

# Mathematische Methoden der Physik I

Helmut Neufeld  
Fakultät für Physik  
Universität Wien

Sommersemester 2008



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Euklidische Vektorräume</b>	<b>1</b>
1.1	Skalarprodukt . . . . .	1
1.2	Transponierte Abbildung . . . . .	3
1.3	Norm . . . . .	4
1.4	Orthonormalbasis . . . . .	6
1.5	Orthogonale Transformationen . . . . .	9
1.6	$SO(3)$ . . . . .	14
1.7	Eulersche Winkel . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Unitäre Vektorräume</b>	<b>19</b>
2.1	Komplexes Skalarprodukt . . . . .	19
2.2	Adjungierte Abbildung . . . . .	22
2.3	Orthonormalbasis . . . . .	23
2.4	Projektionsoperatoren . . . . .	25
2.5	Hermitesche Operatoren . . . . .	27
2.6	Unitäre Operatoren . . . . .	28
2.7	Normale Operatoren . . . . .	29
2.8	Spektralsatz für normale Operatoren . . . . .	30
2.9	Gleichzeitige Diagonalisierbarkeit . . . . .	35
2.10	Funktionen normaler Operatoren . . . . .	36
2.11	Anwendung des Spektralsatzes auf reelle Matrizen . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Einfache Quantensysteme</b>	<b>43</b>
3.1	Grundpostulate der Quantentheorie . . . . .	43
3.2	Spin 1/2 System . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Tensorprodukte von Vektorräumen</b>	<b>55</b>
4.1	Tensorprodukte . . . . .	55
4.2	Tensoren in reellen Vektorräumen . . . . .	57
4.3	Metrischer Tensor . . . . .	58
4.4	Levi-Civita-Tensor . . . . .	61
4.5	Tensoren im dreidimensionalen Raum . . . . .	62
4.6	Tensorprodukt von Zustandsräumen . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>67</b>
5.1	Grundbegriffe . . . . .	67
5.2	Richtungsfeld . . . . .	70
5.3	Trennung der Variablen . . . . .	70
5.4	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	74
5.5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	76
5.6	Bernoullische Differentialgleichung . . . . .	80
5.7	Iterationsverfahren von Picard . . . . .	80
5.8	Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	81
5.9	Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung . . . . .	82
5.10	Zeitentwicklung in der Quantenmechanik . . . . .	85
5.11	Energie . . . . .	86
5.12	Lineare DGLn 2. Ordnung mit konst. Koeff. . . . .	87
5.13	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	90
5.14	Lineare Differentialgleichungssysteme 2.Ordnung . . . . .	90

<b>6 Komplexe Analysis</b>	<b>93</b>
6.1 Komplexe Zahlen . . . . .	93
6.2 Komplexe Funktionen . . . . .	94
6.3 Riemannsche Flächen . . . . .	96
6.4 Differentiation im Komplexen . . . . .	98
6.5 Integration im Komplexen . . . . .	100
6.6 Integralsatz von Cauchy . . . . .	108
6.7 Unbestimmtes Integral . . . . .	118
6.8 Cauchysche Integralformel . . . . .	119
6.9 Ableitungen einer holomorphen Funktion . . . . .	122
6.10 Unendliche Reihen komplexer Zahlen . . . . .	126
6.11 Potenzreihen . . . . .	131
6.12 Reihen von Funktionen . . . . .	133
6.13 Sätze über Potenzreihen . . . . .	136
6.14 Taylorreihen . . . . .	137
6.15 Laurentreihen . . . . .	139
6.16 Residuen . . . . .	144
6.17 Residuensatz . . . . .	147
6.18 Berechnung von reellen Integralen . . . . .	149

### Danksagungen

Harald Höller hat die mühevollen Arbeit der Umwandlung meiner handschriftlichen Notizen in ein LATEX-file übernommen. Ihm möchte ich besonders danken. Eine große Hilfe waren auch Paul Posch und Mathias Tomandl, die die Abbildungen des 6. Kapitels angefertigt haben. Walter Grimus hat mich mit vielen nützlichen Anregungen unterstützt. Auch das Manuskript einer seiner früheren M1-Vorlesungen war für mich eine Quelle wertvoller Inspiration. Schließlich möchte ich jenen Hörern meiner Vorlesung danken, die mich auf Druckfehler in den früheren Versionen des Skriptums aufmerksam gemacht haben.

### Literatur

- C. B. Lang, N. Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, Spektrum
- E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons
- J. Cigler, Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 2. Teil, Manz
- A. Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik, III. Band, Springer



# Kapitel 1

## Euklidische Vektorräume

*In einem Vektorraum sind als Verknüpfungsvorschriften die Vektoraddition und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren (den Elementen des Grundkörpers) erklärt. Fügt man als weitere Struktur ein Skalarprodukt hinzu, so gelangt man im Fall eines reellen Vektorraums zur Definition des euklidischen und für komplexe Vektorräume zur Definition des unitären Vektorraums.*

### 1.1 Skalarprodukt

*Wie bereits aus dem Schulunterricht bekannt ist, kann man in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum die Länge eines Vektors und den zwischen zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes ausdrücken. Wir wollen hier Skalarprodukte axiomatisch, das heißt durch die Angabe ihrer charakteristischen Eigenschaften, einführen. Dadurch gewinnen wir einerseits mehr Einblick in die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen und lösen uns andererseits von der Einengung auf elementargeometrische Anwendungen.*

**Definition:** Ein (endlichdimensionaler) Vektorraum  $\mathcal{E}$  über dem Grundkörper  $\mathbb{R}$  heißt **euklidisch**, falls für je zwei Elemente  $x, y \in \mathcal{E}$  ein **Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt**)  $(x|y) \in \mathbb{R}$  definiert ist, mit folgenden Eigenschaften:

1.  $(a_1x_1 + a_2x_2|y) = a_1(x_1|y) + a_2(x_2|y), \quad x_{1,2} \in \mathcal{E}, \quad a_{1,2} \in \mathbb{R}$
2.  $(x|y) = (y|x)$
3.  $(x|x) \geq 0, \quad (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Bemerkung:** Die Eigenschaften 1 (Linearität im ersten Argument) und 2 (Symmetrie) implizieren Linearität auch im zweiten Argument, das heißt das Skalarprodukt ist **bilinear**.

**Beispiele:**

1. Das Paradebeispiel schlechthin ist natürlich der Raum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Skalarprodukt

$$(x|y) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i.$$

Fasst man die Elemente des  $\mathbb{R}^3$  als Spaltenvektoren (oder  $3 \times 1$ -Matrizen) auf,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

so kann man mit Hilfe des dazugehörigen Zeilenvektors (bzw. der zu  $x$  transponierten  $1 \times 3$ -Matrix)

$$x^T = (x_1, x_2, x_3)$$

das Skalarprodukt auch in Matrixnotation schreiben:

$$(x|y) = x^T y.$$

2. Im  $\mathbb{R}^n$  sei ein Skalarprodukt

$$(x|y) = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

definiert. Diesen Raum nennen wir  $E^n$ .

3. Im  $\mathbb{R}^n$  sei ein inneres Produkt durch

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n p_i x_i y_i$$

definiert, wobei  $p_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist.

