poincaré-Transformationen. Die Zahl 10 ist die maximale Dimension einer Isometriegruppe in 4 Dimensionen, der Minkowskiraum daher ein Raum *maximaler Symmetrie*.
In einer Raum-Zeit impliziert jede 1-parametrige Isometriegruppe einen **Erhaltungssatz**:
Für **Testteilchen**: Sei ξ Killingvektor, u der affine Tangentenvektor einer Geodäte. Dann ist $\xi_a u^a$ entlang der Geodäte konstant:

$$\frac{d}{d\tau}(\xi_a u^a) = u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = u^b u^a \nabla_{(b}\xi_{a)} + \xi_a u^b \nabla_b u^a = 0.$$

Für eine **kontinuierliche** Energie-Impulsverteilung:
$\nabla_b T^{ab} = 0 \Rightarrow j^a \equiv T^a_{\ b}\xi^b$ erfüllt

$$\nabla_a j^a = 0 \Rightarrow \int_\Sigma j^a d\sigma_a = const. \tag{4.62}$$

Dieser Erhaltungssatz gilt für raumartige Hyperflächen Σ. Falls die Raum-Zeit räumlich nicht geschlossen ist, ist vorausgesetzt, dass der Integrand im räumlichen Unendlichen hinreichend rasch abfällt.

Eine Raum-Zeit heißt **stationär**, wenn ein zeitartiges Killingvektorfeld existiert. Es gibt dann eine ausgezeichnete Zeitkoordinate t, nämlich den Evolutionsparameter der Trajektorien dieses Feldes (*Killingparameter*). Eine stationäre Raum-Zeit heißt **statisch**, wenn die Metrik g_{ik} invariant unter der Zeitumkehr $t \mapsto -t$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn ein KS existiert, in dem g_{ik} zeitunabhängig und $g_{0\alpha} = 0$ ist. Geometrisch bedeutet diese Bedingung, dass der Killingvektor ξ **hyperflächenorthogonal** ist, da im erwähnten KS $\xi_i \propto \delta_{i0}$ und damit konormal auf den Hyperflächen $\{t = const\}$ ist. Ein nützliches Kriterium für die Hyperflächenorthogonalität eines Vektorfelds ξ folgt aus dem *Satz von Frobenius* (genauer dessen dualer Formulierung, s. z.B. Wald(1984)):

$$\xi_{[a}\nabla_b \xi_{c]} = 0. \tag{4.63}$$

4.2.3 Rotverschiebung in einer stationären Raum-Zeit

In Übereinstimmung mit dem Äquivalenzprinzip lauten die **Maxwell-Gleichungen** in einer allgemeinen Raum-Zeit

$$\nabla_b F^{ab} = 4\pi j^a, \ \nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \tag{4.64}$$

(wie wir gleich sehen werden, ist allerdings die naive Substitution $\partial_a \mapsto \nabla_a$ in *Feldgleichungen* i.a. falsch; diese Substitution ist im *Wirkungsfunktional* vorzunehmen). Aus den homogenen Maxwellgleichungen folgt die lokale Existenz eines **Viererpotentials** A_i:

$$F_{ab} = 2\partial_{[a}A_{b]} = 2\nabla_{[a}A_{b]}. \tag{4.65}$$

Die Maxwell-Gleichungen für das Viererpotential vereinfachen sich in der kovarianten Lorenzeichung

$$\nabla_i A^i = 0 \tag{4.66}$$

$$\Rightarrow \nabla_j(\nabla^i A^j - \nabla^j A^i) = \nabla^i \nabla_j A^j + R^j{}_{kj}{}^i A^k - \nabla_j \nabla^j A^i \tag{4.67}$$

$$\Rightarrow \nabla_j \nabla^j A^i + R^i{}_k A^k = -4\pi j^i. \tag{4.68}$$

Wir sind an wellenartigen Lösungen dieser Gleichung von der Gestalt

$$A^a = C^a e^{iS} \tag{4.69}$$

mit reeller Phase S und Amplitude C^a interessiert. Einsetzen dieses Ansatzes in (4.68) ergibt

$$0 = [\nabla^b \nabla_b C^a - C^a \nabla_b S \nabla^b S + R^a{}_b C^b + i(2\nabla^b S \nabla_b C^a + C^a \nabla_b \nabla^b S)]e^{iS}.$$

Im Grenzfall der **geometrischen Optik**, d.h. für rasch oszillierendes S, genauer

$$|(\nabla S)^2| \gg |\nabla^2 C^a / C^a|, |R^a{}_b|,$$

folgt aus der letzten Gleichung die **Eikonalgleichung**

$$\nabla_b S \nabla^b S = 0. \tag{4.70}$$

(Außerdem folgt wegen des separaten Verschwindens des Imaginärteils der eckigen Klammer die *Transportgleichung* für die Amplitude,

$$2\nabla^b S \nabla_b C^a = -C^a \Box_g S.)$$

Die Lorenzbedingung impliziert

$$C^a \nabla_a S = 0. \tag{4.71}$$

Diese Bedingung hat die Bedeutung der *Transversalität* der Amplitude bezüglich des **Ausbreitungsvektors**

$$k_a \equiv \nabla_a S. \tag{4.72}$$

Dieser ist orthogonal auf den Hyperflächen konstanter Phase und stimmt im Fall einer monochromatischen Welle mit dem Wellenzahlvektor überein. Die Eikonalgleichung impliziert $k^2 = 0$, d.h. die Hyperflächen konstanter Phase $\{S = const\}$ sind Nullhyperflächen und k ist daher auch *tangential* an diese. Wir haben

$$0 = \nabla_b(\nabla_a S \nabla^a S) = 2(\nabla^a S)\nabla_b \nabla_a S = 2(\nabla^a S)\nabla_a \nabla_b S = 2k^a \nabla_a k_b,$$

d.h. die **Strahlen** (Orthogonaltrajektorien auf den Hyperflächen konstanter Phase = Integralkurven von k) sind *Nullgeodäten*. (Man sieht nebenbei, dass *jede* Nullhyperfläche durch Nullgeodäten erzeugt wird, weil jede Nullhyperfläche in eine Schar $\{S = const\}$ eingebettet werden kann.) Die Welle hat eine wohldefinierte **lokale Frequenz**, die von einem Beobachter in P mit 4-Geschwindigkeit u gemessen wird:

$$\omega = -u^a \nabla_a S = -u^a k_a. \tag{4.73}$$

Wir spezialisieren nun auf eine stationäre Raum-Zeit und betrachten dort 2 *stationäre* Beobachter in Punkten P_1, P_2, die durch einen (Licht-)Strahl verbunden sind. Laut Annahme sind ihre 4-Geschwindigkeiten

$$u_i^a \equiv \frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^2}}|_{P_i},$$

wo ξ der Killingvektor ist. Die Erhaltungsgröße $k_a \xi^a$ entlang des Strahls liefert

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{-\xi^2}|_{P_2}}{\sqrt{-\xi^2}|_{P_1}}. \tag{4.74}$$

Wählt man den Killingparameter t als Zeitkoordinate, so dass

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \doteq (1,0,0,0) \Rightarrow \xi^2 = g_{ab}\xi^a \xi^b \doteq g_{00},$$

erhält man

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{-g_{00}}|_{P_2}}{\sqrt{-g_{00}}|_{P_1}}. \tag{4.75}$$

In der Newtonschen Näherung $g_{00} = -1 - 2V$ wird

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 + V_2 - V_1 \Rightarrow \Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = -\omega_2 \Delta V \approx -\omega \Delta V.$$

Erweiterung der letzten Gleichung mit dem Planckschen Wirkungsquantum $\hbar$ gibt $\Delta(\hbar\omega) = -\hbar\omega\Delta V$, was als die Energieerhaltung für ein Photon,

$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot}$, aufgefasst werden kann. Insbesondere kann die Rotverschiebung eines aufsteigenden Photons als kinetischer Energieverlust verstanden werden.

Vergleicht man mit Hilfe von Lichtstrahlen Uhren, die sich in P_1 bzw. P_2 befinden, ergibt sich für entsprechende Eigenzeitintervalle

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{-g_{00}}|_{P_1}}{\sqrt{-g_{00}}|_{P_2}}. \tag{4.76}$$

Kapitel 5

Die Schwarzschild-Lösung und experimentelle Tests der ART

5.1 Die Schwarzschild-Lösung

Wir suchen das Gravitationsfeld einer "Zentralmasse" in deren Außenraum, d.h. eine sphärisch-symmetrische Vakuumlösung der Einstein-Gleichungen. Eine Raum-Zeit heißt **sphärisch symmetrisch**, wenn ihre Isometriegruppe eine Untergruppe isomorph zur $SO(3)$ enthält, deren Orbits (Menge aller Punkte, die durch die Gruppenwirkung aus einem Punkt hervorgehen) topologisch S^2 und raumartig sind. Aus dieser Definition folgt, dass nur 2 der 3 die Untergruppe erzeugenden Killingvektoren *in einem Punkt* linear unabhängig sind. (Die Orbits einer Isometriegruppe $\cong SO(3)$ können auch 3-dimensional sein: Z.B. ist die Gruppenmannigfaltigkeit der $SO(3)$ isomorph zur 3-dimensionalen Vollkugel mit identifizierten Oberflächengegenpunkten (um das einzusehen, wähle man den "Drehvektor" $\vec{\alpha}$ als Parameter $\Rightarrow |\vec{\alpha}| \leq \pi$ und $\vec{\alpha} = \pi\vec{n}$ und $\vec{\alpha} = -\pi\vec{n}$ beschreiben dieselbe Drehung). Die Linksmultiplikation definiert auf dieser Mannigfaltigkeit eine einfach transitive Gruppenwirkung. Durch Transport ausgehend von einem Punkt erhält man eine invariante Riemann-Metrik.) Wegen der Rotationssymmetrie ist die induzierte Metrik auf jedem Orbit ein Vielfaches der Standard-Metrik

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \tag{5.1}$$

auf der S^2, da diese vom Einbettungsraum $\mathbf{E}^3$ induzierte Metrik die *einzige* rotationsinvariante ist. Der Multiplikationsfaktor ist bestimmt durch den Flächeninhalt A des Orbits. Wir ordnen daher jedem Orbit eine "Radialkoordinate"

$$r := \sqrt{A/4\pi} \tag{5.2}$$

zu. Man beachte, dass nur im $\mathbf{E}^3$ r mit dem Radius einer Sphäre identifiziert werden kann. I.a. (z.B. im Fall der Topologie $\mathbf{R} \times S^2$) hat ein Orbit keinen Mittelpunkt O in der Mannigfaltigkeit, und selbst wenn ein solcher existiert, ist r nicht der Abstand des Orbits von O. Die Definition (5.2) impliziert auf den Orbits das Längenelement

$$dl^2 = r^2 d\Omega^2. \tag{5.3}$$

Wir nehmen an, dass es (zumindest lokal) keine zwei Orbits mit demselben Flächeninhalt gibt. Dann ist $\nabla_a r \neq 0$ und r daher als lokale Koordinate geeignet. Mit dieser und einer beliebigen Zeitkoordinate t lautet das allgemeinste sphärisch symmetrische Linienelement

$$ds^2 \doteq f(t,r)dt^2 - 2g(t,r)dtdr - h(t,r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{5.4}$$

(Terme $\propto dtd\theta,\ dtd\phi,\ drd\theta,\ drd\phi$ sind ausgeschlossen, weil zwar dt und dr, aber nicht $d\theta,\ d\phi$ rotationsinvariant sind). Die Funktion $g(t,r)$ kann durch eine Koordinatentransformation

$$t = j(\bar{t}, r) \Rightarrow dt = \frac{\partial j}{\partial \bar{t}} d\bar{t} + \frac{\partial j}{\partial r} dr$$

eliminiert werden:

$$ds^2 = f(\frac{\partial j}{\partial \bar{t}})^2 d\bar{t}^2 + 2\frac{\partial j}{\partial \bar{t}}(f\frac{\partial j}{\partial r} - g)d\bar{t}dr - (h + 2g\frac{\partial j}{\partial r} - f(\frac{\partial j}{\partial r})^2)dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Mit der Bedingung

$$\frac{\partial j(\bar{t}, r)}{\partial r} = \frac{g(j,r)}{f(j,r)}$$

(diese partielle Differentialgleichung lässt noch große Freiheit für $\partial j/\partial \bar{t}$) und der Umbenennung $\bar{t} \to t$ erhält man das **allgemeine sphärisch symmetrische Linienelement** in speziellen Koordinaten

$$ds^2 \doteq e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{5.5}$$

Die Funktionen $\nu(t,r)$ und $\lambda(t,r)$ sind aus den Einstein-Gleichungen zu bestimmen. Zur Berechnung des Einstein-Tensors benötigen wir zunächst die Christoffel-Symbole. Diese werden vorteilhaft aus der Geodätengleichung abgelesen, die aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int K d\tau = 0,\ K = -g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k$$

folgt. Aus (5.5) folgt

$$K = e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2. \tag{5.6}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial K}{\partial x^i} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}$$

ergeben für $i = 0$ mit $\bar{\nu} \equiv \frac{\partial \nu}{\partial t},\ \nu' \equiv \frac{\partial \nu}{\partial r}$

$$\bar{\nu}e^{\nu}\dot{t}^2 - \bar{\lambda}e^{\lambda}\dot{r}^2 = 2\bar{\nu}e^{\nu}\dot{t}^2 + 2e^{\nu}\ddot{t} + 2\nu' e^{\nu}\dot{r}\dot{t}.$$

Der Vergleich mit der Geodätengleichung

$$\ddot{t} + {\Gamma^0}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

liefert sofort

$${\Gamma^0}_{00} = \frac{\bar{\nu}}{2},\ \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2},\ {\Gamma^0}_{11} = \frac{\bar{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu},$$

$${\Gamma^0}_{02} = {\Gamma^0}_{03} = \cdots = {\Gamma^0}_{33} = 0.$$

Analog berechnen sich die restlichen Christoffel-Symbole (Übungsaufgabe). Eine langwierige Rechnung ergibt schließlich die Komponenten des Einstein-Tensors:

$$-{G^0}_0 = e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}) - \frac{1}{r^2},$$

$$-{G^0}_1 = e^{-\lambda}\frac{\bar{\lambda}}{r},$$

$$-{G^1}_1 = e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2})-\frac{1}{r^2},\ -{G^2}_2 = -{G^3}_3 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2})-\frac{1}{4}e^{-\nu}(2\bar{\bar{\lambda}}+\bar{\lambda}^2+\bar{\lambda}\bar{\nu}).$$

Die Feldgleichungen ${G^0}_1 = 0$ und ${G^1}_1 - {G^0}_0 = 0$ implizieren

$$\bar{\lambda} = 0 \tag{5.7}$$

und

$$\lambda' + \nu' = 0 \Rightarrow \lambda + \nu = q(t).$$

Sei

$$\tilde{t} = \int^t dt' e^{q(t')/2} \Rightarrow e^{\nu}dt^2 = e^{\nu-q}d\tilde{t}^2 = e^{-\lambda}d\tilde{t}^2.$$

Durch eine Koordinatentransformation wurde also

$$\nu = -\lambda \tag{5.8}$$

erreicht, und λ hängt nicht von $\tilde{t}$ ab. Die sphärische Symmetrie impliziert daher im Vakuum die Statik, diese braucht nicht eigens postuliert zu werden! Die Funktion λ kann nun aus $G^0{}_0 = 0$ bestimmt werden:

$$r\lambda' = 1 - e^{\lambda} \Rightarrow \int \frac{d\lambda}{1 - e^{\lambda}} = \int \frac{dr}{r}.$$

Eine elementare Integration liefert mit $x \equiv e^{\lambda}$

$$ln\frac{r}{c} = ln|\frac{x}{x-1}|.$$

Unter der Annahme $x > 1$ erhalten wir

$$x = \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} \Rightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{x} = 1 - \frac{c}{r}.$$

Mit $c \equiv 2\mathcal{M}$ und $\tilde{t} \to t$ wird schließlich

$$ds^2 = (1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}}dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{5.9}$$

Das ist das Linienelement der **Schwarzschild-Metrik**, die das Kepler-Potential der Newtonschen Gravitation verallgemeinert. Im Zuge der Herleitung haben wir das **Birkhoff-Theorem** bewiesen: Die Schwarzschild-Metrik ist die einzige sphärisch-symmetrische Lösung der Einstein-Gleichungen im Vakuum. Eine analoge Aussage gilt auch in der Elektrodynamik bezüglich des Coulombfelds. Der physikalische Grund ist hier wie dort ein Erhaltungssatz: Wegen der Erhaltung der Ladung bzw. der Masse (einer sphärisch symmetrischen Verteilung) gibt es keine Monopolstrahlung. Wir bemerken noch, dass wir die Einstein-Gleichungen $G^2{}_2 = G^3{}_3 = 0$ gar nicht benützt haben. Tatsächlich folgen diese hier aus $G^0{}_0 = G^0{}_1 = G^1{}_1 = 0$ und der kontrahierten Bianchi-Identität.

Das Linienelement (5.9) weist in $r = 0$ und $r = 2\mathcal{M}$ Singularitäten auf. Davon ist nur die erstere eine physikalische Singularität, die letztere hingegen ein Koordinateneffekt, wie wir noch sehen werden. Die Schwarzschild-Metrik ist auch für $0 < r < 2\mathcal{M}$ eine Lösung der Vakuum-Einstein-Gleichungen, da für diese die Einschränkung $x \equiv e^{\lambda} > 0$ keine Rolle spielt.

Eine nützliche Darstellung der Schwarzschild-Metrik ergibt sich durch die Transformation auf **isotrope Koordinaten**:

$$r = (1 + \frac{\mathcal{M}}{2\bar{r}})^2 \bar{r} \Rightarrow$$

$$ds^2 = (\frac{1 - \mathcal{M}/(2\bar{r})}{1 + \mathcal{M}/(2\bar{r})})^2 dt^2 - (1 + \frac{\mathcal{M}}{2\bar{r}})^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2). \tag{5.10}$$

Sie zeigt, dass die Raumschnitte $\{t = const\}$ der Schwarzschild-Lösung *konform flach* sind. Dieser Sachverhalt gilt allgemein für sphärisch symmetrische Metriken (Übungsaufgabe). Asymptotisch ($\bar{r} \to \infty$) geht das isotrope Linienelement (5.10) über in

$$ds^2 \approx (1 - \frac{2\mathcal{M}}{\bar{r}})dt^2 - (1 + \frac{2\mathcal{M}}{\bar{r}})d\vec{\bar{r}}^2.$$

Dieses Linienelement ist identisch mit der Lösung der Einstein-Gleichungen in der 1. post-Newtonschen Näherung (3.9) im zentralsymmetrischen Fall. Daraus erschließen wir die physikalische Bedeutung (die wir durch die Notation bereits vorweggenommen haben) der Integrationskonstanten

$$\mathcal{M} = \frac{GM}{c^2}$$

als proportional zur asymptotisch gemessenen schweren Masse M der zentralen Quelle. Wir sehen auch, dass die durch $\bar{r}$ definierten isotropen Koordinaten $\bar{x}^\alpha$ den kartesischen Koordinaten der Newtonschen Gravitation entsprechen. Schließlich bemerken wir noch, dass die Wahl $x \equiv e^\lambda > 1$ gleichbedeutend mit $\mathcal{M} > 0$ ist. Die andere Wahl ist zwar mathematisch möglich, wegen der Instabilität von Systemen mit negativer Masse aber unphysikalisch.

5.2 Geodäten in der Schwarzschild-Metrik

Wir werden die Bewegung von Testteilchen sowohl in Schwarzschild- als auch in isotropen Koordinaten diskutieren und setzen daher das Linienelement in der allgemeinen Form

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - e^{\mu(r)}r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

an. Die Geodätengleichung folgt aus dem Wirkungsprinzip

$$\delta \int K d\tau = 0,$$

$$K = -g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = e^\nu\dot{t}^2 - e^\lambda\dot{r}^2 - e^\mu r^2\dot{\theta}^2 - e^\mu r^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2.$$

Da $t,\ \phi$ zyklische Koordinaten sind, sind

$$-\frac{\partial K}{\partial\dot{\phi}} = 2e^\mu r^2 sin^2\theta\dot{\phi} \equiv 2l, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{t}} = 2e^\nu\dot{t} \equiv 2E \tag{5.12}$$

Konstanten der Bewegung. Variation der Wirkung nach θ liefert

$$2e^{\mu}r^2 sin\theta cos\theta\dot{\phi}^2 = 2\frac{d}{d\tau}(e^{\mu}r^2\dot{\theta}).$$

O.B.d.A. können wir die Anfangsbedingung

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

auferlegen, sodass die Teilchenbahn in der Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$ verläuft. Die Bewegungsgleichung für $r(\tau)$ wird nicht benötigt, weil $K = const$ dieselbe Information enthält. Daher wird die geodätische Bewegung durch 3 gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben:

$$e^{\mu}r^2\dot{\phi} = l,\ e^{\nu}\dot{t} = E,\ e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2 - e^{\mu}r^2\dot{\phi}^2 = K\ (K = 0, 1). \tag{5.13}$$

In *Schwarzschild-Koordinaten* ist

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r},\ \mu = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{t}(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}) = E,\ r^2\dot{\phi} = l, \tag{5.14}$$

$$\frac{E^2}{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}} - \frac{l^2}{r^2} = K. \tag{5.15}$$

Die letzte Gleichung lässt sich in den **Energiesatz**

$$\frac{\dot{r}^2}{2} \underbrace{-\frac{\mathcal{M}K}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{M}l^2}{r^3}}_{V_{eff}} = \frac{E^2 - K}{2} \equiv T \tag{5.16}$$

umformen. Die physikalische Bedeutung der Bewegungskonstanten $l,\ E,\ K,\ T$ ist Gegenstand einer Übungsaufgabe.
Für massive Teilchen ($K = 1$) ist der Energiesatz (5.16) formal identisch mit dem des Keplerproblems mit dem Zusatzterm $-\frac{\mathcal{M}l^2}{r^3}$ im **effektiven Potential** V_{eff}. Aus diesem lässt sich qualitativ die *Radialbewegung* bestimmen:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{l^2}{\mathcal{M}}r + 3l^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung in r ist

$$\Delta = \frac{l^4}{4\mathcal{M}^2} - 3l^2,$$

daher die Bedingung für die Existenz eines kritischen Punkts von V_{eff}

$$|l| \geq 2\sqrt{3}\mathcal{M}. \tag{5.17}$$

Daher hat V_{eff} kein lokales Minimum, falls $|l| < 2\sqrt{3}\mathcal{M}$. In diesem Fall gibt es daher keine gebundene Bahn, insbesondere führt freier Fall aus dem Unendlichen mit *Impaktparameter* $d < 2\sqrt{3}\mathcal{M} \cdot c/v_\infty$ unweigerlich ins Zentrum. Mit anderen Worten: Der (klassische) **Einfangquerschnitt** der Schwarzschild-Lösung für im Unendlichen mit Geschwindigkeit v_∞ einfallende Teilchen ist $\sigma_c = 12\pi\mathcal{M}^2 c^2/v_\infty^2$. Falls $l > 2\sqrt{3}\mathcal{M}$, hängt σ_c auf komplizierte Weise von v_∞ ab, bleibt aber immer von der Größenordnung $(2\mathcal{M})^2 c^2/v_\infty^2$. Im Gegensatz zum Keplerpotential wirkt also die Schwarzschild-Geometrie in diesem Sinne wie ein "Loch", dessen Durchmesser ungefähr gleich dem Schwarzschild-Radius $2\mathcal{M}$ mal c/v_∞ ist.
Falls $l \geq 2\sqrt{3}\mathcal{M}$, verschwindet dV_{eff}/dr in

$$r_\pm = \frac{l^2}{2\mathcal{M}} \pm \sqrt{\frac{l^4}{4\mathcal{M}^2} - 3l^2}.$$

Für $l > 2\sqrt{3}\mathcal{M}$ hat daher V_{eff} ein lokales Minimum in $r_+ > 6\mathcal{M}$. Um diesen Wert von r existieren daher stabile gebundene Bahnen, wobei die *kleinste stabile Kreisbahn* bei $r = 6\mathcal{M}$ für $l = 2\sqrt{3}\mathcal{M}$ auftritt. Der auffälligste Unterschied zum Keplerpotential besteht im Verhalten $V_{eff} \to -\infty$ für $r \to 2\mathcal{M}$ und in der endlichen Höhe der "Drehimpulsbarriere" = Maximum von V_{eff}. Dieses wird zwar für $l > 4\mathcal{M}$ positiv, bleibt aber für endliches l endlich. Da $lim_{l\to\infty} r_- = 3\mathcal{M}$, ist $r = 3\mathcal{M}$ der Grenzradius der innersten *instabilen* Kreisbahn.
Für Licht ($K = 0$) hat V_{eff} ein Maximum in $r = 3\mathcal{M}$. Hier gibt es also eine instabile Kreisbahn für Photonen, eine stabile existiert nicht. Ein Photon in $r < 3\mathcal{M}$ muss ins Zentrum fallen, falls $r^2(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})^{-1}|\frac{d\phi}{dt}|$, also im wesentlichen die Abweichung seiner Bewegungsrichtung von der (nach außen weisenden) Vertikalen, zu groß ist. Offenbar wird für $r \to 2\mathcal{M}$ das Entweichen immer schwieriger; für $r \leq 2\mathcal{M}$ wird es vollends unmöglich, wie wir in Kap. 6 sehen werden - daher die Bezeichnung "**Schwarzes Loch**" für diesen Bereich. Aus dem Maximalwert des effektiven Potentials $V_{max} = l^2/(54\mathcal{M}^2)$ folgt der Einfangquerschnitt für Photonen $\sigma_c = 27\pi\mathcal{M}^2$. (Dieser Wert geht stetig aus der für massive Teilchen gültigen Formel $\sigma_c \approx 27\pi\mathcal{M}^2 c^2/v_\infty^2$ *f.* $l \gg \mathcal{M}$ hervor.)

Die Form der Bahnkurve

Wir suchen die Bahn eines frei fallenden Teilchens in der Darstellung $r = r(\phi)$. Wie im klassischen Keplerproblem benützen wir

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

und die Erhaltungsgrößen

$$e^\nu \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - e^\mu r^2 \dot{\phi}^2 = K,\ e^\nu \dot{t} = E,\ e^\mu r^2 \dot{\phi} = l \Rightarrow$$

$$\dot{r}^2 = e^{-\lambda}(e^{-\nu}E^2 - e^{-\mu}r^{-2}l^2 - K) \Rightarrow$$

$$(\frac{dr}{d\phi})^2 = \frac{r^4 e^{2\mu-\lambda}}{l^2}(e^{-\nu}E^2 - e^{-\mu}r^{-2}l^2 - K).$$

Verwenden wir ebenfalls wie im Kepler-Problem die Variable

$$\frac{1}{r} \equiv u \Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = -r^2 \frac{du}{d\phi},$$

erhalten wir

$$(\frac{du}{d\phi})^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}l^{-2}E^2 - e^{\mu-\lambda}u^2 - Ke^{2\mu-\lambda}l^{-2} =: W^2(u). \tag{5.18}$$

Die Gleichung für die Bahnkurve ist dann

$$\phi = \int^u \frac{du'}{W(u')}. \tag{5.19}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein elliptisches Integral, das sich i.a. nur durch Reihenentwicklung berechnen lässt. Am einfachsten geschieht dies in isotropen Koordinaten:

$$\mu = \lambda \Rightarrow ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu d\vec{x}^2.$$

Wir entwickeln

$$e^\nu = 1 - 2\mathcal{M}u + 2\beta\mathcal{M}^2u^2 + \cdots\ , \tag{5.20}$$

$$e^\mu = 1 + 2\gamma\mathcal{M}u + \cdots\ . \tag{5.21}$$

Diese Entwicklung ist Teil der sogenannten *parametrisierten post-Newtonschen (PPN) Näherung*. Insgesamt verwendet der PPN-Formalismus 10 Parameter. β und γ sind zwei dieser **PPN-Parameter**. Für die Schwarzschild-Lösung in isotropen Koordinaten erhalten wir

$$e^\nu = (\frac{1 - \mathcal{M}u/2}{1 + \mathcal{M}u/2})^2 = \frac{1 - \mathcal{M}u + \mathcal{M}^2u^2/4}{1 + \mathcal{M}u + \mathcal{M}^2u^2/4} \approx 1 - 2\mathcal{M}u + 2\mathcal{M}^2u^2, \tag{5.22}$$

$$e^\mu = (1 + \mathcal{M}u/2)^4 \approx 1 + 2\mathcal{M}u. \tag{5.23}$$

Daher ist in der ART

$$\beta = 1,\ \gamma = 1. \tag{5.24}$$

5.3 Experimentelle Tests der ART

Die PPN-Parameter β und γ lassen sich experimentell z.B. im Sonnensystem bestimmen und mit der Vorhersage (5.24) der ART vergleichen. Wir diskutieren hier die drei wichtigsten Effekte.

5.3.1 Periastronverschiebung

In der Newtonschen Näherung ($|T| \ll 1$) ist die spezifische Gesamtenergie eines gebundenen Teilchens $T \approx -\mathcal{M}/(2a)$, wo a die große Halbachse der Bahnellipse bedeutet. Daher ist

$$E^2 = 1 + 2T \approx 1 - \frac{\mathcal{M}}{a}.$$

Aus (5.20) folgt

$$e^{-\nu} \approx 1 + 2\mathcal{M}u + 2(2-\beta)\mathcal{M}^2u^2$$

und aus (5.18) mit $\lambda = \mu$

$$W^2(u) = e^{\mu-\nu}l^{-2}E^2 - u^2 - Ke^{\mu}l^{-2}$$

$$\approx (1+2\gamma\mathcal{M}u)(1+2\mathcal{M}u+2(2-\beta)\mathcal{M}^2u^2)l^{-2}(1-\frac{\mathcal{M}}{a}) - u^2 - (1+2\gamma\mathcal{M}u)l^{-2}.$$

Man sieht, dass in der Newtonschen Näherung, die Terme $O(\mathcal{M}^2)$ vernachlässigt, der Parameter γ nicht beiträgt (entsprechend der Tatsache, dass nur h_{00} in die Geodätengleichung eingeht). Genauer ist in dieser Näherung

$$W^2(u) \approx (1+2\mathcal{M}u)l^{-2}(1-\frac{\mathcal{M}}{a}) - u^2 - l^{-2} \approx -\frac{\mathcal{M}}{al^2} + \frac{2\mathcal{M}u}{l^2} - u^2,$$

was auf die bekannte Ellipse als Bahnkurve führt. Eine genauere *post-Newtonsche* Näherung entwickelt $W^2(u)$ bis einschließlich $O(\mathcal{M}^2)$, d.h. es werden Korrekturen der elliptischen Bahn bis zu dieser Ordnung berücksichtigt. Das Resultat ist (Übungsaufgabe)

$$W^2(u) = -\frac{\mathcal{M}}{al^2}+[2\mathcal{M}-2(\gamma+1)\frac{\mathcal{M}^2}{a}]l^{-2}u-[1-\mathcal{M}^2(2(2-\beta)+4\gamma)l^{-2}]u^2 \equiv A+Bu-Cu^2. \quad (5.25)$$

Es führt auf die Bahngleichung

$$\phi = \int^u \frac{du'}{\sqrt{A+Bu'-Cu'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}}arcsin\frac{2Cu-B}{\sqrt{B^2+4AC}}. \quad (5.26)$$

Die Bahnkurve ist geschlossen, wenn $C = 1$, weil dann $u(\phi)$ die Periode 2π hat. Mit den allgemein-relativistischen Werten (5.24) von β, γ ist $C < 1$.

Daher wächst ϕ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Periapsis-Durchgängen ($u = max$) um $2\pi/\sqrt{C} = 2\pi + \Delta\phi$ mit $\Delta\phi > 0$, d.h. die Periapsis rückt vor und es ergibt sich eine Rosettenbahn. Der physikalische Grund ist die erhöhte Anziehungskraft in der Periapsis wegen des Terms $-\mathcal{M}l^2/r^3$ im effektiven Potential. (Auch in der Elektrodynamik hat die entsprechende Bahn im Coulomb-Potential $C < 1$.)
Aus (5.25) lesen wir ab

$$\Delta\phi = 2\pi(\frac{1}{\sqrt{C}} - 1) \approx 2\pi\frac{\mathcal{M}^2}{l^2}(2 - \beta + 2\gamma).$$

Für die Umlaufzeit τ einer annähernd elliptischen Bahn mit Halbradien a, b gilt

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega},\ \omega^2 a^3 = \mathcal{M} \Rightarrow$$

$$ab\pi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} r^2\dot{\phi}d\tau' = \frac{1}{2}l\tau = \frac{1}{2}la^{3/2}\frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{M}}}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a}}b.$$

Mit der *numerischen Exzentrizität*

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

haben wir

$$l^2 = \mathcal{M}a(1 - \epsilon^2)$$

und damit schließlich

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\mathcal{M}(2 - \beta + 2\gamma)}{a(1 - \epsilon^2)} = \frac{6\pi\mathcal{M}}{a(1 - \epsilon^2)}. \tag{5.27}$$

Die letzte Gleichung gilt im Fall der Schwarzschild-Lösung. Bemerkenswert ist, dass in diesen Effekt ein nichtlinearer Beitrag der Einstein-Gleichungen, nämlich der Koeffizient β, eingeht.
Historisch bedeutsam ist, dass die ART auf diese Weise einen (schon im 19. Jht. bekannten) "anomalen" Anteil der Perihelvorrückung des Planeten Merkur erklären konnte. Für diesen ist

$$a \approx 58 \cdot 10^6 km,\ \epsilon \approx 0,2 \Rightarrow \dot{\phi}_{per} = 43,03''/Jht.$$

($\dot{\phi}_{per}$ ist die *Rate* der Perihelverschiebung). Beim Vergleich mit der Beobachtung ist zu beachten, dass die Verschiebung des Perihels in ekliptikalen

Koordinaten relativ zum Frühlingspunkt gemessen wird und dieser auf Grund der Präzession der Erdachse mit etwa $5000''/Jht.$ wandert. Außerdem verursachen die säkularen Störungen der Merkurbahn durch die anderen Planeten (vor allem Venus und Jupiter) eine Präzession von ca. $530''/Jht.$ Nach Abzug dieser Effekte verbleibt der "anomale" Rest von

$$\dot{\phi}_{per,exp} = 43,11 \pm 0,45''/Jht.$$

in sehr guter Übereinstimmung mit der Vorhersage der ART. (Ein weiterer Beitrag stammt vom Quadrupolmoment J_2 der Sonne, ist aber vernachlässigbar.)
Am besten geeignet zum Studium dieses Effekts sowie auch anderer im Fall *starker Gravitationsfelder* sind *Binärpulsare*, d.h. Doppelsternsysteme, von denen mindestens ein Partner ein *Pulsar* (s. Kap. 6) ist. Z.B. hat das am längsten bekannte derartige System namens PSR 1913+16 (entdeckt von Hulse und Taylor 1974 (Nobelpreis 1993)) die folgenden Bahndaten:

$$a \approx 700000km,\ \epsilon \approx 0,6,\ M \approx 2,8M_\odot \Rightarrow \dot{\phi}_{per} \approx 4,2°/J.$$

Das am extremsten relativistische bekannte System ist der im Jahr 2003 und bisher einzige entdeckte *Doppelpulsar* PSR J0737-3039A,B mit $T = 144min$, $\epsilon = 0,9$ und $\dot{\phi}_{per} = 16,9°/J.$ Langfristig sollten in diesem System auch die geodätische Präzession und die gravimagnetische Periastronpräzession nachweisbar sein.