4. In dem Funktionenraum der auf einem endlichen Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  definierten reellen Polynome vom Grad  $\leq n$ ,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad x \in [a, b],$$

kann man durch

$$(p|q) = \int_a^b dx p(x)q(x)$$

ein inneres Produkt definieren.



## 1.2 Transponierte Abbildung

Im Raum  $E^n$  (Beispiel 2) ist das Skalarprodukt durch  $(x|y) = x^T y$  definiert, wobei  $x^T$  die „transponierte Matrix von  $x$ “ bedeutet. Diese sehr praktische Schreibweise kann für beliebige euklidische Räume verallgemeinert werden. Dazu geht man von der Beobachtung aus, dass im Falle des  $E^n$  die Abbildung  $x \mapsto x^T$  eine „Identifizierung“ von  $E^n$  (dem Raum der  $n$ -dimensionalen Spaltenvektoren) mit seinem Dualraum  $\widetilde{E}^n$  (dem Raum der  $n$ -dimensionalen Zeilenvektoren) darstellt. Die Vorgabe eines Skalarproduktes erlaubt es nun, jeden euklidischen Vektorraum  $\mathcal{E}$  mit seinem Dualraum  $\widetilde{\mathcal{E}}$  auf kanonische Weise zu identifizieren. Dazu ordnet man jedem  $x \in \mathcal{E}$  das lineare Funktional  $x^T \in \widetilde{\mathcal{E}}$  zu, welches durch

$$x^T(y) = x^T y = (x|y) \quad \forall y \in \mathcal{E}$$

definiert ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass die Abbildung  $x \mapsto x^T$  linear und injektiv ist. Da  $\dim \mathcal{E} = \dim \widetilde{\mathcal{E}}$  ist, stimmt das Bild von  $\mathcal{E}$  unter der Abbildung  $^T$  mit ganz  $\widetilde{\mathcal{E}}$  überein. Bezeichnet man die inverse Abbildung ebenfalls mit  $^T$ , so ist  $x^{TT} = x \quad \forall x \in \mathcal{E}$  erfüllt.

Für eine lineare Abbildung  $A : E^n \rightarrow E^n$  gilt

$$(x|Ay) = (A^T x|y),$$

da

$$(A^T x|y) = (A^T x)^T y = x^T A^{TT} y = x^T A y = (x|Ay).$$

Diese Konstruktion lässt sich ebenfalls auf den allgemeinen Fall übertragen:  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  seien euklidische Vektorräume mit dem Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{V}}$ , bzw.  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{W}}$  und  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  eine lineare Abbildung. Dann ist die zu  $A$  **transponierte Abbildung**  $A^T : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$  durch

$$(A^T w|v)_{\mathcal{V}} = (w|Av)_{\mathcal{W}} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \forall w \in \mathcal{W}$$

definiert. Wieder überzeugt man sich leicht davon, dass  $A^T$  wohldefiniert und linear ist.

**Eigenschaften** der transponierten Abbildung:

1.  $(a_1 A_1 + a_2 A_2)^T = a_1 A_1^T + a_2 A_2^T, \quad a_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad A_{1,2} \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}).$
2.  $A^{TT} = A, \quad A \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}).$
3.  $(BA)^T = A^T B^T, \quad A \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \quad B \in L(\mathcal{W}, \mathcal{X}).$

### 1.3 Norm

Im  $E^n$  kann die Länge eines Vektors durch

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{(x|x)}$$

bestimmt werden. Im allgemeinen Fall eines beliebigen euklidischen Vektorraums  $\mathcal{E}$  definiert man die **Norm**  $\|x\|$  eines Elementes  $x \in \mathcal{E}$  durch

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Für das Skalarprodukt gilt die **Ungleichung** von **Cauchy-Schwarz**:

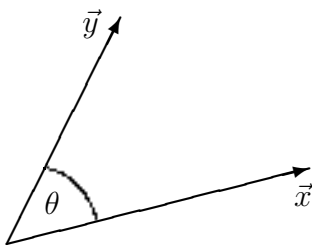
$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Beweis:** Für  $x = 0$  oder  $y = 0$  ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Man kann sich daher auf den Fall  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$  beschränken. Es sei  $\epsilon = \pm 1$  so gewählt, dass

$$|(x|y)| = \epsilon(x|y).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \left( \frac{x}{\|x\|} - \epsilon \frac{y}{\|y\|} \middle| \frac{x}{\|x\|} - \epsilon \frac{y}{\|y\|} \right) = \frac{(x|x)}{\|x\|^2} + \frac{(y|y)}{\|y\|^2} - 2 \frac{\epsilon(x|y)}{\|x\| \|y\|} \\ &= 2 \left( 1 - \frac{|(x|y)|}{\|x\| \|y\|} \right) \Rightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Anschauliche Bedeutung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum:



$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

**Eigenschaften der Norm:**

1.  $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|ax\| = |a| \|x\| \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Beweis:** Die ersten beiden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition der Norm. Die dritte Eigenschaft (**Dreiecksungleichung**) ergibt sich aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) = (x|x) + (y|y) + 2(x|y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

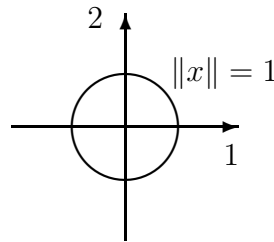
**Definition:** Ein Vektor  $x$  heißt **normiert** oder **Einheitsvektor**, wenn  $\|x\| = 1$  ist. Zwei Vektoren  $x, y$  heißen **orthogonal**, wenn  $(x|y) = 0$  ist.

**Beispiele:**

1. Im  $E^2$  bildet die Menge aller Einheitsvektoren

$$\|x\|^2 = (x|x) = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

einen Kreis mit Radius 1 (Einheitskreis).



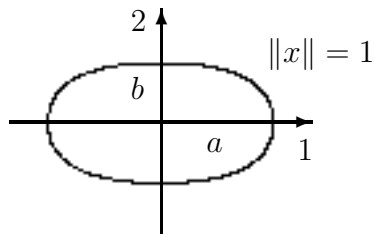
2. Im Fall des  $\mathbb{R}^2$  mit dem inneren Produkt

$$(x|y) = \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}$$

liegen die Einheitsvektoren auf der Ellipse

$$\|x\|^2 = (x|x) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

(Ellipse als „Einheitskugel“). Die Richtungsvektoren zweier Durchmesser



sind genau dann „orthogonal“, wenn es sich um konjugierte Durchmesser handelt.

3. Wir betrachten in dem Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq n$  auf  $[0, 1]$  mit dem inneren Produkt

$$(p|q) = \int_0^1 dx p(x)q(x)$$

die Elemente  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$  und  $p_2(x) = x^2$ .  $p_0$ ,  $\sqrt{3}p_1$  und  $\sqrt{5}p_2$  sind Einheitsvektoren,  $p_0$  und  $p_1$  sind nicht orthogonal, jedoch sind  $p_0$  und  $p_0 - 2p_1$  orthogonal.