5.3.2 Lichtablenkung

Mit $K = 0$ erhalten wir in der linearen Näherung (die hier ausreicht) und in isotropen Koordinaten

$$W^2(u) = e^{\mu-\nu}l^{-2}E^2 - u^2 \approx (1 + 2(1+\gamma)\mathcal{M}u)E^2l^{-2} - u^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{E^2}{l^2},\ B = 2(1+\gamma)\mathcal{M}\frac{E^2}{l^2},\ C = 1$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{C}}arcsin\frac{2Cu - B}{\sqrt{B^2 + 4AC}} = arcsin\frac{u - (1+\gamma)\mathcal{M}E^2l^{-2}}{El^{-1}\sqrt{(1+\gamma)^2\mathcal{M}^2E^2l^{-2} + 1}}.$$

Die zuletzt im Nenner auftretende Wurzel können wir näherungsweise gleich 1 setzen, weil der Impaktparameter für Photonen bezüglich eines opaken Objekts mit $R \gg \mathcal{M}$ notwendigerweise

$$d = \frac{l}{E} \gg \mathcal{M}$$

erfüllt. Damit vereinfacht sich die Bahngleichung zu

$$u = \frac{E}{l} sin\phi + (1+\gamma)\mathcal{M}E^2 l^{-2} \Rightarrow$$

$$r = \frac{r_0}{1 + csin\phi},\ c = \frac{l/E}{(1+\gamma)\mathcal{M}} \gg 1.$$

Da $c > 1$, geht $r \to \infty$ für $\phi \to \phi_\infty$ mit $sin\phi_\infty = -1/c$. Der Minimalwert r_{min} der Bahn entspricht dem Winkel $\phi = \pi/2$:

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+c}.$$

Der **Ablenkwinkel** $\delta = -2\phi_\infty$ berechnet sich aus

$$\phi_\infty \approx sin\phi_\infty = -(1+\gamma)\mathcal{M}\frac{E}{l},$$

$$\frac{l}{E} \approx r^2 \frac{d\phi}{dt} = r_{min}\frac{r_{min} d\phi}{dt} \approx r_{min}$$

zu

$$\delta = \frac{2(1+\gamma)\mathcal{M}}{r_{min}}. \tag{5.28}$$

Für einen den Sonnenrand streifenden Lichtstrahl sagt die ART ($\gamma = 1$) den Ablenkwinkel

$$\delta_\odot = \frac{4\mathcal{M}_\odot}{R_\odot} = 1,75'' \tag{5.29}$$

voraus. Das ist das Doppelte des Newtonschen Werts ($\gamma = 0$). Diese Vorhersage wurde 1919 durch die berühmte Sonnenfinsternisexpedition von Eddington qualitativ bestätigt. Die genaueste Messung von $\delta_\odot$ ist im Radiobereich mit VLBI mit Hilfe des Quasars 3C273, der regelmäßig von der Sonne verdeckt wird, möglich (allerdings ist auch die Brechung durch die Sonnenkorona zu berücksichtigen). Der Astrometriesatellit HIPPARCOS konnte den Effekt sogar noch für Sterne bis ca. 90° Winkelabstand von der Sonne nachweisen.
Eine wichtige Konsequenz der Lichtablenkung ist der **Gravitationslinseneffekt**: Bei günstiger relativer Position von Lichtquelle S, ablenkender Masse L ("Linse") und Beobachter O sieht dieser die Quelle vergrößert (und mit erhöhter Gesamthelligkeit). Wenn die Linse durch eine sphärisch symmetrische Verteilung mit Masse $\mathcal{M}$ und vernachlässigbarer Ausdehnung genähert werden kann, wird sie als **Mikrolinse** bezeichnet. In diesem Fall und in der **Kleinwinkelnäherung** $\delta \ll 1$ kann der Lichtweg von S vorbei an L nach O im Rahmen der euklidischen Geometrie durch 2 gerade Strecken genähert werden, die den Winkel $\pi - \delta$ einschließen. Sei S' der scheinbare Ort der

Quelle, D_{PQ} der Abstand zwischen Punkten P und Q, θ der Winkel LOS' und β der Winkel LOS. Dann ist

$$\theta D_{OS} = \beta D_{OS} + \delta D_{LS}.$$

Wegen $\delta = 4\mathcal{M}/r_{min}$ und $r_{min} = D_{OL}\theta$ folgt

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \tag{5.30}$$

$$\theta_E \equiv \sqrt{4\mathcal{M}\frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}}. \tag{5.31}$$

Die Gleichung (5.30) ist der einfachste Fall der sog. **Linsengleichung**, θ_E wird als **Einstein-Radius** bezeichnet. Bei gegebener Quellenposition β ist (5.30) eine quadratische Gleichung für θ und hat daher zwei Lösungen

$$\theta_\pm = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2}$$
$$\Rightarrow \theta_+ > \beta,\ \theta_E;\ -\theta_E < \theta_- < 0.$$

Die beiden Bildpunkte liegen also diametral entgegengesetzt auf verschiedenen Seiten der Linse. Falls $\beta = 0$, ist $\theta_\pm = \pm\theta_E$. Eine punktförmige Quelle erscheint dann als sog. **Einstein-Ring**. Tatsächlich hat das Bild der Quelle im Fall einer *allgemeinen* Linse eine *ungerade* Zahl von Komponenten, was in der hier gemachten Näherung nicht einzusehen ist. Betrachten wir als typisches Beispiel zwei *Galaxien* L, S mit $D_{OL} = 1000Mpc$, $D_{OS} = 3000Mpc$, erhalten wir

$$\theta_E \approx 1,8 \cdot \sqrt{\frac{M}{10^{12}M_\odot}} arcsec.$$

Daraus ersieht man die Wichtigkeit des Gravitationslinseneffekts für die Kosmologie. Z.B. gestattet die Kenntnis der Laufzeitdifferenz zwischen 2 Bildern die absolute Entfernungsbestimmung. Der diesbezügliche Rekordhalter ist der 2003 entdeckte Quasar SDSS J1004+4112, der von einem Galaxienhaufen in 5 Bilder aufgespalten wird. Die Zeitverzögerung zwischen zweien von diesen beträgt 822 Tage. Da θ eine nichtlineare Funktion von β ist, sind die von einer Gravitationslinse erzeugten Bilder *verzerrt*. Diese scheinbare Deformation des Hintergrundes durch Vordergrundobjekte ist im Prinzip immer vorhanden und wird als *cosmic shear* bezeichnet. Sie erlaubt eine *Tomographie* des Vordergrundes, d.h. die dreidimensionale Bestimmung der Massenverteilung. Das ist vor allem deswegen interessant, weil der Großteil der Masse in Galaxienhaufen nicht sichtbar ist. Auf diese Weise konnnte in den letzten Jahren erstmals die Verteilung der sog. *Dunklen Materie* (s. Kap. 7) entlang ausgewählter Sichtlinien bis zu kosmologischen Distanzen bestimmt werden.

5.3.3 Lichtlaufzeitverzögerung und weitere Tests

Die **Lichtlaufzeitverzögerung** (Shapiro-Effekt) ergibt sich durch Vergleich der Lichtausbreitung in post-Newtonscher Näherung mit der im fiktiven Minkowskiraum mit kartesischen Koordinaten = isotrope Koordinaten. Für einen Lichtstrahl gilt

$$ds^2 = (1 + 2V)dt^2 - (1 - 2\gamma V + \cdots)d\vec{x}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$c(\vec{x}) = \sqrt{-\frac{g_{00}}{g_{11}}} = 1 + (1 + \gamma)V - \cdots < 1.$$

Hier ist c die Koordinaten-Lichtgeschwindigkeit. Im Vergleich zum Minkowskiraum ist aber Licht nicht nur langsamer, sondern folgt auch einer gekrümmten Bahn. Aus beiden Gründen ist die Laufzeit größer. Dieser Effekt ist am besten mit Radiotranspondern auf Raumsonden und Planetenoberflächen messbar. Diese Messungen liefern den bisher genauesten Wert von $\beta = \gamma = 1$: $|\gamma - 1| < 10^{-5}$ (Raumsonde Cassini 1997- 2003) und $|\beta - 1| < 10^{-3}$ (Viking-Marslander 1976-1982 und Lunar Laser Ranging (dauert noch an)).
Wir haben bisher experimentelle Tests für post-Newtonsche Effekte besprochen. Andere Experimente testen hingegen nur das **Äquivalenzprinzip**. Die klassischen Versuche von Eötvös über die Kompensation von Schwerkraft und Zentrifugalkraft in Festkörpern verschiedener Zusammensetzung wurden mittlerweile bis zu einer Genauigkeit von 10^{-13} verfeinert. Auch die **Rotverschiebung** testet (bei bekannter stationärer Metrik) nur das Äquivalenzprinzip. Diese kann heute mit Lasern auf der Erdoberfläche über Höhenunterschiede von wenigen Metern nachgewiesen werden. Im Fall von **Materiewellen** (Neutronen, Bose-Einstein-Kondensate) gelingt dies sogar auf cm-Niveau.
Die Rotverschiebung kann aber auch als *Instrument* zum Ausmessen **starker Gravitationsfelder** verwendet werden. Das prominenteste Beispiel ist die Analyse der Bahnbewegung in Akkretionsscheiben um mutmaßliche Schwarze Löcher mit Hilfe des Profils der 6,4 keV-Röntgenlinie des Eisens. Die Verbreiterung dieser Spektrallinie zum Roten hin bedeutet für den Innenrand der Akkretionscheibe der nahen Seyfert-Galaxie MCG 6-30-15 einen Wert von $r < 6\mathcal{M}$, was nur im Fall eines *rotierenden* Schwarzen Lochs möglich ist.
Ein wichtiger Test der (linearisierten) ART ist der Nachweis von **Gravitationswellen**, der aber bisher nur indirekt gelungen ist (s. Kap. 8). Schließlich kann auch die Bestimmung kosmologischer Parameter als ein Test von *exakten* Lösungen der Einstein-Gleichungen aufgefasst werden (s. Kap. 7).

Kapitel 6

Gravitationskollaps und Schwarze Löcher

6.1 Sternbau und Gravitationskollaps

Im folgenden benötigen wir die **Innenraumlösung für einen kugelsymmetrischen Stern** im hydrostatischen Gleichgewicht (zwischen Schwerkraft und Druck). Wir machen daher für das Linienelement wieder den allgemeinen sphärisch symmetrischen Ansatz (5.5)

$$ds^2 \doteq e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

wobei aber die Bedingung der Statik $\lambda = \lambda(r),\ \mu = \nu(r)$ zusätzlich auferlegt werden muss, da wir nicht mehr den Vakuumfall betrachten. Der Stern bestehe aus einem **idealen Fluid**, definiert durch den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ik} = (\epsilon + p) u_i u_k + p g_{ik}. \tag{6.1}$$

In einem lokalen Ruhsystem des Fluids reduziert sich der EIT zu $diag(\epsilon, p, p, p)$ mit der lokalen Massendichte ϵ und dem lokalen Druck p, was die kovariante Darstellung (6.1) festlegt. Wegen der Statik ist in den Koordinaten der Metrik (5.5) $u^\alpha = 0$. Deswegen und wegen der Diagonalform der Metrik ist die gemischte Version $T^i{}_k$ des EIT diagonal und hat dieselben Komponenten wie in einem lokalen Ruhsystem. Daher lauten die Einstein-Gleichungen (vgl. den Abschnitt 5.1)

$$-G^0{}_0 = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\kappa\epsilon, \tag{6.2}$$

$$-G^1{}_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = \kappa p \tag{6.3}$$

($G^0{}_1 = 0$ ist wegen $\partial\lambda/\partial t = 0$ identisch erfüllt, und $G^2{}_2 = G^3{}_3 = -\kappa p$ werden nicht benötigt). Aus (6.2) folgt

$$\frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) = 1 - \kappa\epsilon r^2 \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mathcal{M}(r)}{r}, \; 2\mathcal{M}(r) := \kappa \int_0^r \epsilon(r')r'^2 dr'. \tag{6.4}$$

Die Differenz von (6.3) und (6.2) liefert

$$\nu(r) = -\lambda(r) + \kappa \int_\infty^r dr' r' e^\lambda (\epsilon + p), \tag{6.5}$$

weil im Außenraum die Schwarzschild-Metrik gilt: $\nu = -\lambda$ für $r > R$ (Koordinatenradius des Sterns) und $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(R)$. Die Funktionen $\epsilon(r)$, $p(r)$ sind aus der **Zustandsgleichung** $p = p(\epsilon)$ und $\nabla_k T_i{}^k = 0$ zu bestimmen. Eine kurze Rechnung (Übungsaufgabe) ergibt

$$\nabla_k T_1{}^k = \frac{dp}{dr} + \frac{\nu'}{2}(\epsilon + p) = 0.$$

Aus (6.3) folgt

$$\nu' = r[(\kappa p + \frac{1}{r^2})e^\lambda - \frac{1}{r^2}] = \frac{\kappa p r^3 + r(1 - e^{-\lambda})}{r^2 e^{-\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\epsilon + p)(\mathcal{M}(r) + \frac{1}{2}\kappa p r^3)}{r(r - 2\mathcal{M}(r))}. \tag{6.6}$$

Dies ist die **Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung**, die mit der **Randbedingung** $p(R) = 0$ zu lösen ist. Es ist instruktiv, diese Gleichung mit der entsprechenden Newtonschen Gleichgewichtsbedingung zu vergleichen:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\epsilon = -\frac{\epsilon\mathcal{M}(r)}{r^2} \tag{6.7}$$

$$\Rightarrow |\frac{dp}{dr}|_{ART} > |\frac{dp}{dr}|_{Newton}.$$

Die Stabilisierung eines Sterns in der ART erfordert daher vergleichsweise mehr Druck, d.h. der Gravitationskollaps ist schwerer aufzuhalten als in der Newtonschen Theorie, u.a. deswegen, weil auch Druck anziehend wirkt. Wegen der Statik ist

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2\mathcal{M}(r)}{r}} > 0$$

und insbesondere $R > 2\mathcal{M}$ oder $\mathcal{M} < R/2$. Allgemein folgt sogar aus $\epsilon \geq 0$, $\frac{d\epsilon}{dr} \leq 0$, dass $\mathcal{M} < \frac{4}{9}R$, weil sonst $p(0)$ divergiert (Übungsaufgabe). Unter denselben Voraussetzungen gilt: Für jede wohldefinierte Zustandsgleichung unterhalb einer Dichte ϵ_0 (eine sehr realistische Voraussetzung) gibt es eine **obere Grenzmasse** *unabhängig von* R und unabhängig von der Zustandsgleichung oberhalb von ϵ_0 (o. Bew.).

Für die Astrophysik besonders relevant ist die Existenz einer solchen Grenzmasse für ein gravitativ gebundenes System aus *relativistischen* Fermionen. Wir wollen diese Grenzmasse unter Vernachlässigung sonstiger Wechselwirkungen zwischen den Fermionen heuristisch herleiten. Dazu betrachten wir N Fermionen mit Masse m und Impuls p in einer Kugel mit Radius R. Falls $p \gg mc$, ist ihre Gesamtenergie ($\sim$ relativistische kinetische Energie + Newtonsche potentielle Energie)

$$E \sim Nc\sqrt{m^2c^2 + p^2} - N^2\frac{Gm^2}{R} \sim Npc - N^2\frac{Gm^2}{R}.$$

Wegen des Pauliverbots müssen die Fermionen einen mittleren Abstand $d \sim (V/N)^{1/3}$ untereinander einhalten. Dieser Abstand impliziert wegen der Heisenbergschen Unschärferelation einen *Nullpunktsimpuls* $p \sim \frac{\hbar}{d} \sim \hbar N^{1/3}/R$. Daher wird

$$E \sim (N^{\frac{4}{3}}\hbar c - N^2 Gm^2)\frac{1}{R}$$

für kleines R beliebig negativ, falls

$$N^{\frac{2}{3}} > \frac{\hbar c}{Gm^2}$$

oder

$$N > (\frac{\hbar c}{Gm^2})^{\frac{3}{2}} \equiv \alpha_G^{-\frac{3}{2}} \sim 10^{57} \tag{6.8}$$

für $m = m_N$ (Nukleonenmasse). Die entsprechende Grenzmasse

$$M_{Ch} = m_N \alpha_G^{-\frac{3}{2}} \approx 1,4 M_\odot \tag{6.9}$$

wird als **Chandrasekhar-Grenzmasse** bezeichnet. Unter Berücksichtigung der starken Wechselwirkung beträgt die Grenzmasse für *Kernmaterie* etwa $1,8 M_\odot$ (abhängig von der nicht genau bekannten Zustandsgleichung).