## 1.4 Orthonormalbasis

**Definition:** Unter einem **Orthonormalsystem** (ONS) in einem euklidischen Vektorraum  $\mathcal{E}$  versteht man eine Menge von Einheitsvektoren, die paarweise aufeinander orthogonal stehen:

$$f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}, \quad (f_i|f_j) = \delta_{ij}.$$

Bildet  $\{f_1, \dots, f_k\}$  ein ONS, dann sind diese Vektoren linear unabhängig, denn

$$\sum_{i=1}^k a_i f_i = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (f_j | \sum_{i=1}^k a_i f_i) = \sum_{i=1}^k a_i \underbrace{(f_j | f_i)}_{\delta_{ij}} = a_j \quad \forall j, 1 \leq j \leq k.$$

**Definition:** Ein Orthonormalsystem heißt **vollständig** (VONS) oder **Orthonormalbasis** (ONB) von  $\mathcal{E}$ , wenn es eine Basis von  $\mathcal{E}$  bildet.

**Beispiele:**

1. Im  $E^n$  ist die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine ONB, weil  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$  ist.

2. Im  $E^2$  bilden die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

eine ONB.

$\{f_1, \dots, f_n\}$  sei eine ONB eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraumes  $\mathcal{E}$ . Dann lässt sich jedes  $x \in \mathcal{E}$  in der Form

$$x = \sum_{i=1}^n f_i a_i$$

schreiben, wobei die Entwicklungskoeffizienten  $a_i \in \mathbb{R}$  eindeutig durch

$$a_i = (f_i | x) = f_i^T x$$

bestimmt sind. Man hat also die Beziehung

$$x = \sum_{i=1}^n f_i f_i^T x \quad \forall x \in \mathcal{E}$$

und erhält somit die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_{i=1}^n f_i f_i^T = \mathbf{1}.$$

Es ist instruktiv, die Vollständigkeitsrelation für die beiden oben angegebenen Beispiele zu verifizieren.

Eine ONB  $\{f_1, \dots, f_n\}$  eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraumes kann also auch durch die beiden Eigenschaften

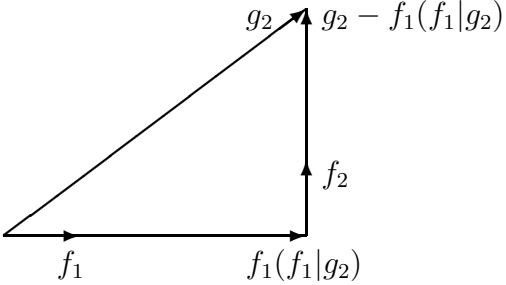
$$(f_i | f_j) = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^n f_i f_i^T = \mathbf{1}$$

charakterisiert werden.

Das **Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren** ist eine Methode, ausgehend von einer beliebigen Basis  $\{g_1, \dots, g_n\}$  eines euklidischen Vektorraumes, eine ONB (ein VONS)  $\{f_1, \dots, f_n\}$  zu konstruieren.

$$f_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$$

$$g_2 = \underbrace{f_1(f_1 | g_2)}_{\|f_1\|} + \underbrace{g_2 - f_1(f_1 | g_2)}_{\perp f_1}$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{g_2 - f_1(f_1|g_2)}{\|g_2 - f_1(f_1|g_2)\|}$$


$$g_3 = \underbrace{f_1(f_1|g_3) + f_2(f_2|g_3)}_{\substack{\text{liegt in dem von } f_1, f_2 \\ \text{aufgespannten linearen Teilraum}}} + \underbrace{g_3 - f_1(f_1|g_3) - f_2(f_2|g_3)}_{\perp f_1, f_2}$$

$$\Rightarrow f_3 = \frac{g_3 - f_1(f_1|g_3) - f_2(f_2|g_3)}{\|g_3 - f_1(f_1|g_3) - f_2(f_2|g_3)\|}$$

usw.  $\rightarrow$  VONS  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

**Bemerkung:** Aus diesem Resultat folgt auch unmittelbar, dass ein VONS stets existiert.

Ein beliebiger  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum  $\mathcal{E}$  unterscheidet sich in gewisser Weise nicht von einem  $E^n$ . Wählt man nämlich in  $\mathcal{E}$  eine ONB  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , so lässt sich jedes  $x \in V$  eindeutig in der Form

$$x = \sum_{i=1}^n f_i x_i, \quad x_i = (f_i|x)$$

schreiben. Der Vektor  $x$  ist also (bei vorgegebener ONB) eindeutig durch die  $n$  Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E^n$$

bestimmt. Weiters gilt  $(x+y)_i = x_i + y_i$ ,  $(ax)_i = ax_i$  und

$$(x|y) = \left( \sum_{i=1}^n f_i x_i \middle| \sum_{j=1}^n f_j y_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{(f_i|f_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

d.h. die Zuordnung

$$x \in \mathcal{E} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E^n$$

respektiert sowohl die Vektoraddition, die Multiplikation mit Skalaren als auch die Bildung des Skalarprodukts. Man sagt auch, dass jeder  $n$ -dimensionale euklidische Vektorraum **isomorph** zu  $E^n$  ist.

**Bemerkung:** Eine lineare Abbildung  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  heißt **Isomorphismus** der euklidischen Vektorräume  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ , falls  $T$  ein Vektorraumisomorphismus (d.h. eine bijektive lineare Abbildung) ist mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$(Tx|Ty)_{\mathcal{W}} = (x|y)_{\mathcal{V}} \quad \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

Die **Matrixdarstellung**  $(A_{ij})$  einer linearen Abbildung  $A \in L(\mathcal{E})$  (d.h.  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ) in einem euklidischen Vektorraum  $\mathcal{E}$  hat **bezüglich einer ONB**  $\{f_1, \dots, f_n\}$  eine besonders einfache Form. Bildet man nämlich das Skalarprodukt von  $f_i$  mit dem Ausdruck

$$Af_j = \sum_{k=1}^n f_k A_{kj},$$

so erhält man

$$(f_i|Af_j) = (f_i|\sum_{k=1}^n f_k A_{kj}) = \sum_{k=1}^n A_{kj} \underbrace{(f_i|f_k)}_{\delta_{ik}} = A_{ij}.$$

Das heißt man bildet einfach ein „Sandwich“ des Operators  $A$  zwischen den Vektoren  $f_i$  und  $f_j$  um das Matrixelement  $A_{ij}$  zu erhalten:

$$A_{ij} = (f_i|Af_j) = f_i^T Af_j.$$

Die Matrixdarstellung  $(A^T)_{ij}$  der durch  $(A^T x|y) = (x|Ay) \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$  definierten, zu  $A$  transponieren Abbildung  $A^T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ist dann **bezüglich einer ONB** durch

$$(A^T)_{ij} = (f_i|A^T f_j) = (Af_i|f_j) = (f_j|Af_i) = A_{ji}$$

gegeben, d.h. Zeilen und Spalten werden einfach vertauscht.

## 1.5 Orthogonale Transformationen

Wir wollen nun mit den sogenannten **orthogonalen Abbildungen** noch kurz eine wichtige Klasse von Operatoren  $\in L(\mathcal{E})$  besprechen. Dazu gehen wir von der folgenden Beobachtung aus:

**Satz:** Sei  $O \in L(\mathcal{E})$  ( $\mathcal{E}$  ein euklidischer Vektorraum). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $O$  ist invertierbar mit  $O^{-1} = O^T$  (d.h.  $O^T O = O O^T = \mathbf{1}$ ).
2.  $(Ox|Oy) = (x|y) \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$ .
3.  $O$  ist **isometrisch**, d.h.  $\|Ox\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{E}$ .
4.  $O$  bildet jede ONB von  $\mathcal{E}$  wieder auf eine ONB von  $\mathcal{E}$  ab.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, nennt man die Abbildung  $O$  **orthogonal**. In der früher eingeführten Sprechweise ist  $O$  dann ein Isomorphismus des euklidischen Vektorraumes  $\mathcal{E}$  mit sich, ein sogenannter **Automorphismus**.

Bei dem Beweis des obigen Satzes bereitet nur die Implikation  $3 \Rightarrow 2$  etwas Mühe. Man benötigt dazu den folgenden **Hilfssatz (Polarisierungsidentität)**:

$$(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

**Beweis** des Hilfssatzes: Man subtrahiere die Ausdrücke

$$\begin{aligned} (x+y|x+y) &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y), \\ (x-y|x-y) &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y). \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, dass  $\|Ox\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{E}$  erfüllt ist, so folgt unter Verwendung des Hilfssatzes tatsächlich, dass

$$\begin{aligned} (Ox|Oy) &= \frac{\|Ox+Oy\|^2 - \|Ox-Oy\|^2}{4} = \frac{\|O(x+y)\|^2 - \|O(x-y)\|^2}{4} \\ &= \frac{\|(x+y)\|^2 - \|(x-y)\|^2}{4} = (x|y) \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

erfüllt ist.

**Bemerkungen:**

1. Aus  $O^T O = \mathbf{1}$  folgt für eine orthogonale Transformation  $\det(O^T O) = \det O^T \det O = (\det O)^2 = 1$  und somit  $\det O = \pm 1$ .
2. Die orthogonalen Transformationen auf einem  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum bilden eine **Gruppe**, man nennt sie  $O(n)$ . Jene orthogonalen Transformationen  $R$ , welche die Zusatzbedingung  $\det R = 1$  erfüllen, bilden ebenfalls eine Gruppe, diese wird als  $SO(n)$  bezeichnet.



3.  $\{f_1, \dots, f_n\}$  sei eine beliebige ONB eines euklidischen Vektorraumes  $\mathcal{E}$ . Wegen  $\sum_{i=1}^n f_i f_i^T = \mathbf{1}$  lässt sich dann jede orthogonale Transformation  $O \in L(\mathcal{E})$  in der Form

$$O = O\mathbf{1} = O \sum_{i=1}^n f_i f_i^T = \sum_{i=1}^n O f_i f_i^T = \sum g_i f_i^T$$

schreiben, wobei die Vektoren  $g_i = O f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wegen der Eigenschaft 4 wieder eine ONB von  $\mathcal{E}$  bilden. Für den Spezialfall  $\mathcal{E} = E^n$  kann man daher jede orthogonale  $n \times n$ -Matrix  $O$  in der Form

$$O = \sum_{i=1}^n g_i e_i^T = (g_1, \dots, g_n)$$

schreiben, das heißt in den Spalten von  $O$  steht die ONB  $\{g_1, \dots, g_n\} = \{O e_1, \dots, O e_n\}$ . Ebenso bilden die Zeilen einer orthogonalen Matrix ein VONS, da

$$\begin{aligned} O &= \mathbf{1}O = \sum_{i=1}^n e_i e_i^T O = \sum_{i=1}^n e_i (O^T e_i)^T = \sum_{i=1}^n e_i h_i^T \\ &= \begin{pmatrix} h_1^T \\ \vdots \\ h_n^T \end{pmatrix}, \quad h_i = O^T e_i. \end{aligned}$$

Die orthogonalen  $n \times n$ -Matrizen sind also genau jene Elemente aus  $L(E^n)$ , deren Spalten bzw. Zeilen ein VONS von  $E^n$  bilden.

### Beispiele:

1. Im  $E^2$  lässt sich jeder Einheitsvektor  $f_1$  in der Form

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

schreiben, für einen auf  $f_1$  orthogonal stehenden Vektor  $f_2$  gibt es dann nur mehr die zwei Möglichkeiten

$$f_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Nach den obigen Überlegungen hat eine orthogonale Matrix  $O$  im  $E^2$  dann die allgemeine Gestalt

$$O = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\varepsilon \sin \alpha \\ \sin \alpha & \varepsilon \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Für  $\varepsilon = 1$  handelt es sich um eine **Drehung** mit Drehwinkel  $\alpha$ . In diesem Fall ist  $\det O = 1$ . Im Fall  $\varepsilon = -1$  hat man es mit einer **Drehspiegelung** zu tun, wobei  $\det O = -1$  ist.

2. Eine reine **Spiegelung** im  $E^2$  wäre z.B. die Transformation

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

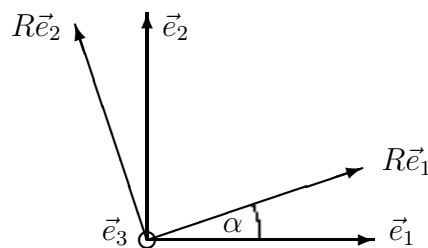
die einer Spiegelung an der 1-Achse entspricht.

3. Wir wollen im dreidimensionalen Raum eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  beschreiben. Die 3-Achse unseres Koordinatensystems legen wir dabei in Richtung der Drehachse. Als ONB haben wir (in der in der Physik für räumliche Vektoren üblichen Schreibweise)  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , welche (in der angegebenen Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden soll. Wegen der Linearität der Drehoperation  $R$  genügt es, ihre Wirkung auf die drei Basisvektoren zu kennen:

$$\begin{aligned} R\vec{e}_1 &= \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha, \\ R\vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha, \\ R\vec{e}_3 &= \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Daraus können wir unmittelbar die Matrixdarstellung  $(R_{ij})$  von  $R$  bezüglich der gewählten ONB ablesen:

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



### Bemerkungen:

- (a) Wir stellen fest, dass  $\det R = 1$  ist. Reine Drehungen im dreidimensionalen Raum entsprechen den Elementen der **Drehgruppe**  $SO(3)$ .