Die Chandrasekhar-Grenzmasse ist relevant für die Endstadien der **Sternentwicklung**. Diese beginnt mit dem Kollaps zum *Protostern* durch die Gravitationsinstabilität einer Molekülwolke. Daran schließt sich (für normale Sterne) das lange *Hauptreihenstadium*, in dem die Wasserstofffusion mit ihrem thermischen Druck das hydrostatische Gleichgewicht aufrecht erhält. Mit dem Erlöschen der Wasserstofffusion im Sternzentrum beginnt das kürzere, weil letztlich instabile *Rote-Riesen-Stadium.* Falls die Sternmasse $M < 8M_{\odot}$ ist, endet dieses Stadium mit dem Auswurf eines "planetarischen Nebels", der den als *Weißer Zwerg* bezeichneten *Core* (bestehend aus der "Fusionsasche" des Sterns) des Roten Riesen zurücklässt. Ein Weißer Zwerg wird durch den Fermi-Druck des entarteten Elektronengases stabilisiert und hat einen Radius von etwa 10000 km. Falls $M > 8M_{\odot}$, kommt es nach Erlöschen der Kernfusion zum Kollaps des zuletzt durch Fusion gebildeten, aus Eisen bestehenden Cores. Dieser Kollaps mündet aber letzlich wegen der durch ihn ausgelösten Kernreaktionen in der Hülle und wegen des Drucks der freigesetzten Neutrinos in eine Explosion, in der der Stern seine Hülle abwirft. Diese Explosion wird als **Typ II-Supernova** bezeichnet. Zwar ist eine vollständige *Desintegration* des Sterns nicht ausgeschlossen, aber in der Regel verbleibt der kollabierte Core als kompakter Rest. Falls $M_{Core} < 1,8M_{\odot}$, ist dieser Rest ein **Neutronenstern**, entstanden durch die Reaktion $e^- + p \to n + \nu_e$. Er wird durch den Fermi-Druck der *Neutronen* stabilisiert. (Möglicherweise erfolgt im Inneren eines hinreichend massiven Neutronensterns ein Phasenübergang zu *seltsamer* oder *Quarkmaterie.*) Neutronensterne haben einen Radius von $\sim 10km \sim 5\mathcal{M}$, sodass die ART für ihre Beschreibung wesentlich ist. (Junge) Neutronensterne rotieren mit einer Periode im Bereich von Millisekunden bis Sekunden. Außerdem weisen sie ein starkes Dipol-Magnetfeld ($10^{12} - 10^{15}G$) auf, dessen Achse meist nicht mit der Rotationsachse übereinstimmt. Dies bewirkt den *Pulsarmechanismus*, nämlich (durch relativistisches "Beamen" geladener Teilchen = Umkehrung der relativistischen Aberration) gebündelte elektromagnetische Strahlung in Richtung der Dipolachse, deren Spektrum vom Radio- bis in den Gamma-Bereich reicht. Neben der eventuell durch Akkretion verursachten Röntgenstrahlung ist diese Strahlung die wichtigste Quelle astrophysikalischer Information über diese Objekte. Falls $M_{Core} > 1,8M_{\odot}$ (entsprechend einer Gesamtmasse des Sterns von mehr als $30M_{\odot}$), überschreitet der Rest die Chandrasekhar-Grenze und kann durch keine bekannte Wechselwirkung vor dem vollständigen Gravitationskollaps bewahrt werden: Es entsteht ein **Schwarzes Loch** - die allgemein relativistische Verallgemeinerung eines Newtonschen Massenpunkts. (Möglich erscheint auch der "stille" Kollaps zum Schwarzen Loch ohne Supernova-Explosion.) Eine extreme Variante von Typ II-Supernovae sind die sogenannten *Hypernovae.* In diesen entsteht durch Akkretion auf das frisch entstandene Schwarze Loch ein Paar von *Jets* (gebündelte Strahlen geladener relativistischer Teilchen). Kollisionen innerhalb der Jets und relativistisches Beamen erzeugen kurzzeitig (einige Sekunden bis Minuten) einen "Gammastrahlenblitz" (*gamma ray burst*) und werden damit vorübergehend zu den leuchtkräftigsten Objekten im Universum (mit Leuchtkraft L bis zu $10^{17}L_{\odot}$).

6.2 Bindungsenergie und Positivität der Masse

Gemäß Gl. (6.4) ist die Gesamtmasse einer sphärisch symmetrischen Verteilung

$$M = 4\pi \int_0^R drr^2 \epsilon(r). \tag{6.10}$$

Diese ist aber kleiner als das entsprechende Integral mit dem geometrisch korrekten Hyperflächenelement

$$M_{mat} := \int \epsilon d\sigma = 4\pi \int drr^2 (1 - 2\mathcal{M}(r)/r)^{-1/2} \epsilon(r) = \int T_{00} d\sigma = -\int T_i{}^k n^i d\sigma_k \tag{6.11}$$

$$\Rightarrow M_{mat} > M \equiv M_{mat} + M_{grav}. \tag{6.12}$$

In der 1. post-Newtonschen Näherung ist zu sehen, dass $M_{grav} < 0$ die Bedeutung der Gravitations-Selbstenergie = - **Bindungsenergie** der Verteilung hat. Daher ist M_{mat} die *preassembly mass*, d.h. die Summe der Massen der (ursprünglich oder fiktiv) *isolierten* Bestandteile der Verteilung. Der *relative Massendefekt* $-M_{grav}/M_{mat}$ beträgt in Neutronensternen ca. 30 Prozent. (Unabhängig von der linearen Näherung folgt die Bedeutung von M_{mat} aus der Bemerkung, dass der Normalenvektor n^i in (6.11) identisch mit dem normierten Killingvektor $\xi^i/\sqrt{-\xi^2}$ ist. Der Divisor $\sqrt{-\xi^2}$ hebt den Effekt der Rotverschiebung, d.h. den potentiellen Energieanteil in der *materiellen Gesamtenergie*

$$E = -\int T_i{}^k \xi^i d\sigma_k$$

auf. Es gilt $E < M < M_{mat}$, weil M zusätzlich zu E auch einen Beitrag des Drucks enthält, s. Übungsaufgabe.)
Im Fall der Newtonschen Gravitation kann die Bindungsenergie beliebig groß, d.h. die Gesamtenergie beliebig klein (negativ) werden, was bekanntlich auf Instabilität führt. Wie ist die Situation in der ART? Um diese Frage zu beantworten, ist erst einmal der Massenbegriff zu klären. Der Energie-Impulstensor enthält keinen Beitrag des Gravitationsfelds. Dieser Beitrag sollte also in der linken Seite der Feldgleichungen enthalten sein. Da das Gravitationsfeld lokal wegtransformierbar ist, ist aber klar, dass es keinen Energie-Impuls-Tensor des Gravitationsfeldes geben kann. Es kann zwar ein "Energie-Impuls-Pseudotensor" definiert werden, dieser transformiert aber nur unter linearen Transformationen wie ein Tensor und zeichnet daher ein spezielles Koordinatensystem oder eine spezielle Hintergrundsmetrik aus. Allgemein ist die Lokalisierung der Energie des Gravitationsfelds problematisch. Es ist aber möglich, die *Gesamtenergie* eines isolierten Systems sinnvoll zu definieren. Im stationären Fall leistet das die *Komar-Masse*, die Gegenstand

einer Übungsaufgabe ist. Für eine allgemeine asymptotisch flache Raum-Zeit lässt sich aus der Hamiltonschen Formulierung der Feldgleichungen der **ADM-Viererimpuls** P^i gewinnen, von dem wir hier nur die Energiekomponente angeben: Sei Σ eine asymptotisch flache raumartige Hyperfläche mit induzierter Metrik $h_{\alpha\beta}$. Dann ist

$$E_{ADM} \equiv P^0 = \frac{1}{2\kappa} \int_{S_\infty} (h_{\alpha\beta,\beta} - h_{\beta\beta,\alpha}) dF^\alpha. \tag{6.13}$$

Hier ist S_∞ eine Sphäre (im Sinn der asymptotischen euklidischen Geometrie) "im Unendlichen" und dF^α das durch ihre Einbettung in Σ definierte vektorielle Flächenelement. Die ADM-Energie umfasst den gesamten Energieinhalt der Raum-Zeit und ist von Σ unabhängig. (Es ist auch möglich, den Energieverlust durch Gravitationsstrahlung zu beschreiben. Dazu definiert man die Gesamtenergie *zu einer gegebenen retardierten Zeit* durch ein Integral vom Komar-Typ über eine Sphäre im *lichtartigen* Unendlichen, das das erzeugende Vektorfeld ξ einer gewissen asymptotischen Zeittranslationssymmetrie enthält:

$$E_B = -\frac{1}{\kappa} \int_{S_\infty} \nabla^i \xi^k d\sigma_{ik} \tag{6.14}$$

$$(d\sigma_{ik} = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{iklm} dx^l \wedge dx^m).$$

E_B wird als *Bondi-Energie* bezeichnet.)
Es ist höchst bemerkenswert, dass in der ART im Gegensatz zur Newtonschen Theorie ein **Massenpositivitätstheorem** gilt: Erfüllt eine isolierte Verteilung auf einer raumartigen asymptotisch euklidischen Hyperfläche die **Energiedominanzbedingung** ($T^{ab}u_b$ *zeitartig* $\forall$ *zeitartigen* u bzw. $\epsilon \geq |\vec{S}|$) und sind die Einstein-Gleichungen erfüllt, dann erfüllt ihre Gesamtmasse $M \geq 0$ (genauer: ihr ADM-Viererimpuls P^i ist zeitartig und zukunftsgerichtet). $M = 0$ bzw. $P^i = 0$ genau dann, wenn die Raum-Zeit der Minkowskiraum ist. (Die letzte Aussage impliziert auch die *Stabilität* des Minkowskiraums.) Die Positivität gilt auch für die Bondi-Masse. (Eine Verschärfung des Massenpositivitätstheorems ist die vor einigen Jahren bewiesene *Penrose-Ungleichung* $\mathcal{M} \geq \sqrt{A/16\pi}$. Hier bedeutet A den Flächeninhalt der äußersten *Minimalfläche* (d.h. Fläche mit verschwindender mittlerer äußerer Krümmung) in einer asymptotisch euklidischen Hyperfläche.)

6.3 Schwarze Löcher

6.3.1 Maximale analytische Erweiterung der Schwarzschild-Lösung

Die Schwarzschild-Metrik hat in $r = 2\mathcal{M}$ eine Koordinatensingularität. Wir suchen neue Koordinaten, in denen diese Singularität nicht auftritt. Dafür genügt es, sich auf das zweidimensionale Linienelement

$$dS^2 = (1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})dt^2 - \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}/r}dr^2$$

zu beschränken. Sei zunächst $r > 2\mathcal{M}$. Für radiale Nullgeodäten gilt

$$dS^2 = 0 \Rightarrow dt = \pm\frac{dr}{1 - 2\mathcal{M}/r} \equiv \pm dr^* \Rightarrow$$

$$r^* = r + 2\mathcal{M}ln(\frac{r}{2\mathcal{M}} - 1), \ -\infty < r^* < \infty. \tag{6.15}$$

r^* ist eine monotone Funktion von r und daher als Radialkoordinate geeignet. Die Gleichung für eine aus- bzw. einlaufende Nullgeodäte lautet

$$t = \pm r^* + const.$$

Wir definieren als nächstes die **Nullkoordinaten**

$$u := t - r^*, \ v := t + r^*. \tag{6.16}$$

Sie heißen so, weil $u = const$ und $v = const$ aus- bzw. einlaufende Nullgeodäten sind. In diesen Koordinaten wird das Linienelement zu

$$dS^2 = (1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})(dt^2 - dr^{*2}) = (1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})dudv. \tag{6.17}$$

Darin ist die Funktion $r(u, v)$ *implizit* definiert durch die transzendente Gleichung

$$r + 2\mathcal{M}ln(\frac{r}{2\mathcal{M}} - 1) = r^* = \frac{v - u}{2}.$$

Wir haben

$$1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} = e^{(r^* - r)/2\mathcal{M}}\frac{2\mathcal{M}}{r} \Rightarrow$$

$$dS^2 = \frac{2\mathcal{M}}{r}e^{-r/2\mathcal{M}}e^{(v-u)/4\mathcal{M}}dudv.$$

Als nächstes berechnen wir den affinen Parameter τ entlang der radialen Nullgeodäten mit Hilfe der Erhaltungsgröße

$$E = (1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})\frac{dt}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{t}(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})dt' = \frac{1}{E}\int(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})d\frac{u+v}{2}.$$

Im auslaufenden Fall $u = const$ folgt

$$\tau = \frac{1}{2E}e^{-u/4\mathcal{M}}\int_{-\infty}^{v}\frac{2\mathcal{M}}{r}e^{-r/2\mathcal{M}}e^{\frac{v'}{4\mathcal{M}}}dv'.$$

Wichtig ist nun die Beobachtung, dass die ersten zwei Faktoren im Integranden regulär in $r = 2\mathcal{M}$ ($v' \to -\infty$) sind und ihr Produkt von *beschränkter Variation* im Intervall $2\mathcal{M} \leq r < \infty$ ist. Daher

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 e^{v/4\mathcal{M}} < \tau < c_2 e^{v/4\mathcal{M}}$$

$$\Rightarrow \lim_{v\to\infty}\tau = \infty, \quad \lim_{v\to-\infty}\tau = 0.$$

Analog gilt im einlaufenden Fall

$$\lim_{u\to-\infty}\tau = -\infty, \quad \lim_{u\to\infty}\tau = 0.$$

Allgemein heißen Geodäten, deren affiner Parameter nicht ganz $\mathbf{R}$ überstreicht, **unvollständig**. Wir haben also gesehen, dass das Gebiet $\{r > 2\mathcal{M}\}$ geodätisch nicht vollständig ist. Tatsächlich lassen sich aber die betrachteten Nullgeodäten über dieses Gebiet hinaus, d.h. zu kleineren Werten von r, fortsetzen (was i.a., nämlich bei Vorliegen einer *physikalischen* Singularität, nicht möglich ist). Damit bieten sich auch *globale* Koordinaten an, nämlich die affinen Parameter selbst. Um bei elementaren Funktionen zu bleiben, wählen wir allerdings nicht diese, sondern die davon nur unwesentlich (nämlich um einen positiven und monotonen Faktor) abweichenden Funktionen

$$U = -e^{-\frac{u}{4\mathcal{M}}}, \; V = e^{\frac{v}{4\mathcal{M}}}, \tag{6.18}$$

die offensichtlich wieder Nullkoordinaten darstellen. Das Linienelement

$$dS^2 = \frac{32\mathcal{M}^3 e^{-r/2\mathcal{M}}}{r}dUdV \tag{6.19}$$

ist in diesen neuen Koordinaten im Bereich $\{r > 2\mathcal{M}\}$ *analytisch* und kann daher zu Koordinatenwerten $U > 0$, $V < 0$ fortgesetzt werden. Da die

Einstein-Gleichungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung führten, deren Koeffizienten in r (mit Ausnahme einfacher Pole) analytisch sind, ist auch die derart *analytisch fortgesetzte* Metrik Lösung dieser Gleichungen. Die durch (6.19) definierte Metrik hat offenbar keine Singularität in $r = 2\mathcal{M}$ ($U = V = 0$). Damit sind die gesuchten globalen Koordinaten gefunden. Allerdings zeigen die Gleichungen

$$UV = -e^{r^*/2\mathcal{M}} = (1 - \frac{r}{2\mathcal{M}})e^{r/2\mathcal{M}},$$

$$t = \frac{1}{2}(u + v) = 2\mathcal{M}ln|\frac{V}{U}|,$$

dass

$$r(U, V) = r(-U, -V),\ t(U, V) = t(-U, -V),$$

d.h. die Umkehrung der Transformation auf die neuen Koordinaten ist *zweideutig*. Da auch die Metrik in den neuen Koordinaten die Einstein-Gleichungen löst, ist diese Zweideutigkeit konsistent nur so zu interpretieren, dass diese tatsächlich eine Karte der vervollständigten Schwarzschild-Mannigfaltigkeit definieren, die ursprünglichen aber nicht. Dieser Sachverhalt wird am besten im **Kruskal-Diagramm** veranschaulicht. Dieses unterteilt die Raum-Zeit in 4 Sektoren, nämlich zwei asymptotisch flache (I und III) mit $r > 2\mathcal{M}$ und zwei durch die Singularität in $r = 0$ berandete (II und IV) mit $r < 2\mathcal{M}$. Die analytische Ausdehnung der Mannigfaltigkeit ist *maximal*: Jede Geodäte kann bis zu beliebigen Werten des affinen Parameters ausgedehnt werden oder trifft bei einem endlichen Wert desselben auf eine Singularität. Bemerkenswert ist die Topologie $\mathbf{R}^2 \times S^2$ ($\cong \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^3 - \{0\})$) dieser Mannigfaltgkeit und die Tatsache, dass die Singularitäten *raumartige* Linien sind (da diese nicht Bestandteil der Mannigfaltigkeit sind, bezieht sich diese Aussage genaugenommen auf die raumartigen Hyperflächen $\{r = const\}$ im Limes $const \to 0$).
Der Killingvektor $\frac{\partial}{\partial t}$ ist in I und III zeitartig, aber in II und IV raumartig. Dort ist r eine zeitartige Koordinate. Auf der verzweigten Nullhyperfläche $\{r = 2\mathcal{M}\} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$ ist $\frac{\partial}{\partial t}$ lichtartig und definiert damit einen *Killinghorizont*. Die *Verzweigungssphäre* $\{U = V = 0\}$ hat (wie auch alle anderen raumartigen Schnitte des Horizonts) den Radius $2\mathcal{M}$.
Die Regionen I und III sind zwei kausal getrennte *asymptotisch flache* Raum-Zeit-Gebiete. Die Region II wird als **Schwarzes Loch** bezeichnet. Sie ist vom flachen zukünftigen Unendlichen der Bereiche I und III nicht einsehbar (das ist die allgemeine Definition eines Schwarzen Lochs). Der Rand $\mathcal{H}^+$ des Schwarzen Lochs stellt daher einen **zukünftigen Ereignishorizont** für Beobachter in I dar. Die Region IV wird als **Weißes Loch** bezeichnet. Sie ist

durch den **vergangenen Ereignishorizont** kausal vom vergangenen Unendlichen der Region I getrennt.
Der Ereignishorizont ist auch eine **Hyperfläche unendlicher Rotverschiebung**. Eine weitere physikalisch interessante Eigenschaft ist, dass er aus **marginal gefangenen Flächen** besteht. Eine **gefangene Fläche** ist eine glatte kompakte zweidimensionale raumartige Untermannigfaltigkeit T mit der Eigenschaft, dass *beide* (d.h. "ein"- und "auslaufende") Familien von zukunftsgerichteten Nullgeodäten orthogonal auf T *kontrahieren*, d.h. der Flächeninhalt von raumartigen Schnitten der durch die beiden Familien definierten Nullhyperflächen nimmt (lokal) zur Zukunft hin ab. Die Sphären $\{t = const, r = const\}$ in II sind gefangene Flächen, die analogen Sphären auf dem Ereignishorizont haben orthogonal auslaufende Nullgeodäten mit verschwindender Kontraktion und sind daher *marginal* gefangen. Im allgemeinen, d.h. nicht sphärisch symmetrischen Fall ist der Ereignishorizont aber weder durch unendliche Rotverschiebung noch durch marginal gefangene Flächen ausgezeichnet. Die raumartigen Schnitte $\{t = const, \theta = \frac{\pi}{2}\}$ der Kruskal-Raum-Zeit sind als Rotationsparaboloide im $\mathbf{E}^3$ einbettbar. Der "Schlund", der die beiden Regionen I und III verbindet, wird als **Wurmloch** bezeichnet. Allerdings ist wegen der hier gegebenen Kausalitätsverhältnisse das Wurmloch nicht *durchfahrbar*: Der Schlund schließt sich, bevor er durchquert werden kann.

6.3.2 Gravitationskollaps und allgemeine Schwarze Löcher

Wie physikalisch sind die Regionen III und IV? Da diese als Vervollständigung einer *Vakuumlösung* auftreten, sind sie für unser Universum bedeutungslos, zumal es auch keine empirischen Hinweise auf die Existenz Weißer Löcher gibt. Schwarze Löcher entstehen (zumindest heutzutage) durch Gravitationskollaps von Materie aus regulären Anfangsbedingungen. Auch im idealisierten Fall eines sphärisch symmetrischen Kollapses treten dann im Raum-Zeit-Diagramm nur die Regionen I und II, und auch das nur teilweise, in Erscheinung. Neben dem kausaltreuen modifizierten Kruskal-Diagramm ist auch ein flächentreues Raum-Zeit-Diagramm zur Beschreibung des Vorgangs geeignet. In beiden Darstellungen sieht man, dass das Schwarze Loch im Sterninneren entsteht und nach dessen vollständigem Kollaps einen stationären Endzustand erreicht.
Sphärische Symmetrie ist keineswegs eine wesentliche Voraussetzung für die Entstehung Schwarzer Löcher, sondern diese entstehen auch aus allgemeineren Anfangsdaten. Es wird sogar vermutet, dass Schwarze Löcher den *generischen* Endzustand für den Gravitationskollaps darstellen. Diese Vermutung stützt sich auf das **Singularitätentheorem** (Hawking und Penrose 1970):

Erfüllt eine Raum-Zeit (M, g) (i) $R_{ab}u^a u^b \leq 0$ für alle zeitartigen u bzw. (wegen der Einstein-Gleichungen) erfüllt die Materie die **starke Energiebedingung** $T_{ab}u^a u^b \geq -\frac{1}{2}T^c{}_c$ und (ii) eine gewisse *Generizitätsbedingung* und (iii) existiert in (M, g) eine gefangene Fläche, dann enthält (M, g) mindestens eine unvollständige zeitartige oder Nullgeodäte. Allerdings macht dieses Theorem keine Aussage über die Natur der Singularität, die die geodätische Vollständigkeit verhindert. Insbesondere ist nicht ausgeschlossen, dass es sich um eine *nackte Singularität* handelt. Eine solche liegt per definitionem dann vor, wenn sie von einem Beobachter in einer asymptotisch flachen Region der Raum-Zeit einsehbar ist (nicht in diesen Begriff eingeschlossen ist eine "Anfangssingularität" (wie sie z.B. in einem Weißen Loch auftritt). Für eine Präzisierung dieser Definition siehe z.B. Wald(1984). Nackte Singularitäten bedeuten den Verlust der *Vorhersagbarkeit* auf Grund von Anfangsdaten und sind daher für eine physikalische Theorie untragbar. Es gibt viele Argumente dafür, dass das Endresultat des Gravitationskollapses immer ein Schwarzes Loch, d.h. nie eine nackte Singularität ist, sofern die Energiedominanzbedingung erfüllt ist und asymptotisch flache Anfangsdaten für die Einstein-Gleichungen mit geeigneten asymptotischen Abfallbedingungen für die Materiefelder vorliegen. Diese Aussage ist als die **Vermutung der kosmischen Zensur** (cosmic censorship hypothesis) bekannt und gilt als das größte ungelöste Problem der klassischen ART. Für mathematisch präzise Formulierungen dieser Hypothese siehe wieder Wald(1984). Offenbar hängt die physikalische Relevanz der Schwarzen Loch-Lösungen der Einstein-Gleichungen von der Gültigkeit der Vermutung ab. Wenn sie aber richtig ist, ergibt sich ein überraschend einfaches Bild der Endzustände des Gravitationskollapses. Es gilt nämlich das **No-Hair-Theorem**: Die Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen für *stationäre* Schwarze Löcher sind durch die drei Parameter M, J, Q bestimmt. Hierbei bedeutet J den Gesamtdrehimpuls und Q die Gesamtladung des Schwarzen Lochs. Die Verallgemeinerung der Schwarzschild-Lösung, die diese drei Parameter enthält, ist als *Kerr-Newman-Metrik* bekannt. Spezialfälle sind *Kerr* $(Q = 0)$ und *Reissner-Nordström* $(J = 0)$. Stationäre Schwarze Löcher sind also so einfach zu klassifizieren wie Fundamentalteilchen. Ihre mechanischen Eigenschaften erfüllen drei Relationen, die formal mit den Hauptsätzen der Thermodynamik übereinstimmen, wobei der Flächeninhalt des Horizonts die Rolle der Entropie spielt. Die (semiklassische) Quantentheorie zeigt, dass diese Analogie nicht nur formal besteht: Schwarze Löcher emittieren thermische Strahlung der Temperatur $T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k}$ (*Hawking-Effekt*), wo κ die *Oberflächenbeschleunigung* des Schwarzen Lochs ist ($\kappa = 1/4\mathcal{M}$ für die Schwarzschild-Metrik). Stationäre Schwarze Löcher sind daher sehr einfache, aber nichttriviale thermodynamische Systeme im (annähernden) Gleichgewicht.

Zurück zur **Phänomenologie**: Das Erscheinungsbild des Kollapses im Unendlichen ist bestimmt durch die Rotverschiebung. Da der **Rotverschiebungsfaktor** $z \equiv \Delta\lambda/\lambda \to \infty$ bei Annäherung an den Horizont, bleibt strenggenommen die Sternoberfläche für einen außenstehenden Beobachter *immer* außerhalb des Horizonts. Allerdings gilt für die Sternoberfläche

$$z(t) \propto e^{t/4\mathcal{M}} \tag{6.20}$$

(o. Bew.), d.h. die Sternoberfläche "erlischt" exponentiell mit einer Abklingzeit $\tau \sim 10^{-5}s$ für $M = M_\odot$. Das kollabierte Objekt erscheint daher sehr plötzlich als eine schwarze Scheibe vor einem durch die Lichtablenkung sehr stark verzerrten Hintergrund.
Sehr gut gesicherte **Kandidaten für Schwarze Löcher** sind die **stellaren Schwarzen Löcher**, d.h. die Endprodukte des Kollapses von massereichen Sternen. Sie sind im Prinzip nachweisbar, wenn sie einen normalen Stern als Partner haben: Die viskos auf ca. 10^8K aufgeheizte Akkretionsscheibe emittiert dann thermische Strahlung im Röntgenbereich, und die Masse des mutmaßlichen Lochs läßt sich aus dem Doppler-Effekt des Partnersterns (nach unten) abschätzen. Derzeit sind ca. ein Dutzend solche Kandidaten in unserer Galaxis und ihren Nachbarn bekannt, die Gesamtzahl der Schwarzen Löcher allein in unserer Galaxis könnte aber bis zu 10^8 betragen. Eine Unterklasse stellen die **Mikroquasare** dar, die zusätzlich zur Akkretionsscheibe (hochgradig veränderliche) *Jets* aufweisen. Eine andere Klasse bilden die **superschweren Schwarzen Löcher**. Sie sind im Zentrum der meisten Galaxien anzutreffen; nachgewiesen werden sie als unsichtbare Massenkonzentration in einem kleinen Volumen auf Grund der Keplerschen Bewegung von Sternen und Gaswolken. Das zentrale Schwarze Loch unserer Galaxis (bekannt als Radioquelle Sagittarius A^*) hat eine Masse von $3,6 \cdot 10^6 M_\odot$, es sind aber auch Schwarze Löcher mit bis zu 10^{10} Sonnenmassen bekannt. Die meisten dieser superschweren Löcher sind "still", d.h. weisen keine besondere elektromagnetische Aktivität auf. Anders verhalten sich hingegen die **quasistellaren Objekte** (QSO's), oft auch **Quasare** genannt (obwohl damit ursprünglich nur quasistellare *Radioquellen* bezeichnet wurden). Sie können in Ausschnitten des Spektrums vom Radio- bis in den Gammabereich beobachtet werden, wobei ihr Strahlungsfluss kurzzeitig (innerhalb von Tagen oder noch rascher) variiert, was auf die Kleinheit der emittierenden Region hinweist. Diese Objekte sind die zentralen "Motoren" der **aktiven Kerne** von Galaxien (AGN) und sind die leuchtkräftigsten permanenten (viele Millionen Jahre) Strahlungsquellen im Universum. Die Strahlungsenergie stammt aus einer Akkretionsscheibe um das Schwarze Loch, die meist auch einen bipolaren Jet speist. Da die Akkretionsscheibe außerdem noch von einem *Staubtorus* umgeben ist,

erklärt sich die Vielfalt der AGN (die von Radiogalaxien bis zu den im TeV-Bereich emittierenden *Blazaren* reicht) aus der unterschiedlichen Neigung des Staubtorus bzw. des Jets relativ zur Sichtlinie. Es sind auch AGN mit einem gebundenen *Paar* von Schwarzen Löchern bekannt. Eine dritte Klasse von **mittelschweren Schwarzen Löchern** ($M \sim 10^3 M_\odot$) im Zentrum von Kugelsternhaufen ist weniger gut gesichert. Völlig hypothetisch sind die *primordialen Schwarzen Löcher*, die mit dem Urknall entstanden sein könnten. Sie können im Prinzip beliebig leicht sein, doch wären heute alle mit einer ursprünglichen Masse $< 10^{12} kg$ auf Grund des Hawking-Effekts zerstrahlt.

Kapitel 7

Kosmologie

7.1 Das kosmologische Prinzip und seine Konsequenzen

7.1.1 Isotropie und Homogenität

Gegenstand der Kosmologie ist die großräumige Struktur des Universums und seine zeitliche Entwicklung. Bezüglich der räumlichen Struktur strebt sie nur statistische Aussagen an. Zu Hilfe kommt dabei die empirische Beobachtung, dass das Universum nach räumlicher Mittelung all seiner lokalen Eigenschaften über eine Skala von einigen 100 Mpc *homogen* erscheint. (Die Aussage ist deswegen nichttrivial, weil das Universum insgesamt wesentlich größer als diese Mittelungsskala ist. Die Skala entspricht der Ausdehnung der größten bekannten Strukturen im Universum ("great walls"). Unterhalb dieser Skala ist das Universum *hierarchisch strukturiert*: Galaxien bilden Gruppen, diese Cluster, und diese Supercluster (die größten *stabilen* Strukturen im Universum). Die Supercluster erscheinen bevorzugt entlang eindimensionaler Ketten (*Filamente*) angeordnet. Diese bauen zweidimensionale Wände auf, die riesige (annähernde) Leerräume (*Voids*) blasenförmig umgeben. Diese Strukturen können qualitativ mit numerischen Simulationen reproduziert werden, die auf dem in diesem Kapitel beschriebenen theoretischen Standardmodell basieren.) Außerdem erscheint das Universum zumindest von unserem Standort aus betrachtet *isotrop*, d.h. es ist keine Richtung ausgezeichnet. Das ist eine zusätzliche Information, weil Homogenität nicht Isotropie erfordert. Aus der *Isotropie um jeden Punkt* folgt aber die Homogenität (im Fall einer skalaren Verteilung im dreidimensionalen Raum würde jede Verletzung derselben durch einen Gradienten beschreibbar sein und daher lokal eine Richtung auszeichnen). Das **Kosmologische Prinzip** postuliert, dass

unser Standort, was die gemittelten Eigenschaften betrifft, vor keinem anderen ausgezeichnet ist: *Das Universum ist isotrop um jeden Punkt.* Es ist daher auch *homogen*. Dieses Prinzip vereinfacht nicht nur das Erstellen theoretischer Modelle, sondern erweist sich auch als empirisch erfolgreich. Wir werden uns daher in diesem Kapitel auf einen Abriss der auf diesem Prinzip basierenden Standard-Kosmologie beschränken.
Wir beginnen mit einer geometrischen Präzisierung der Grundbegriffe:
(DEF 1) Eine Raum-Zeit (M, g_{ab}) heißt **räumlich isotrop** um jeden Punkt, wenn es eine *Kongruenz* zeitartiger Linien (d.h. durch jeden Punkt geht genau eine) mit folgenden Eigenschaften gibt: Seien P ein beliebiger Punkt, $u|_P$ ein Tangentenvektor an die ausgezeichnete Linie durch P und s_1, s_2 zwei beliebige Einheitsvektoren in T_P und $\perp u|_P$. Dann existiert eine Isometrie, die P und $u|_P$ erhält, aber s_1 in s_2 überführt. (Die Linien der Kongruenz sind die möglichen Weltlinien ausgezeichneter "isotroper Beobachter", denen das Universum lokal isotrop erscheint.)
(DEF 2) Eine Raum-Zeit heißt **räumlich homogen**, wenn es eine einparametrige Familie von raumartigen Hyperflächen Σ_t mit $M = \bigcup_t \Sigma_t$, $\Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset$ $f.$ $t_1 \neq t_2$ gibt (eine solche Familie heißt eine *Foliation*: jeder Punkt liegt genau in einer Hyperfläche), so dass für jedes t und beliebige Punkte $P, Q \in \Sigma_t$ eine Isometrie existiert, die P in Q überführt.
Man kann nun formal beweisen, dass die Isotropie in jedem Punkt die Homogenität impliziert: Die Isometrien aus (DEF 1) lassen mit einem Punkt P und $u|_P$ auch die durch diese beiden bestimmte Geodäte invariant. Was für die betrachteten Tangentenvektoren $s_A \in T_P$ gilt, gilt auch für ihre Bilder unter einem Paralleltransport entlang dieser Geodäte. Wegen der Eindeutigkeit des Paralleltransports gilt daher für jeden Punkt Q auf der Geodäte bezüglich deren Tangenten $v|_Q$ die in (DEF 1) geforderte Eigenschaft. Wählt man nun zu jeder Linie der ursprünglichen Kongruenz eine derartige "tangentiale" Geodäte, erhält man (zumindest lokal) eine neue, *geodätische* Kongruenz mit *denselben* Eigenschaften. Wäre diese von der ursprünglichen verschieden, gäbe es in einem Punkt zwei verschiedene isotrope Beobachter (entsprechend zwei verschiedenen zeitartigen Vektoren $u, u' \in T_P$). Das ist aber bei Anwesenheit von Materie (was wir voraussetzen) ausgeschlossen (Übungsaufgabe). Jede Kongruenz mit den Eigenschaften aus (DEF 1) ist also geodätisch. Sie ist außerdem *hyperflächenorthogonal*, weil ein nichtverschwindender *Twist-Vektor* $\epsilon^{ijkl} u_j \nabla_k u_l$ (vgl. das Frobenius-Kriterium (4.63)) eine durch das Vektorfeld u und die Metrik bestimmte Richtung $\perp u$ auszeichnen würde und daher unter den betrachteten Isometrien invariant sein müsste, im Widerspruch zu deren Definition. Sei $\{\Sigma_t\}$ die Foliation der auf die Kongruenz orthogonalen Hyperflächen (mit einem beliebigen Parameter t) und seien $P, Q \in \Sigma_t$. Dann existiert ein weiterer Punkt $R \in \Sigma_t$ derart, dass die Geodäten bezüglich

der *induzierten* Metrik auf Σ_t, die R mit P und Q verbinden, dieselbe Länge haben (falls Σ_t nicht geodätisch vollständig ist, müssen die beiden Geodäten nicht in einer einzigen enthalten sein, weil sich dann i.a. 2 beliebige Punkte nicht durch eine Geodäte verbinden lassen; möglicherweise sind auch Zwischenpunkte einzuführen und das Argument ist wiederholt anzuwenden). Da Σ_t unter den betrachteten Isometrien invariant ist, sind diese auch Isometrien bezüglich der induzierten Metrik und führen daher Geodäten auf Σ_t wieder in solche über. Die laut Voraussetzung existierende Isometrie, die den normierten Tangentenvektor der einen betrachteten Geodäte in R in den der anderen überführt, bildet daher laut Konstruktion auch P nach Q ab, was zu zeigen war.