- (b) Eine Drehung im dreidimensionalen Raum ist bereits festgelegt, wenn man das Bild von **zwei** orthonormierten Vektoren kennt, da dann auch das Bild des dritten Basisvektors bereits bestimmt ist. Tatsächlich folgt bei unserem Beispiel aus  $R\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha$  und  $R\vec{e}_3 = \vec{e}_3$  mit  $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$  das Transformationsverhalten von  $\vec{e}_1$ :

$$\begin{aligned} R\vec{e}_1 &= R(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = R\vec{e}_2 \times R\vec{e}_3 \\ &= (-\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha) \times \vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

- (c) Ein Vektor

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i x_i$$

mit Komponenten  $x_i$  bezüglich der ONB  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  wird durch die Drehung  $R \in SO(3)$  in den Vektor

$$R\vec{x} = R \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j x_j = \sum_{j=1}^3 R\vec{e}_j x_j = \sum_{i,j=1}^3 \vec{e}_i R_{ij} x_j$$

mit den Komponenten

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j$$

transformiert. Man spricht in diesem Fall von einer **aktiven** Transformation des Vektors. Bei einer **passiven** Transformation bleibt der Vektor  $\vec{x}$  selbst unverändert, man betrachtet jedoch seine Komponenten  $x'_i$  bezüglich einer transformierten ONB  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ . Im Fall unserer Drehung ist

$$\vec{e}'_j = R\vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i R_{ij}.$$

Wegen

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i x_i = \sum_{j=1}^3 \vec{e}'_j x'_j = \sum_{i,j=1}^3 \vec{e}_i R_{ij} x'_j,$$

ist der Zusammenhang zwischen den Komponenten  $x_i$  und den Komponenten  $x'_i$  durch

$$x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x'_j \quad \Leftrightarrow \quad x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}^{-1} x_j$$

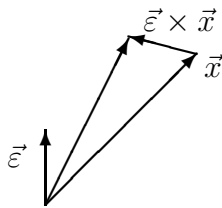
gegeben. Das Transformationsverhalten der Komponenten des Vektors ist also invers zu jenem der aktiven Transformation.

4. Das Standardbeispiel für eine orthogonale Transformation mit negativer Determinante ist in drei Raumdimensionen die **Paritätstransformation**  $P = -\mathbf{1}$ . Jedes Element  $O \in O(3)$  mit  $\det O = -1$  lässt sich in der Form  $O = PR$ ,  $R \in SO(3)$ , schreiben.

## 1.6 $SO(3)$

Die Menge der Drehungen im dreidimensionalen Raum ist ein Beispiel für eine nichtabelsche Liegruppe.

Die Elemente der Gruppe  $SO(3)$  können durch den sogenannten **Drehvektor**  $\vec{\alpha}$  parametrisiert werden. Dieser zeigt (gemäß der Rechtsschraubenregel) in Richtung der Drehachse, sein Betrag ist gleich dem Drehwinkel  $\alpha = |\vec{\alpha}|$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ). Die entsprechende Transformation bezeichnen wir mit  $R(\vec{\alpha})$ . Es handelt sich bei der  $SO(3)$  also um eine kontinuierliche Gruppe von Transformationen (eine sogenannte **Liegruppe**), deren wesentliche Eigenschaften durch die Gestalt ihrer Elemente in einer infinitesimalen Umgebung des Einheitselements bereits festgelegt sind. Für infinitesimales  $\vec{\varepsilon}$  hat eine Drehung die einfache Form



$$R(\vec{\varepsilon}) \vec{x} = \vec{x} + \vec{\varepsilon} \times \vec{x} = (\mathbb{1} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\Lambda}) \vec{x}.$$

Man kann nun eine beliebige **endliche** Drehung um den Drehwinkel  $\vec{\alpha}$  durch die wiederholte Anwendung von  $N$  Drehungen um den Drehwinkel  $\vec{\alpha}/N$  erhalten:

$$R(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}/N)^N.$$

Für genügend großes  $N$  (und somit einen entsprechend kleinen Wert von  $\alpha/N$ ) kann man schreiben:

$$R(\vec{\alpha}) \simeq \left( \mathbb{1} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\Lambda}}{N} \right)^N$$

Im Limes  $N \rightarrow \infty$  erhält man somit die Formel

$$R(\vec{\alpha}) = \exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{\Lambda}).$$

**Bemerkung:** Wegen  $(\vec{\varepsilon} \times \vec{x})_i = \epsilon_{ikj} \varepsilon_k x_j = -\varepsilon_k \epsilon_{kij} x_j$  (Summenkonvention!) sind die Matrixdarstellungen der drei in  $\vec{\Lambda}$  zusammengefassten linearen Abbildungen

$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  bezüglich der ONB  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  durch  $(\Lambda_k)_{ij} = -\epsilon_{kij}$  gegeben. Diese Matrizen bilden eine dreidimensionale Darstellung der **Generatoren** (oder **Erzeuger**) der  $SO(3)$ .

Führt man zuerst die Drehung  $R(\vec{\alpha})$  und anschließend die Drehung  $R(\vec{\beta})$  aus, so wird sich das Resultat im Allgemeinen von jenem unterscheiden, das man erhält, wenn man die beiden Operationen in der umgekehrten Reihenfolge durchführt. Es handelt sich bei der  $SO(3)$  nämlich um eine **nichtabelsche** (oder **nichtkommutative**) Gruppe, das heißt ihre Elemente vertauschen (kommutieren) im Allgemeinen **nicht**:

$$R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta}) \stackrel{i.A.}{\neq} R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha}).$$

Konkret bedeutet das im Fall der  $SO(3)$ , dass

$$R(R(\vec{\beta})\vec{\alpha}) = R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta})^{-1}.$$

Für infinitesimales  $\vec{\alpha} = \vec{\varepsilon}$  ist diese Relation leicht zu sehen:

$$\begin{aligned} R(\vec{\beta})R(\vec{\varepsilon})R(\vec{\beta})^{-1}\vec{x} &= R(\vec{\beta})[R(\vec{\beta})^{-1}\vec{x} + \vec{\varepsilon} \times R(\vec{\beta})^{-1}\vec{x}] \\ &= \vec{x} + (R(\vec{\beta})\vec{\varepsilon}) \times \vec{x} \\ &= R(R(\vec{\beta})\vec{\varepsilon})\vec{x}. \end{aligned}$$

Im Fall eines endlichen Drehwinkels  $\vec{\alpha}$  schreiben wir

$$R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta})^{-1} = R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha}/N)^N R(\vec{\beta})^{-1} = [R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha}/N)R(\vec{\beta})^{-1}]^N.$$

Für genügend großes  $N$  können wir die für den infinitesimalen Drehwinkel  $\vec{\alpha}/N$  bereits gezeigte Formel

$$R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha}/N)R(\vec{\beta})^{-1} = R(R(\vec{\beta})\vec{\alpha}/N)$$

einsetzen und erhalten auf diese Weise das behauptete Ergebnis.

**Bemerkung:** Stimmen die durch  $\vec{\alpha}$  und  $\vec{\beta}$  beschriebenen Drehachsen überein, dann ist  $R(\vec{\beta})\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$  und die beiden Drehungen  $R(\vec{\alpha}), R(\vec{\beta})$  kommutieren in diesem Fall.

## 1.7 Eulersche Winkel

*Jedes Element der dreiparametrischen Liegruppe  $SO(3)$  lässt sich eindeutig als Produkt von drei Drehungen um drei bestimmte Standardachsen beschreiben.*

Eine andere Möglichkeit zur Parametrisierung der Elemente der  $SO(3)$  stellen die drei **Eulerschen Winkel** dar. Sei  $D \in SO(3)$  und  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  eine (rechtshändige) ONB. Ist  $D\vec{e}_3 = \vec{e}_3$ , dann handelt es sich um den bereits behandelten Fall

einer Drehung um die 3-Achse. Es sei also  $D\vec{e}_3 \neq \vec{e}_3$ . Die beiden durch den Ursprung gehenden und auf  $\vec{e}_3$ , beziehungsweise auf  $D\vec{e}_3$  normal stehenden Ebenen schneiden einander dann in einer Geraden, der sogenannten **Knotenlinie**. Wie auch bei Verwendung von Kugelkoordinaten üblich, bezeichnen wir den Winkel zwischen  $\vec{e}_3$  und  $D\vec{e}_3$  mit  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) und den Winkel zwischen  $\vec{e}_1$  und der Projektion von  $D\vec{e}_3$  auf den von  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  aufgespannten Unterraum mit  $\phi$  ( $0 \leq \phi < 2\pi$ ).

Als ersten Schritt wenden wir eine Drehung

$$R_\phi = R(\phi\vec{e}_3)$$

mit der Drehachse  $\vec{e}_3$  um den Winkel  $\phi$  an. Diese bildet die ONB  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  auf die von den Vektoren

$$\vec{e}'_j = R_\phi \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i R_{\phi,ij}, \quad j = 1, \dots, 3,$$

gebildete ONB  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  ab, wobei  $(R_{\phi,ij})$  die Matrixdarstellung von  $R_\phi$  bezüglich der ONB  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  bezeichnet. Die explizite Form dieser Transformation ist durch

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= R_\phi \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cos \phi + \vec{e}_2 \sin \phi, \\ \vec{e}'_2 &= R_\phi \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi, \\ \vec{e}'_3 &= R_\phi \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \end{aligned}$$

mit

$$(R_{\phi,ij}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Vektor  $\vec{e}'_2$  liegt in der Knotenlinie.

Im zweiten Schritt führen wir eine Drehung

$$R_\theta = R(\theta\vec{e}'_2)$$

mit der Drehachse  $\vec{e}'_2$  um den Winkel  $\theta$  durch. Die Wirkung dieser Drehung auf die gestrichene ONB  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ ,

$$\vec{e}''_j = R_\theta \vec{e}'_j = \sum_{i=1}^3 \vec{e}'_i R'_{\theta,ij}, \quad j = 1, \dots, 3,$$

ist durch

$$\begin{aligned} \vec{e}''_1 &= R_\theta \vec{e}'_1 = \vec{e}'_1 \cos \theta - \vec{e}'_3 \sin \theta, \\ \vec{e}''_2 &= R_\theta \vec{e}'_2 = \vec{e}'_2 \\ \vec{e}''_3 &= R_\theta \vec{e}'_3 = \vec{e}'_1 \sin \theta + \vec{e}'_3 \cos \theta \end{aligned}$$

gegeben. Die Matrixdarstellung  $(R'_{\theta,ij})$  der Drehung  $R_\theta$  bezüglich der **gestrichelten** Basis liest man sofort als

$$(R'_{\theta,ij}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ab.

Da  $\vec{e}_3''$  bereits mit  $D\vec{e}_3$  übereinstimmt, benötigt man als dritte Drehung nur mehr eine Rotation um  $\vec{e}_3''$  um den Winkel  $\psi$  ( $0 \leq \psi < 2\pi$ ),

$$R_\psi = R(\psi\vec{e}_3''),$$

um die Wirkung der gesamten Drehung  $D$  als Produkt

$$D = R_\psi R_\theta R_\phi = R(\psi\vec{e}_3'') R(\theta\vec{e}_2') R(\phi\vec{e}_3)$$

darzustellen. Wir betrachten also die Wirkung der Transformation  $R_\psi$  auf die Orthonormalbasis  $\{\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''\}$ ,

$$D\vec{e}_j = R_\psi \vec{e}_j'' = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i'' R''_{\psi,ij}, \quad j = 1, \dots, 3.$$

In expliziter Form hat man

$$\begin{aligned} D\vec{e}_1 &= R_\psi \vec{e}_1'' = \vec{e}_1'' \cos \psi + \vec{e}_2'' \sin \psi, \\ D\vec{e}_2 &= R_\psi \vec{e}_2'' = -\vec{e}_1'' \sin \psi + \vec{e}_2'' \cos \psi, \\ D\vec{e}_3 &= R_\psi \vec{e}_3'' = \vec{e}_3'', \end{aligned}$$

und die Matrixdarstellung  $(R''_{\psi,ij})$  von  $R_\psi$  bezüglich der ONB  $\{\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''\}$  lautet daher:

$$(R''_{\psi,ij}) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um nun die Matrixdarstellung  $(D_{ij})$  der Gesamtdrehung bezüglich der ursprünglichen ONB  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  zu erhalten, setzen wir diese aus den drei Einzeldrehungen zusammen:

$$\begin{aligned} D\vec{e}_j &= \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i D_{ij} = R_\psi \vec{e}_j'' = \sum_{n=1}^3 \vec{e}_n'' R''_{\psi,nj} \\ &= \sum_{n=1}^3 R_\theta \vec{e}_n' R''_{\psi,nj} = \sum_{m,n=1}^3 \vec{e}_m' R'_{\theta,mn} R''_{\psi,nj} \\ &= \sum_{m,n=1}^3 R_\phi \vec{e}_m R'_{\theta,mn} R''_{\psi,nj} = \sum_{i,m,n=1}^3 \vec{e}_i R_{\phi,im} R'_{\theta,mn} R''_{\psi,nj}. \end{aligned}$$

Das heißt also, dass

$$D_{ij} = (R_\psi R_\theta R_\phi)_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 R_{\phi,im} R'_{\theta,mn} R''_{\psi,nj},$$

bzw.

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie aus diesem Ergebnis ersichtlich ist, lässt sich die Drehung  $D$  auch auf eine andere Art erhalten: Man dreht zunächst um  $\vec{e}_3$  um den Winkel  $\psi$ , dann um die Drehachse  $\vec{e}_2$  (**kein** Strich!) um den Winkel  $\theta$  und schließlich wieder um  $\vec{e}_3$  um den Winkel  $\phi$ . Mit anderen Worten, es gilt die Beziehung

$$D = R(\psi \vec{e}_3'') R(\theta \vec{e}_2') R(\phi \vec{e}_3) = R(\phi \vec{e}_3) R(\theta \vec{e}_2) R(\psi \vec{e}_3).$$

Die zweite Form hat den Vorteil, dass nur um Achsen der **ursprünglichen** ONB gedreht wird.