7.1.2 Räume konstanter Krümmung

Der Riemann-Tensor ${}^{(3)}R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}|_P$ der induzierten Metrik $h_{\alpha\beta}$ auf Σ_t definiert eine lineare Abbildung $L : W \to W$ auf dem 3-dimensionalen Vektorraum W der antisymmetrischen Tensoren vom Typ $(0, 2)$ über $T_P(\Sigma_t)$. Wegen

$$^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} =^{(3)} R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

ist L symmetrisch bezüglich des durch $h_{\alpha\beta}$ definierten positiv definiten Skalarprodukts in W. Daher ist L diagonalisierbar. Wegen der Isotropie sind alle Eigenwerte von L gleich, weil sonst gewisse Tensoren 2. Stufe und damit die dazu dualen Vektoren geometrisch ausgezeichnet wären. Es folgt $L = -2Kid$ oder ${}^{(3)}R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = -2K\delta_{[\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta]}^{\delta}$ bzw.

$$^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -K(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}). \tag{7.1}$$

Wegen der Homogenität ist $K = const$ auf Σ_t. Σ_t ist daher ein **Raum konstanter Krümmung**.
Satz: Zwei Räume konstanter Krümmung, derselben Signatur der Metrik und mit demselben Wert von K sind lokal isometrisch.
Wir beweisen den Satz nur für $n = 3$ und Signatur $+++$: Überschieben der Gleichung (7.1) mit $h^{\alpha\delta}$ ergibt

$$R_{\beta\gamma} = -K(h_{\beta\gamma} - 3h_{\beta\gamma}) = 2Kh_{\beta\gamma}. \tag{7.2}$$

Da Isotropie sphärische Symmetrie impliziert, hat das Linienelement auf Σ in gewissen Koordinaten r, θ, ϕ die Darstellung

$$d\Sigma^2 = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \tag{7.3}$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors sind

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r},\ R_{22} = \frac{1}{sin^2\theta} R_{33} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda}.$$

Aus (7.2) erhalten wir damit

$$e^{-\lambda} = 1 - Kr^2 \Rightarrow$$

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2). \tag{7.4}$$

Damit ist der Satz bewiesen, denn wir haben eine *eindeutige* Metrik gefunden, deren Krümmung K gibt.
Falls $K \neq 0$, führt die Umdefinition $r \to r/\sqrt{|K|}$ auf

$$d\Sigma^2 = \frac{1}{|K|}(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2),\ k \equiv sgn(K). \tag{7.5}$$

Dieses Linienelement gilt mit $|K| \equiv R^{-2} > 0$ auch für $k = 0$. Wir sehen, dass es *lokal* nur 3 Typen (entsprechend den Werten $k = 1, 0, -1$) von Räumen konstanter Krümmung gibt. Allerdings lässt sich jeder dieser Typen mit vielen verschiedenen *globalen* Topologien realisieren; insbesondere gibt es für jeden Typ offene und geschlossene Versionen. Wir werden nur die folgenden *Standardräume* betrachten:
a) Der euklidische Raum $\mathbf{E}^3$ ($K = 0$): Das der Metrik (7.5) entsprechende Linienelement

$$d\Sigma^2 = R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = R^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{7.6}$$

unterscheidet sich nur unwesentlich von der Standardform in kartesischen Koordinaten, weil der **Skalenfaktor** R keine *absolute* geometrische Bedeutung hat.
b) Die Riemannsche 3-Sphäre S^3 ($K > 0$): Sie ist definiert durch die Einbettung

$$\{\sum_{i=1}^{4} X_i^2 = R^2\}$$

in den $\mathbf{E}^4$. Der Übergang von den kartesischen Koordinaten X_i zu den Hyperpolarkoordinaten α, θ, ϕ, $0 < \alpha < \pi$, definiert durch

$$X_4 = Rcos\alpha,\ X_3 = Rsin\alpha cos\theta,\ X_2 = Rsin\alpha sin\theta sin\phi,\ X_1 = Rsin\alpha sin\theta cos\phi$$

ergibt das Linienelement

$$d\Sigma^2 = R^2(d\alpha^2 + sin^2\alpha(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2))$$

$$= |sin\alpha = r| = R^2(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2).$$

Die 3-Sphäre beschreibt ein räumlich *geschlossenes* Universum (kompakt und randlos) mit "Weltradius" R, der offenbar eine direkte geometrische Bedeutung hat.
c) Der 3-dimensionale hyperbolische Raum H^3 ($K < 0$): Dieser Raum war historisch das erste bekannte Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie. Er lässt sich am einfachsten darstellen durch die Einbettung als 3-dimensionales Hyperboloid im 4-dimensionalen Minkowskiraum:

$$X_4^2 - \sum_{i=1}^{3} X_i^2 = R^2,$$

$X_4 = Rcosh\alpha$, $X_3 = Rsinh\alpha cos\theta$, $X_2 = Rsinh\alpha sin\theta sin\phi$, $X_1 = Rsinh\alpha sin\theta cos\phi$

$$\Rightarrow d\Sigma^2 = (dX_4)^2 - \sum_{1}^{3}(dX_i)^2 = R^2(d\alpha^2 + sinh^2\alpha(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2))$$

$$= |sinh\alpha = r| = R^2(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2).$$

Das entsprechende Universum ist wie im Fall a) offen (topologisch $\mathbf{R}^3$), der Skalenfaktor R hat aber hier unmittelbare geometrische Bedeutung.

7.1.3 Die Raum-Zeit der isotropen Kosmologie

Die Koordinaten für ein Σ_t, in denen wir das Linienelement (7.5) hergeleitet haben, lassen sich durch Transport entlang der ausgezeichneten Weltlinien isotroper Beobachter und die Hinzunahme von deren Eigenzeit t, der sogenannten **kosmologischen Zeit**, zu einem ausgezeichneten 4-dimensionalen Koordinatensystem erweitern, in dem die Metrik nur noch eine freie Funktion $R(t)$ enthält:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2) \equiv dt^2 - R^2(t)d\sigma^2. \qquad (7.7)$$

Diese Metrik heißt (Friedmann-Lemaître-)**Robertson-Walker-Metrik**. $R(t)$ ist der **kosmologische Skalenfaktor**, der nur für $k = \pm 1$ unmittelbare physikalische Bedeutung hat. Im Fall $k = 0$ sind nur die Verhältnisse $R(t_1)/R(t_2)$ relevant. Laut Konstruktion sind die Weltlinien isotroper Beobachter $\{x^\alpha = const\}$ Geodäten. Der geodätische Abstand auf den Hyperflächen Σ_t (im Sinn der induzierten Metrik) ist

$$d(t) = R(t)|\Delta\sigma|, \qquad (7.8)$$

wobei $|\Delta\sigma|$ der geodätische Abstand in den Standardräumen mit $R = 1$ ist. Es folgt

$$v \equiv \dot{d} = \dot{R}|\Delta\sigma| = \frac{\dot{R}}{R}d.$$

Mit der **Hubble-Konstanten** $H := \dot{R}/R$ nimmt diese Gleichung die Form des **Hubble-Gesetzes**

$$v = Hd \tag{7.9}$$

an. Dieses Gesetz wurde zuerst empirisch von Hubble Ende der 1920er Jahre gefunden, es folgt aber - bis auf den Wert der Hubble-Konstante H - schlicht aus dem kosmologischen Prinzip. Man beachte, dass H zwar ortsunabhängig, aber *zeitabhängig* ist und dass die Entfernung d und die Relativgeschwindigkeit v, die in das Hubble-Gesetz eingehen, sich auf *denselben* Zeitpunkt beziehen. Der heutige Wert der Hubble-Konstante ist

$$H_0 \approx 70\frac{km/s}{Mpc} > 0 \tag{7.10}$$

und insbesondere positiv, d.h. das Universum **expandiert**. Zu erwarten wäre, dass die Relativgeschwindigkeit $v(t)$ zweier Objekte (und damit auch die Hubble-Konstante) wegen der Gravitationsanziehung im Lauf der Zeit abnimmt. Wenn die Relativgeschwindigkeit früher nicht kleiner war, dann waren die Objekte vor endlicher Zeit (*Weltalter*) $T < d_0/v_0 = H_0^{-1}$ am selben Ort. Das gilt für alle Objekte und deutet auf einen singulären Anfangszustand des Universums hin, der als **Urknall** (Big Bang) bezeichnet wird. Tatsächlich ergeben Beobachtungen weit entfernter Supernovae vom Typ Ia (nukleare Detonation Weißer Zwerge wegen Überschreitens der Chandrasekhar-Grenze durch Akkretion) - zumindest bei naiver Interpretation - das überraschende Resultat, dass $v(t)$ heutzutage zunimmt. Dieses Phänomen wird als *Akzeleration* des Universums bezeichnet. Die einfachste, aber keineswegs gesicherte Erklärung dafür ist, dass das Universum von einem gravitativ abstoßenden Medium (*Dunkle Energie*) erfüllt ist. Quantitativ lässt sich die Änderung der Expansionsgeschwindigkeit beschreiben durch

$$\dot{v} = (\dot{H} + H^2)d = -H^2qd, \tag{7.11}$$

worin

$$q := -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \tag{7.12}$$

der dimensionslose **Bremsparameter** (deceleration parameter) ist. Die naive Interpretation der erwähnten Beobachtungen liefert für den heutigen Wert $q_0 \approx -0,5$. Das negative Vorzeichen entspricht der Akzeleration.

7.1.4 Kosmologische Rotverschiebung

Wir betrachten einen Lichtstrahl mit Ausbreitungs-Vierervektor k. Seien $\Sigma_{1,2}$ zwei Homogenitätshyperflächen und $P_1 \in \Sigma_1$ und $P_2 \in \Sigma_2$ Punkte auf dem Strahl. Dann gilt folgendes
Lemma: Es existiert ein Killingvektorfeld ξ der kosmologischen Raum-Zeit mit $\xi|_{P_A}$ proportional zur Projektion von k auf den Tangentenraum $T_P(\Sigma_A)$.
Der Beweis gliedert sich in drei Schritte:
1. Die Projektion einer Nullgeodäte auf Σ_A ist eine Geodäte bezüglich der 3-Geometrie von Σ_A.
2. Diese Geodäte ist Trajektorie eines Killingvektors ξ.
Die Behauptungen 1. und 2. werden in den Übungen bewiesen.
3. Die Fortsetzung von ξ auf M ist eindeutig bestimmt durch $\mathcal{L}_u\xi = -\mathcal{L}_\xi u = 0$, d.h. Transport von ξ entlang der ausgezeichneten Kongruenz.
Aus der in 3. angegebenen Charakterisierung von ξ folgt

$$\frac{\sqrt{\xi^2}|_{P_1}}{\sqrt{\xi^2}|_{P_2}} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)}. \tag{7.13}$$

Da k lichtartig ist, hat für jedes P in einer Homogenitätshyperfläche Σ die Projektion von k auf $u|_P$ dieselbe Länge wie die Projektion auf $T_P(\Sigma)$. Daher gilt für die lokalen Frequenzen

$$\omega_A = -k_i u^i_A = k_i(\xi^i/\sqrt{\xi^2})|_{P_A}.$$

Da $k_i\xi^i$ entlang eines Strahls erhalten ist, folgt

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{\xi^2}|_{P_1}}{\sqrt{\xi^2}|_{P_2}} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)}. \tag{7.14}$$

Wir erhalten daher im Fall $R(t_2) > R(t_1)$ für den **Rotverschiebungsfaktor**

$$z := \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} - 1. \tag{7.15}$$

Die Berechnung der **Rotverschiebungs-Entfernungsrelation** $d_0(z)$ benötigt die Kenntnis der *Expansionsgeschichte* des Universums. Falls $z \ll 1$, lässt sich aber eine Näherungsformel herleiten. Entlang Nullgeodäten ist

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\sigma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$d_0 = R_0|\Delta\sigma| = R_0\int_{t_0-\Delta t}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = R_0\int_0^{\Delta t} \frac{dt'}{R(t_0 - t')} \approx \Delta t + \frac{1}{2}H_0(\Delta t)^2.$$

Im letzten Schritt haben wir $R(t_0 - t') \approx R_0(1 - H_0 t')$ verwendet. Wir setzen nun

$$\Delta t \approx d_0 - \frac{1}{2} H_0 d_0^2$$

ein in

$$1 + z = \frac{R_0}{R_1} = \frac{R_0}{\underbrace{R_0 - \dot{R}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{R}_0 (\Delta t)^2}_{R_0(1 - H_0 \Delta t - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (\Delta t)^2)}} \approx 1 + H_0 \Delta t + (1 + \frac{q_0}{2}) H_0^2 (\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow z \approx H_0 d_0 + \frac{1 + q_0}{2} H_0^2 d_0^2 \tag{7.16}$$

oder

$$d_0 \approx H_0^{-1} (z - \frac{1 + q_0}{2} z^2). \tag{7.17}$$

Der heutige Abstand d_0 ist also eine *fallende* Funktion von q_0, was für die theoretische Interpretation der erwähnten Supernova-Daten wesentlich ist.