Die hier gefundene Beziehung ist natürlich kein Zufall, sondern hat ihren tieferen Grund in der schon früher besprochenen Formel

$$R(R(\vec{\beta})\vec{\alpha}) = R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta})^{-1}.$$

Um dies zu sehen, setzen wir  $\vec{e}_2' = R(\phi \vec{e}_3)\vec{e}_2$  und

$$\begin{aligned} \vec{e}_3'' &= R(\theta \vec{e}_2')\vec{e}_3' = R(R(\phi \vec{e}_3)\theta \vec{e}_2)R(\phi \vec{e}_3)\vec{e}_3 = R(\phi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2) \underbrace{R(\phi \vec{e}_3)^{-1}R(\phi \vec{e}_3)}_{\mathbb{1}}\vec{e}_3 \\ &= R(\phi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

in  $R(\psi \vec{e}_3'')R(\theta \vec{e}_2')R(\phi \vec{e}_3)$  ein:

$$\begin{aligned} &\underbrace{R(R(\phi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2)\psi \vec{e}_3)}_{R(\psi \vec{e}_3'')} \underbrace{R(R(\phi \vec{e}_3)\theta \vec{e}_2)}_{R(\theta \vec{e}_2')} R(\phi \vec{e}_3) \\ &= R(\phi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2)R(\psi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2)^{-1} \underbrace{R(\phi \vec{e}_3)^{-1}R(\phi \vec{e}_3)}_{\mathbb{1}} R(\theta \vec{e}_2) \underbrace{R(\phi \vec{e}_3)^{-1}R(\phi \vec{e}_3)}_{\mathbb{1}} \\ &= R(\phi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2)R(\psi \vec{e}_3) \underbrace{R(\theta \vec{e}_2)^{-1}R(\theta \vec{e}_2)}_{\mathbb{1}} \\ &= R(\phi \vec{e}_3)R(\theta \vec{e}_2)R(\psi \vec{e}_3). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Die hier gewählte Konvention zur Definition der Eulerschen Winkel hat in der Quantenmechanik gewisse Vorteile. In der klassischen Mechanik wird oft eine Konvention verwendet, bei der zunächst der Vektor  $\vec{e}_1$  durch eine Rotation um  $\vec{e}_3$  in die Knotenlinie gedreht wird, anschließend wird um  $\vec{e}_1'$  gedreht und schließlich um  $\vec{e}_3''$ . Physikalische Resultate können natürlich von der Wahl einer bestimmten Konvention nicht abhängen.



# Kapitel 2

## Unitäre Vektorräume

*Die Verwendung des Grundkörpers der komplexen Zahlen besitzt eine Reihe von rechentechnischen Vorteilen. Will man etwa die Eigenwerte einer  $n \times n$ -Matrix bestimmen, so besitzt das dazugehörige charakteristische Polynom über  $\mathbb{C}$  stets  $n$  (eventuell teilweise zusammenfallende) Nullstellen, was über  $\mathbb{R}$  ja bekanntlich nicht der Fall zu sein braucht. Darüberhinaus ist die Theorie der unitären Vektorräume in der Physik von allergrößter Bedeutung, handelt es sich dabei doch um jene mathematischen Methoden, die in der Quantentheorie ihre natürliche Anwendung finden. Wir beschränken uns hier ausschließlich auf den endlichdimensionalen Fall. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die hier dargestellte Theorie ihre volle Bedeutung erst im unendlichdimensionalen Fall erlangt, wo sie im Rahmen der Funktionalanalysis in die Theorie der (unendlichdimensionalen) Hilberträume ( $\rightarrow$  Mathematische Methoden der Physik II) übergeht.*

### 2.1 Komplexes Skalarprodukt

**Definition:** Ein (endlichdimensionaler) Vektorraum  $\mathcal{U}$  über  $\mathbb{C}$  heißt **unitär** (oder endlichdimensionaler Hilbertraum), wenn  $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{U}$  ein **Skalarprodukt (inneres Produkt)**  $\langle \varphi | \psi \rangle \in \mathbb{C}$  definiert ist mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\langle \varphi | c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \rangle = c_1\langle \varphi | \psi_1 \rangle + c_2\langle \varphi | \psi_2 \rangle, \quad \forall \varphi, \psi_{1,2} \in \mathcal{U}, \quad \forall c_{1,2} \in \mathbb{C}$
2.  $\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle^*$
3.  $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0, \quad \langle \psi | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$

**Bemerkungen:**  $\langle \varphi | \psi \rangle$  ist **sesquilinear**, d.h. linear in der zweiten Variablen

und antilinear in der ersten Variablen, da

$$\begin{aligned}\langle c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid \psi \rangle &= \langle \psi \mid c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \rangle^* \\ &= c_1^* \langle \psi \mid \varphi_1 \rangle^* + c_2^* \langle \psi \mid \varphi_2 \rangle^* \\ &= c_1^* \langle \varphi_1 \mid \psi \rangle + c_2^* \langle \varphi_2 \mid \psi \rangle.\end{aligned}$$

Wir verwenden hier die in der physikalischen Literatur üblichen Konventionen. In der mathematischen Literatur ist das innere Produkt oft in der ersten Variablen linear und in der zweiten antilinear. Weiters findet man dort häufig die Schreibweise  $\bar{z}$  statt  $z^*$  für die zur komplexen Zahl  $z = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) konjugiert komplexe Zahl  $z^* = a - ib$ .

**Beispiele** für unitäre Vektorräume:

1.  $U^n = \mathbb{C}^n$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^* y_k.$$

2. Der Vektorraum, der auf  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  definierten komplexen Polynome vom Grad  $\leq n$ ,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad x \in [a, b]$$

mit dem inneren Produkt

$$\langle p \mid q \rangle = \int_a^b dx p(x)^* q(x).$$

3. Der Vektorraum der komplexwertigen Funktionen der Form

$$\psi(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x}, \quad c_n \in \mathbb{C},$$

auf dem Intervall  $[0, 1]$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_0^1 dx \varphi(x)^* \psi(x).$$

4. Der Vektorraum der komplexwertigen Funktionen der Form

$$\varphi(x) = e^{-x^2/2} p(x)$$

auf  $\mathbb{R}$ , wobei  $p(x)$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$  ist, mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x)^* \psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} p(x)^* q(x), \end{aligned}$$

wobei  $\psi(x) = e^{-x^2/2} q(x)$ .

**Norm, Einheitsvektor und Orthogonalität** zweier Vektoren und ONB (VONS) werden wie im Fall des euklidischen Vektorraumes definiert. Auch den Beweis der **Cauchy-Schwarzschen Ungleichung**

$$|\langle \varphi | \psi \rangle| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

kann man praktisch ungeändert übernehmen, man muss nur  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  ( $|\varepsilon| = 1$ ) so wählen, dass

$$\varepsilon \langle \varphi | \psi \rangle = |\langle \varphi | \psi \rangle| \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^* \langle \varphi | \psi \rangle^* = |\langle \varphi | \psi \rangle|.$$

Aufpassen muss man nur dort, wo die Sesquilinearität stärker in Erscheinung tritt, wie z.B. bei der komplexen Form der **Polarisierungsidentität**:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \|\varphi + i^k \psi\|^2$$

**Bemerkung:** Die Funktionen  $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$  ( $-N \leq n \leq N$ ) bilden eine ONB des in Beispiel 3 angegebenen unitären Vektorraumes. Aus diesem Grund lassen sich die Entwicklungskoeffizienten  $c_n$  in der Form

$$c_n = \langle e_n | \psi \rangle = \int_0^1 dx e^{-2\pi i n x} \psi(x)$$

schreiben. Im (formalen) Limes  $N \rightarrow \infty$  erhält man die **Fourierreihe**

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Im Sinn welches Konvergenzbegriffes sich welche Funktionen  $\psi(x)$  durch diese Formel approximieren lassen, wird in den Mathematischen Methoden der Physik II besprochen.