7.2 Dynamik und Geschichte des Universums

7.2.1 Die Friedmann-Gleichung

Wir betrachten die Einstein-Gleichungen mit **kosmologischer Konstante** Λ:

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \tag{7.18}$$

Diese ursprünglich von Einstein selbst vorgeschlagene Verallgemeinerung seiner Feldgleichungen wird heute nicht als eine Modifikation der klassischen ART verstanden, sondern als eine Konsequenz des Quantencharakters der Materie: Die bevorzugte Interpretation des *kosmologischen Terms* ist die als quantenmechanischer *Vakuumerwartungswert* des EIT:

$$\frac{\Lambda}{\kappa} \delta_i{}^k = -\langle T_i{}^k \rangle_{vac} = -diag(-\epsilon_\Lambda, p_\Lambda, p_\Lambda, p_\Lambda). \tag{7.19}$$

Falls $\Lambda > 0$, entspricht der kosmologische Term also einer positiven Energiedichte und negativem Druck $p_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$. Der Erwartungswert in (7.19) wird tatsächlich von der Quantenfeldtheorie vorhergesagt, allerdings ist er divergent und muss regularisiert werden. Eine natürliche Regularisierung lässt erwarten, dass

$$\frac{\Lambda}{\kappa} \sim \frac{m_p}{l_p^3} \sim 10^{94} g/cm^3.$$

Hier bedeutet $l_p \sim \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-35}m$ die *Planck-Länge* und $m_p = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{-5}g$ die *Planck-Masse.* Die einfachste Interpretation der erwähnten Beobachtungen von Supernovae Ia ergibt aber $\Lambda/\kappa \sim 10^{-29}gcm^{-3}$, also um einen Faktor $> 10^{120}$ zu wenig.
Ein gutes Modell für die (gemittelte) Materie ist ein ideales Fluid mit EIT (6.1). Das kosmologische Prinzip impliziert $\epsilon = \epsilon(t)$, $p = p(t)$ und $u = (1, 0, 0, 0)$ in den durch das Prinzip ausgezeichneten Koordinaten. Wie in Kap. 6 vereinfachen sich die Einstein-Gleichungen für die gemischten Komponenten:

$$G_0^{\ 0} = 3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \kappa\epsilon + \Lambda, \tag{7.20}$$

$$-G_\alpha^{\ \alpha} = -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \kappa p - \Lambda, \tag{7.21}$$

$$G_i^{\ k} = 0 \ sonst.$$

Bilden wir $\frac{1}{3}\cdot$(7.20)+(7.21), erhalten wir, falls $\Lambda = 0$,

$$2\frac{\ddot{R}}{R} = -\kappa(p + \frac{1}{3}\epsilon). \tag{7.22}$$

Wir sehen, dass für die Abbremsung der Expansion derselbe Term $\epsilon + 3p$ verantwortlich ist, den wir bereits mehrmals als maßgebliche Quelle gravitativer Anziehung identifiziert haben. Akzeleration tritt auf, wenn $p < -\epsilon/3$. Diese Bedingung kann mit einer kosmologischen Konstante $\Lambda > 0$ erfüllt werden. Die Gleichung

$$[(7.20) \cdot R^3]^{\cdot} + (7.21) \cdot (R^3)^{\cdot}$$

führt auf die *Bilanzgleichung*

$$(\epsilon R^3)^{\cdot} + p(R^3)^{\cdot} = 0, \tag{7.23}$$

die auch aus $\nabla_k T^{ik} = 0$ erhalten werden kann. Im Fall staubartiger Materie $p \ll \epsilon$ folgt

$$\epsilon = \mathcal{E}/R^3, \tag{7.24}$$

d.h. die Gesamtenergie der Materie ist konstant. Im Fall von Strahlung gilt

$$T^i_{\ i} = 0 \Rightarrow p = \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow$$

$$\dot{\epsilon}R^3 + 4\epsilon R^2\dot{R} = 0 \Rightarrow (\epsilon R^4)^{\cdot} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon = \mathcal{K}/R^4. \tag{7.25}$$

Diese Gleichung kann so verstanden werden, dass die Photonenzahl erhalten ist, aber wegen der Rotverschiebung ($\lambda \propto R$) die Energie pro Photon proportional zu R^{-1} abfällt.
(7.20) lässt sich umformen zu

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{3}\kappa\epsilon R^2 - k + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{7.26}$$

Daraus folgt

$$k > 0 \Leftrightarrow \epsilon_{tot} \equiv \epsilon + \frac{\Lambda}{\kappa} > \epsilon_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{7.27}$$

ϵ_{crit} ist die **kritische Massendichte**, ihr heutiger Wert ist ca. $10^{-29} g/cm^3$.
Die empirischen Daten lassen sich am übersichtlichsten mit dem dimensionslosen **Dichteparameter**

$$\Omega := \frac{\epsilon_{tot}}{\epsilon_{crit}} \tag{7.28}$$

vergleichen: Aus der Winkelanisotropie der *kosmischen Hintergrundstrahlung* (s. unten) lässt sich im kosmologischen Standardmodell $\Omega_0 \approx 1$ erschließen, d.h. das Universum ist in guter Näherung *räumlich flach*. Die Energiedichte des Universums hat in diesem Modell heute zwei Hauptbeiträge:

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda \ (+\Omega_\nu + \Omega_\gamma). \tag{7.29}$$

Der Beitrag der *Materie* Ω_m setzt sich zusammen aus dem Beitrag der *baryonischen Materie* $\Omega_b \approx 0,04$ und dem Beitrag $\Omega_d \approx 0,2$ der **Dunklen Materie**, deren Existenz bisher nur rein gravitativ erschlossen werden konnte. Den Hauptanteil an der Energiedichte hat in diesem einfachen Modell mit $\Omega_\Lambda \approx 0,75$ die **Dunkle Energie**, als deren einfachstes Modell der kosmologische Term angesehen werden kann. Auch die Dunkle Energie macht sich nur durch ihre gravitative Wirkung bemerkbar, nämlich die Akzeleration des Universums. Sie scheint im Gegensatz zur Dunklen Materie, die wie die normale Materie zur "Verklumpung" neigt, homogen verteilt zu sein. (Die Beiträge der Neutrinos und Photonen, $\Omega_\nu < \Omega_b$ und $\Omega_\gamma \sim 10^{-5}$, sind heute für die Dynamik des Universums unmaßgeblich.)
Falls Materie und Strahlung nicht wechselwirken, erfüllen ihre EIT $\nabla_k T^{ik} = 0$ *separat*, und daher ist

$$\epsilon = \frac{\mathcal{E}}{R^3} + \frac{\mathcal{K}}{R^4}.$$

(7.26) wird damit zur **Friedmann-Gleichung**

$$\dot{R}^2 = \frac{\kappa\mathcal{K}}{3R^2} + \frac{\kappa\mathcal{E}}{3R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - k. \tag{7.30}$$

Qualitative Diskussion der Lösungen
Ist R *klein*, dann hat ein *strahlungsdominiertes* Universum den Skalenfaktor $R(t) \propto t^{1/2}$, ein *materiedominiertes* $R \propto t^{2/3}$. Wir haben die Zeitkoordinate so definiert, dass der **Urknall** zu $t = 0$ eintritt. Er entspricht einer *Krümmungssingularität*, wie aus (7.20) und (7.21) abzulesen ist.
Ist R *groß* und $\Lambda > 0$, dann ist

$$R \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}t}.$$

Die entspechende Metrik definiert einen Ausschnitt des **de-Sitter-Universums**. In diesem gilt $H = \sqrt{\Lambda/3} = const$ und daher ein *perfektes* kosmologisches Prinzip: Kein Zeitpunkt ist vor dem anderen ausgezeichnet. Tatsächlich ist das de-Sitter-Universum eine Raum-Zeit *maximaler Symmetrie*. Falls das heutige Universum in der Tat vom kosmologischen Term dominiert wird, dann ist es bereits im Übergang zu einer asymptotischen de-Sitter-Phase.
Ein *offenes* Universum ($k \leq 0$) expandiert jedenfalls ewig, ein *geschlossenes* ($k = +1$) wird letzlich kontrahieren, falls Λ unter einem kritischen Wert bleibt. Ein *statisches* Universum ($R = const$) ist nur mit $k = +1$ und einem gewissen positiven Wert von Λ möglich. Allerdings ist dieses *Einstein-Universum* instabil.

7.2.2 Das frühe Universum

Unser Universum ist weder exakt isotrop noch homogen. Trotzdem impliziert die ART die Existenz einer Anfangssingularität, weil auch die "zeitgespiegelte" Version des Singularitätentheorems von Hawking und Penrose gilt und entsprechende gefangene Flächen bei Rückextrapolation der heutigen Expansion auftreten. Unser Wissen über das frühe Universum beziehen wir (außer aus der für die *primordiale Nukleosynthese* ca. 100 s nach dem Urknall aufschlussreichen Häufigkeit der leichtesten Isotope) hauptsächlich aus der **kosmischen Hintergrundstrahlung**. Diese ist eine nahezu perfekte thermische Strahlung mit der heutigen Temperatur $T_0 \approx 2,7K$. Obwohl die entsprechende Energiedichte heute vernachlässigbar ist, enthält die Hintergrundstrahlung wegen der hohen Zahl der Photonen $N_\gamma \sim 10^9 N_b$ den Großteil der *Entropie* des Universums (wenn man die Entropie der Schwarzen Löcher, die insgesamt noch um einen Faktor von mindestens 10^{10} größer ist, nicht mitzählt). Wegen der Bilanzgleichung (7.23), die thermodynamisch als $\delta Q = dE + pdV = 0$ interpretiert werden kann, ist die Expansion des Universums *adiabatisch*, solange die Näherung des idealen Fluids gilt. Die thermische Geschichte des Universums lässt sich daher einfach rekonstruieren. Aus $\epsilon_\gamma \propto R^{-4}$, $\epsilon_m \propto R^{-3}$ folgt, dass die Strahlung vor $z \sim 10^4$ die Materie energetisch dominierte (sehr früh war die Materie selbst relativistisch und daher strahlungsähnlich). Wegen $\epsilon_\gamma \propto T^4$ war daher im frühen Universum $T \propto R^{-1}$. Bei $z \sim 1000$ ($t \sim 400000$ *Jahre*, $T \sim 3000K$) entkoppelten Materie und Strahlung (die neugebildeten Atome waren im Gegensatz zum vorher bestehenden Plasma "durchsichtig"). Seither wurden die Photonen der thermischen Strahlung nicht mehr gestreut, und die kosmische Hintergrundstrahlung erlaubt daher den Blick auf die diesem Zeitpunkt entsprechende *Fläche der letzten Streuung*. Vor diesem Zeitpunkt war auch die baryonische Materie wegen der starken Kopplung an die Photonen thermalisiert. Danach konnte die *Strukturbildung* einsetzen: Der mittlere *Dichtekontrast* der baryonischen Materie $\delta \equiv \delta\epsilon/\epsilon \sim 10^{-5}$ (entsprechend primordialen Schwankungen des Gravitationspotentials $\delta V/c^2$, die ihren Ursprung vermutlich in Quantenfluktuationen haben) konnte auf Grund des Falls der baryonischen Materie in die schon ab $z \sim 10^4$ von der Dunklen Materie gebildeten "Halos" ($\delta \sim 10^{-3}$ zum Zeitpunkt der Abkopplung) anwachsen.

Die Thermalisierung war im sehr frühen Universum allumfassend: Da die Wechselwirkungszeit τ_{ww} als Funktion der Teilchenzahldichte n und des Wirkungsquerschnitts $\sigma(T)$

$$\tau_{ww} \sim \frac{1}{n\sigma c} \propto \frac{R^3}{\sigma} \propto \frac{t^{3/2}}{\sigma(T)}$$

erfüllt und die Zeitskala der Expansion

$$\tau_{exp} \sim \frac{R}{\dot{R}} \sim t,$$

ist früh genug $\tau_{ww} \ll \tau_{exp}$ (falls σ nicht zu rasch mit der Energie abnimmt) und es kann sich trotz der Expansion Gleichgewicht einstellen, aus dem die Materie dann später ausscheidet. Bei Temperatur T sind alle Teilchen (und Antiteilchen) mit $m \lesssim kT$ als *relativistisches Gas* vorhanden. Dieses hat die Energiedichte

$$\epsilon = \sum_f \alpha_f g_f \frac{\pi^2}{30\hbar^3 c^3}(kT)^4 \tag{7.31}$$

mit $\alpha_f = 1$ für Bosonen und $\alpha_f = 7/8$ für Fermionen. g_f ist die Zahl der Polarisationsfreiheitsgrade (=2 für ein masseloses Teilchen). Im sehr frühen Universum fanden eine Reihe von *Phasenübergängen* statt, die die Elementarteilchenphysik vorhersagt. Eventuell damit verbundene *topologische Defekte* scheinen aber nicht als dominante Strukturen in der Hintergrundstrahlung auf. Als frühester Phasenübergang wurde seit ca. 1980 der *Zerfall des falschen Vakuums* eines hypothetischen skalaren Feldes diskutiert. Er bewirkte möglicherweise ca. $10^{-38}s$ nach dem Urknall eine als *Inflation* bezeichnete exponentielle Expansion des Universums, die den Skalenfaktor innerhalb von ca. $10^{-36}s$ um einen Faktor von mindestens 10^{30} vergrößerte. Diese Inflationshypothese kann sowohl die Homogenität des Universums und seine räumliche Flachheit als auch die Entstehung der primordialen Dichteschwankungen erklären. Sie hat mittlerweile an Attraktivität gewonnen, weil sich herausgestellt hat, dass Inflation gar keinen Phasenübergang und die damit verbundene Feinabstimmung von Parametern benötigt, sondern schon im Rahmen der klassischen Feldtheorie eine *generische* Konsequenz der Existenz eines fundamentalen Skalarfelds Φ ist, dessen Selbstwechselwirkung, beschrieben durch ein Potential $V(\Phi)$, nur minimalen Einschränkungen unterliegt.

Kapitel 8

Gravitationswellen

8.1 Ebene Wellen in linearer Näherung

8.1.1 Die transversale spurlose Eichung

In der linearen Näherung (Kap. 3) ist $g_{ik} = \eta_{ik} + 2h_{ik}$. Definiert man

$$\psi_{ik} = h_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}h_l{}^l$$

und wählt die harmonische Eichbedingung

$$\psi^{ik}{}_{,k} = 0, \tag{8.1}$$

vereinfachen sich die linearisierten Einstein-Gleichungen zu

$$\Box\psi_{ik} = -\kappa T_{ik}.$$

Wir interessieren uns für eine Vakuumlösung $\psi_{ik} = \psi_{ik}(t-x)$ der Einstein-Gleichungen. Eine solche beschreibt offenbar eine **ebene Welle**, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in der x-Richtung ausbreitet. Aus der harmonischen Eichbedingung (8.1) folgt für eine solche Welle

$$\dot{\psi}_i{}^0 = \dot{\psi}_i{}^1$$

und daraus

$$\psi_i{}^0 = \psi_i{}^1 + const$$

sowie

$$\psi_0{}^0 = -\psi_1{}^1 + const.$$

Ist der Wellenzug *lokalisiert*,

$$\psi_{ik} \to 0 \ f.\ x \to \pm\infty,$$

dann müssen alle Konstanten verschwinden. Die Einstein-Gleichungen in der harmonischen Eichung führen daher auf $10 - 4 = 6$ unabhängige Komponenten von ψ_{ik}, z.B. ${\psi_1}^0$, ${\psi_2}^0$, ${\psi_3}^0$, ${\psi_2}^2$, ${\psi_2}^3$, ${\psi_3}^3$. Wir benützen nun die innerhalb der harmonischen Eichung verbleibende Eichfreiheit

$$\psi_{ik} \to \psi_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i} - \eta_{ik}\Lambda^l_{,l} \; mit \; \Box\Lambda_i = 0.$$

Tatsächlich existieren 4 Funktionen $\Lambda_i(t - x)$, die es ermöglichen, die 4 Bedingungen

$${\psi_1}^0 = {\psi_2}^0 = {\psi_3}^0 = {\psi_i}^i = 0$$

zu erreichen. Wir haben also eine Eichung gefunden, in der die einzigen nicht verschwindenden Komponenten des linearisierten Gravitationsfeldes $h_{22} = -h_{33}$ und $h_{23} = h_{32}$ sind. Diese Eichung wird als **transversale spurlose Eichung** (TT-Eichung: $h_{ik} \to h^{TT}_{ik}$) bezeichnet. Kovariant lässt sich diese Eichung charakterisieren durch die Gleichungen

$${h_{ij}}^{,j} = 0, \; {h_i}^i = 0, \; h_{ij}u^j = 0, \tag{8.2}$$

wobei u der Geschwindigkeits-4-Vektor eines Beobachters ist. Man beachte, dass die TT-Eichung nur möglich ist, wenn die Feldgleichungen erfüllt sind (analog zur *Strahlungseichung* $A^0 = 0 = div\vec{A}$ bzw. $A_i u^i = 0, \; A^i{}_{,i} = 0$ der Elektrodynamik).

8.1.2 Bewegung im Feld der ebenen Welle

Da in der TT-Eichung $\Gamma^i{}_{00} = 0$, ist

$$x^i(s) = \delta^i{}_0 s + x^i_0 \tag{8.3}$$

eine Lösung der Geodätengleichung, d.h. Teilchen, die im KS der linearen Näherung ruhen, sind geodätisch. Die räumlichen Abstände solcher Teilchen sind jedoch nicht konstant, wie aus dem räumlichen Linienelement

$$d\Sigma^2 = dx^2 + (1 + 2h_{22})dy^2 + (1 - 2h_{22})dz^2 + 4h_{23}dydz$$

folgt. Genauer ändern sich nur die Teilchenabstände senkrecht zur x-Achse, d.h. die Welle ist **transversal**. Da h_{ik} spurlos ist, ist

$$det \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = 1,$$

d.h. transversale Querschnittsflächen ändern sich nicht. Ebene Gravitationswellen sind daher *Scherungswellen.*

Im Fall $h_{23} = 0,\ h_{22} \neq 0$ ist der physikalische Abstand l eines “ruhenden” Teilchens von der x-Achse

$$l^2(t-x) = (1+2h_{22})y^2 + (1-2h_{22})z^2 \equiv \bar{y}^2(t-x) + \bar{z}^2(t-x).$$

Das eben definierte Koordinatensystem $(\bar{y},\ \bar{z})$ ist realisierbar durch eine *starre* Platte (die inneren Kräfte, die deren Konstituenten fixieren, sind viel größer als die Scherkraft der Gravitationswelle). In diesem System wird die Bewegung des betrachteten geodätischen Teilchens beschrieben durch

$$\bar{y}(t-x) \approx (1+h_{22})y,\ \bar{z}(t-x) \approx (1-h_{22})z \Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} + \frac{\bar{z}}{z} \approx 2,$$

was einer *linearen* Teilchenbahn entspricht. Daher wird eine Welle mit $h_{23} = 0$ als **linear polarisiert** bezeichnet. Falls h_{22} eine *harmonische* Funktion mit Kreisfrequenz ω ist, ergibt sich für Teilchen, die auf dem Kreis $y^2+z^2 = const$ angeordnet sind, eine **Schwingungsform**, die in den Koordinaten $(\bar{y},\ \bar{z})$ durch einen sich periodisch zu Ellipsen verformenden Kreis beschrieben wird, wobei die Hauptachsen der Ellipsen mit der $\bar{y}$- und $\bar{z}$-Achse übereinstimmen. Auch im Fall $h_{22} = 0,\ h_{23} \neq 0$ liegt eine lineare Polarisation vor, weil die Metrik durch eine Rotation um 45° diagonalisiert werden kann und dann der zuvor betrachtete Fall vorliegt. Diese beiden Fälle sind die *Hauptmoden* linearer Polarisation.
Allgemeinere Fälle sind $h_{22}/h_{23} = const$ entsprechend linearer Polarisation in allgemeiner Richtung und $h_{22}^2 + h_{23}^2 = const$. Hier bewegen sich die Teilchen auf Kreisen, weil diese Welle durch Superposition der beiden linearen Hauptmoden mit einer Phasenverschiebung von 90° entsteht. Diese Wellenform wird daher als **zirkular polarisiert** bezeichnet. Die Schwingungsform ist hier eine mit Frequenz $\omega/2$ rotierende Polarisationsellipse. Im allgemeinen Fall **elliptischer Polarisation** bewegen sich die Testteilchen auf Ellipsen, und Gestalt *und* Achsenrichtung der Polarisationsellipse ändern sich mit der Frequenz $\omega/2$. Man beachte, dass alle diese Bewegungsmuster *keinen* Punkt in der Transversalebene auszeichnen, weil diese einem räumlich 2-dimensionalen *anisotrop* expandierenden bzw. kontrahierenden, aber homogenen Universum entspricht.

8.2 Gravitationsstrahlung

Wir betrachten eine lokalisierte Quelle im Rahmen der linearen Näherung:

$$\psi_{ik}(t,\vec{x}) \approx \frac{\kappa}{4\pi r}\int T_{ik}^{ret} d^3x' + O(\frac{1}{r^2}) \tag{8.4}$$

mit

$$T_{ik}^{ret} \equiv T_{ik}(t-r, \vec{x}').$$

I.a. repräsentiert (8.4) den ersten Term einer Multipolentwicklung, die sinnvoll ist, wenn die charakteristische Wellenlänge des Feldes ψ_{ik} $\lambda \gg$ Ausdehnung der Quelle erfüllt. Das *Laue-Theorem* (Übungsaufgabe)

$$\int d^3x T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int d^3x T_{00} x^\alpha x^\beta \tag{8.5}$$

liefert zusammen mit (8.4) die **Quadrupolnäherung**

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{8\pi r}\int d^3x x^\alpha x^\beta \ddot{\epsilon}^{ret}. \tag{8.6}$$

Das hier auftretende Integral ist invariant unter Translationen $x^\alpha \to x^\alpha - a^\alpha$, weil

$$\int d^3x \ddot{\epsilon} = \frac{d^2}{dt^2}P_0 \approx 0$$

und

$$\int d^3x x^\alpha \ddot{\epsilon} = \frac{d}{dt}\int d^3x x^\alpha \dot{\epsilon} \approx -\frac{d}{dt}\int d^3x x^\alpha S^\beta{}_{,\beta} = \frac{d}{dt}\int d^3x S^\alpha$$

$$= \frac{d}{dt}P^\alpha \approx 0.$$

Hier bedeutet "$\approx$" Vernachlässigung der Strahlungsrückwirkung, d.h. es ging die speziell-relativistische Energie-Impuls-Erhaltung $T^{ik}{}_{,k} = 0$ ein.
Hauptinhalt dieses Abschnitts ist die Berechnung der **Strahlungsleistung**. Diese ist identisch mit dem Gesamtenergiefluss, der aus dem EIT t_{ik} der Gravitationswelle zu berechnen ist. t_{ik} kann im Rahmen des kanonischen Formalismus im Minkowskiraum berechnet werden. Wir bevorzugen hier die Berechnung aus einer Entwicklung des Einstein-Tensors nach Potenzen des linearisierten Feldes und dessen Ableitungen. Die benötigte Entwicklung ist

$$G_{ik} = G_{ik}^{(1)} + G_{ik}^{(2)} + \cdots = -\kappa T_{ik}. \tag{8.7}$$

Hier enthält $G_{ik}^{(1)}$ nur Terme der Gestalt $\partial\partial h$ und $G_{ik}^{(2)}$ nur Terme der Gestalt $\partial h \partial h$, $h\partial\partial h$. Es folgt

$$G_{ik}^{(1)} = -\kappa(T_{ik} + t_{ik}) \tag{8.8}$$

mit

$$t_{ik} = \frac{1}{\kappa}G_{ik}^{(2)}, \tag{8.9}$$

wenn wir Terme höherer Ordnung vernachlässigen. Die letzte Gleichung definiert den **Energie-Impuls-Tensor des linearisierten Gravitationsfeldes**, was wegen des vorhandenen Minkowski-Hintergrundraums möglich ist. Wegen

$$R^{(1)}_{ijkl} = 4\partial_{[i}h_{j][k,l]} \tag{8.10}$$

(Übungsaufgabe) gilt die Bianchi-Identität

$$R^{(1)}_{ij[kl,m]} = 0$$

und daher auch ihre Kontraktion (mit der Minkowski-Metrik)

$$G^{(1),k}_{ik} = 0 \tag{8.11}$$

exakt. Da außerhalb der Quelle $G_{ik} = 0$, ist dort trivialerweise G_{ik} eichinvariant. Daher ist auch $G^{(2)}_{ik}$ in der betrachteten Ordnung eichinvariant. Da trivialerweise außerhalb der Quelle auch ${G_{ik}}^{,k} = 0$, folgt

$$G^{(2),k}_{ik} \approx 0. \tag{8.12}$$

t_{ik} hat daher in der betrachteten Ordnung alle erwünschten Eigenschaften eines EIT; unklar ist nur noch die Positivität der Energie.
Wir haben nun $G^{(2)}_{ik}$ zu berechnen. Laut Definition ist

$$G^{(2)}_{ik} = R^{(2)}_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\eta^{mn}R^{(2)}_{mn} + (-h_{ik}\eta^{mn}R^{(1)}_{mn} + \eta_{ik}h^{mn}R^{(1)}_{mn}).$$

Da wir für h_{ik} Lösungen von $R^{(1)}_{ik} = 0$ einsetzen werden, werden wir den Term in Klammern nicht weiter berücksichtigen.
Wir setzen nun h als wellenartig, d.h. oszillierend an:

$$h \sim cosS,\ \ S_{,i} \neq 0, \tag{8.13}$$

sodass $T^{-1}\int_{t_0}^{t_0+T} hdt \approx 0$ für genügend große T. Da wir nur am Zeitmittel der Strahlungsleistung interessiert sind, werden gewisse Terme in t_{ik} nicht beitragen. Insbesondere mittelt sich der Beitrag der partiellen Ableitungen der Christoffel-Symbole heraus, da

$$(\partial\Gamma)^{(2)} = \partial(h\partial h) \sim \partial(cosSsinS) \sim cos2S$$

oszillierend ist. Im Zeitmittel ist also nur

$$\bar{R}^{(2)i}{}_{jkl} = \Gamma^{(1)i}{}_{mk}\Gamma^{(1)m}{}_{jl} - \Gamma^{(1)i}{}_{ml}\Gamma^{(1)m}{}_{jk}$$

mit

$$\Gamma^{(1)i}{}_{jk} = \eta^{im}(h_{mj,k} + h_{mk,j} - h_{jk,m})$$

zu berücksichtigen.
Betrachten wir zunächst den Spezialfall $S = S(t-x),\ h_{22} = -h_{33},\ h_{ik} = 0$ sonst. Eine einfache Rechnung ergibt

$$R^{(2)}_{00} = 2\dot{h}^2_{22},\ R^{(2)}_{01} = -2\dot{h}^2_{22},\ R^{(2)}_{11} = 2\dot{h}^2_{22},\ R^{(2)}_{ik} = 0\ sonst.$$

$$\Rightarrow \eta^{mn}R^{(2)}_{mn} = 0 \Rightarrow$$

$$t_{00} = \frac{1}{\kappa}G^{(2)}_{00} = \frac{1}{\kappa}R^{(2)}_{00} = \frac{2}{\kappa}\dot{h}^2_{22} = -t_{01} = -t_{10} = t_{11},\ t_{ik} = 0\ sonst. \tag{8.14}$$

Falls $h_{23} \neq 0$, ist $\dot{h}^2_{22}$ durch $\dot{h}^2_{22} + \dot{h}^2_{23}$ zu ersetzen. Daraus ist die Positivität der Energiedichte einer ebenen Welle ersichtlich.
Allerdings gilt dieses Resultat nur für $h_{ik} = h^{TT}_{ik}(t-x)$, und das ist bei Ausstrahlung von einer isolierten Quelle nur asymptotisch in *einer* Richtung erreichbar. *Global* ist nur die allgemeine harmonische Eichung verwendbar, daher benötigen wir t_{ik} in dieser. Wir hatten innerhalb der harmonischen Eichung noch Eichtransformationen mit den Funktionen $\Lambda_i(t-x)$ durchgeführt. Diese ließen aber $h_{22},\ h_{33}$ und h_{23} unberührt. Daher gilt

$$h_{22} + h_{33} = 0 \tag{8.15}$$

allgemein in der harmonischen Eichung. Es folgt

$$h_{22} = \psi_{22} - \frac{1}{2}\psi_l{}^l = \psi_{22} - \frac{1}{2}(\psi_{22} + \psi_{33}) = \frac{1}{2}(\psi_{22} - \psi_{33}).$$

Daher ist in der harmonischen Eichung

$$t_{00} = \frac{2}{\kappa}[\frac{1}{4}(\dot{\psi}_{22} - \dot{\psi}_{33})^2 + \dot{\psi}^2_{23}]. \tag{8.16}$$

Außerdem ist $t_{01} = -t_{00}$ (der Energietransport erfolgt mit Lichtgeschwindigkeit) und $t_i{}^i = 0$ wie in der Elektrodynamik.
Innerhalb der harmonischen Eichung ist auch global $\psi_{\alpha\alpha} = 0$ erreichbar (nämlich mit einer Transformationsfunktion der Gestalt

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{v}(t-r)}{r}$$

so dass

$$div\vec{\Lambda} = \frac{d\Lambda^r}{dr} = -\frac{1}{2}\psi_{\alpha\alpha}).$$

Aus der allgemeinen Lösung

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{8\pi r} \int \ddot{\epsilon}^{ret} x'^{\alpha} x'^{\beta} d^3 x'$$

wird in dieser Eichung

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{8\pi r} \ddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta} \tag{8.17}$$

mit dem **Quadrupoltensor**

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3 x \epsilon(\vec{x})(x^\alpha x^\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} r^2). \tag{8.18}$$

(Natürlich geht wegen der Eichinvarianz des EIT auch ohne die letzte Eichbedingung nur der spurfreie Anteil von $\psi_{\alpha\beta}$ in diesen ein, wie man in der nächsten Formel sieht). In großer Entfernung von der Quelle entlang der x-Richtung ergibt sich damit

$$t_{01} = -\frac{2}{\kappa}(\frac{\kappa}{8\pi r})^2 [\frac{1}{4}(\dddot{Q}^{ret}_{22} - \dddot{Q}^{ret}_{33})^2 + (\dddot{Q}^{ret}_{23})^2] \tag{8.19}$$

Für eine *allgemeine* Ausbreitungsrichtung mit Einheitsvektor $\vec{n}$ ist anzusetzen

$$t_{0\alpha} n_\alpha = -\frac{\kappa}{32\pi^2 r^2} [a(\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + b\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta}\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta} + c\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta}\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma]. \tag{8.20}$$

Der Vergleich mit dem obigen Spezialfall $\vec{n} = (1, 0, 0)$ bestimmt die Konstanten zu

$$a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = -1, \tag{8.21}$$

wobei $Q_{11} = -(Q_{22} + Q_{33})$ zu verwenden ist.
Die **Gesamtstrahlungsleistung** der Quelle ist

$$-\frac{dE}{dt} = \oint \vec{S} \cdot d\vec{F} = -\oint t_{0\alpha} dF_\alpha = -\int_{r=const} t_{0\alpha} n_\alpha r^2 d\Omega. \tag{8.22}$$

Mit

$$\int n_\alpha n_\beta d\Omega = \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta},$$

$$\int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta = \frac{4\pi}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

folgt schließlich

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta}\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta}, \tag{8.23}$$

die sogenannte **Einsteinsche Quadrupolformel**. Diese hat für Gravitationsstrahlung denselben Stellenwert wie die *Larmor-Formel*

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3}\frac{\dddot{\vec{d}}^2}{c^3}, \ \vec{d} \equiv \int \rho\vec{x}d^3x,$$

für elektrische Dipolstrahlung. Da es in der Gravitation wegen der Impulserhaltung keine Dipolstrahlung gibt, ist das Quadrupolmoment einer Massenverteilung das niedrigste Multipolmoment, das abgestrahlt werden kann. Aus Dimensionsgründen geht die dritte Zeitableitung von $Q_{\alpha\beta}$ in die Strahlungsleistung ein. Der Vorfaktor in der Quadrupolformel ist in Standardeinheiten sehr klein, sodass die gravitative Strahlungsleistung der meisten astrophysikalischen Systeme vergleichsweise bescheiden ist.
Die Quadrupolformel und damit die Existenz von Gravitationswellen überhaupt wurde durch die Messung der Verringerung der Bahnperiode (über große Zeiträume) in Binärpulsaren *indirekt* bestätigt. Das am besten vermessene System ist der bereits in Kap. 5 erwähnte Binärpulsar PSR 1913+16, der mittlerweile die Vorhersage der Quadrupolformel mit einer Genauigkeit von 0,3 Prozent reproduziert.

8.3 Nachweis von Gravitationswellen

8.3.1 Astrophysikalische Quellen

Betrachten wir ein gravitativ gebundenes System mit typischer Relativgeschwindigkeit v der Konstituenten, dann ist in großem Abstand r vom System die typische Amplitude der emittierten Gravitationswelle

$$h \sim \frac{G}{r}\int \ddot{\epsilon}xx \sim \frac{GMv^2}{r} \sim V(r)V_0, \tag{8.24}$$

wo V_0 das Newtonsche Potential am Ort der Quelle bedeutet. Im Fall relativistischer Bewegung ist $V_0 \sim 1$. Z.B. erzeugt die Entstehung eines Schwarzen Lochs mit $M = 10M_\odot$ aus einer Supernova mit $V_0 \sim 1$ in 10^7 Lichtjahren Entfernung eine Amplitude

$$h \sim \frac{\mathcal{M}}{r} \sim \frac{10km}{10^7 \cdot 10^{13}km} \sim 10^{-19}.$$

Mit vernünftiger Häufigkeit sind aber auf der Erde nur Amplituden $h < 10^{-20}$ zu erwarten.
Man kann die möglichen Quellen nach der **Signalcharakteristik** einteilen

in
a) *Bursts*: Gravitationskollaps (Supernova), Kollisionen (von Neutronensternen oder Schwarzen Löchern), Spiralbewegung enger Doppelsterne (die ein Signal ansteigender Frequenz ("chirp") produziert);
b) *periodische*: Doppelsterne, rotierende deformierte Sterne, asymmetrisch pulsierende Weiße Zwerge (Novae);
c) *stochastische*: Ursprung in der Frühphase des Universums.

8.3.2 Gravitationswellenantennen

Es gibt zwei Bautypen von Antennen:
a) **Freie Massen**, deren Abstand mit elektromagnetischen Wellen gemessen wird. Hierzu gehören die Laser-Interferometer, für die die freien Massen als Spiegel fungieren. Die beiden größten derartigen Anlagen sind **LIGO** (2 Interferometer mit Armlänge 4km bzw. 2km im amerikanischen Bundesstaat Washington und ein 4km-Interferometer in Louisiana) und **VIRGO** (3km, in der Nähe von Pisa (Italien)). Die Empfindlichkeit dieser Anlagen hat ihr Maximum bei einer Frequenz von $\nu \sim 100Hz$ und soll innerhalb der nächsten 5 Jahre den Wert $h \sim 10^{-23}$ erreichen. In fernerer Zukunft soll das Weltraumprojekt **LISA** den Frequenzbereich von 10^{-3} bis 1 Hz erschließen, der auf der Erde wegen seismischer Störungen verschlossen ist.
b) **Resonanzantennen**, typischerweise massive und auf $T < 0,1K$ gekühlte Zylinder, deren von einer Gravitationswelle angeregte Resonanzschwingung quantenelektronisch oder sogar im Wege einer "Quantum-Non-Demolition"-Messung registriert wird. Ihre projektierte Empfindlichkeit ist aber geringer als die der Experimente mit freien Massen.