## 2.2 Adjungierte Abbildung

Die Rolle der transponierten Matrix  $A^T$  wird im komplexen Fall durch die **adjungierte Matrix**  $A^\dagger = (A^T)^*$  übernommen. Die Operation  $A \in L(U^n, U^m) \rightarrow A^\dagger \in L(U^m, U^n)$  besitzt die folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}(c_1 A_1 + c_2 A_2)^\dagger &= c_1^* A_1^\dagger + c_2^* A_2^\dagger, & c_{1,2} \in \mathbb{C} \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, & A^{\dagger\dagger} = A\end{aligned}$$

Fasst man im Raum  $U^n$  ein Element

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

als  $n \times 1$ -Matrix auf, dann ist

$$x^\dagger = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

und das Skalarprodukt kann in Matrixnotation

$$\langle x | y \rangle = x^\dagger y$$

geschrieben werden. Die Abbildung  $x \mapsto x^\dagger$  stellt eine „Identifizierung“ des  $U^n$  mit seinem Dualraum  $\tilde{U}^n$  dar, allerdings ist diese „Identifizierung“ nicht linear:

$$(c_1 x_1 + c_2 x_2)^\dagger = c_1^* x_1^\dagger + c_2^* x_2^\dagger$$

Das Konzept der adjungierten Abbildung kann nun leicht auf den allgemeinen Fall eines beliebigen unitären Raumes  $\mathcal{U}$  erweitert werden. Da wir ein Skalarprodukt zur Verfügung haben, können wir  $\mathcal{U}$  mit seinem Dualraum  $\tilde{\mathcal{U}}$  auf kanonische Weise „identifizieren“. Dazu ordnen wir jedem  $\varphi \in \mathcal{U}$  das Funktional  $\varphi^\dagger \in \tilde{\mathcal{U}}$  zu, welches durch

$$\varphi^\dagger \psi = \langle \varphi | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{U}$$

definiert ist. Diese Abbildung führt linear unabhängige Vektoren wieder in linear unabhängige Vektoren über und ist injektiv. Da die Dimension von  $\mathcal{U}$  mit der seines Dualraums übereinstimmt, ist sie auch surjektiv. Die inverse Abbildung bezeichnen wir ebenfalls mit  $\dagger$ , sodass  $\varphi^{\dagger\dagger} = \varphi$  gilt.

Seien  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  unitäre Vektorräume und  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  eine lineare Abbildung. Die zu  $A$  **adjungierte Abbildung**  $A^\dagger : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  ist durch

$$\langle A^\dagger \varphi | \psi \rangle_{\mathcal{U}} = \langle \varphi | A\psi \rangle_{\mathcal{V}} \quad \forall \psi \in \mathcal{U}, \forall \varphi \in \mathcal{V}$$

definiert. Diese Definition ist äquivalent mit

$$A^\dagger \varphi = (\varphi^\dagger A)^\dagger \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Die so definierte Abbildung ist wohldefiniert und linear, da

$$\begin{aligned} A^\dagger(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) &= ((c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)^\dagger A)^\dagger \\ &= ((c_1^*\varphi_1^\dagger + c_2^*\varphi_2^\dagger)A)^\dagger \\ &= c_1(\varphi_1^\dagger A)^\dagger + c_2(\varphi_2^\dagger A)^\dagger \\ &= c_1A^\dagger\varphi_1 + c_2A^\dagger\varphi_2 \quad \varphi_{1,2} \in \mathcal{V}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

**Eigenschaften** der adjungierten Abbildung:

1.  $(c_1A_1 + c_2A_2)^\dagger = c_1^*A_1^\dagger + c_2^*A_2^\dagger, \quad c_{1,2} \in \mathbb{C}, \quad A_{1,2} \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}).$
2.  $A^{\dagger\dagger} = A, \quad A \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}).$
3.  $(BA)^\dagger = A^\dagger B^\dagger, \quad A \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad B \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}).$

## 2.3 Orthonormalbasis

Bezüglich einer ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  eines  $n$ -dimensionalen unitären Vektorraumes  $\mathcal{U}$  lässt sich jedes  $\psi \in \mathcal{U}$  in der Form

$$\psi = \sum_{k=1}^n \varphi_k c_k$$

schreiben, wobei die Entwicklungskoeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  eindeutig durch

$$c_k = \langle \varphi_k | \psi \rangle = \varphi_k^\dagger \psi$$

gegeben sind. Das heißt, dass

$$\psi = \sum_{k=1}^n \varphi_k \varphi_k^\dagger \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{U},$$

und man erhält somit die **Vollständigkeitsrelation** für den Fall eines unitären Vektorraumes:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k \varphi_k^\dagger = \mathbf{1}$$

Das bedeutet, dass eine Menge von  $n$  Vektoren  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  in einem  $n$ -dimensionalen unitären Vektorraum  $\mathcal{U}$  genau dann eine ONB von  $\mathcal{U}$  ist, falls die Bedingungen

$$\langle \varphi_k | \varphi_l \rangle = \delta_{kl}, \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k \varphi_k^\dagger = \mathbf{1}$$

erfüllt sind.

**Beispiel:** Verifizieren Sie die oben angegebenen Eigenschaften für die folgende ONB von  $U^2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Formeln des **Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens**, die wir für euklidische Vektorräume bereits hergeleitet haben, können für den Fall eines unitären Vektorraumes direkt übernommen werden. Man muss nur  $(|)$  durch  $\langle | \rangle$  ersetzen und beachten, dass es jetzt auf die Reihenfolge der Variablen im Skalarprodukt ankommt.

Ebenso zeigt man, dass jeder  $n$ -dimensionale unitäre Vektorraum **isomorph** zu  $U^n$  ist. Auch für die **Matrizelemente** eines linearen Operators  $\in L(\mathcal{U})$  **bezüglich einer ONB**  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  von  $\mathcal{U}$  erhält man analog zu früher

$$A_{kl} = \langle \varphi_k | A \varphi_l \rangle = \varphi_k^\dagger A \varphi_l.$$

Für die Matrizelemente des zu  $A \in L(\mathcal{U})$  adjungierten Operators  $A^\dagger \in L(\mathcal{U})$  erhält man daher **bezüglich einer ONB**

$$(A^\dagger)_{kl} = \langle \varphi_k | A^\dagger \varphi_l \rangle = \langle A \varphi_k | \varphi_l \rangle = \langle \varphi_l | A \varphi_k \rangle^* = A_{lk}^*.$$

**Bemerkung:** In der Physik wird oft die sogenannte **Diracschreibweise** verwendet. Statt  $\psi \in \mathcal{U}$  schreibt man dann  $|\psi\rangle \in \mathcal{U}$  (**ket**-Vektor) und für ein Element des Dualraums  $\psi^\dagger \in \tilde{\mathcal{U}}$  verwendet man die Notation  $\langle \psi |$  (**bra**-Vektor). Die etwas seltsame Sprechweise kommt von dem englischen Wort **bracket** = Klammer =  $\langle | \rangle$ . In der Diracschreibweise schreibt man z.B. die Vollständigkeitsrelation als

$$\sum_{k=1}^n |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = \mathbf{1},$$

oder oft in der Form

$$\sum_{k=1}^n |k\rangle \langle k| = \mathbf{1},$$

wobei  $|k\rangle$  kurz für den Vektor  $|\varphi_k\rangle$  der gewählten ONB steht. Einige weitere Beispiele mit „Übersetzung“ :

$$|\varphi\rangle \langle \psi| = \varphi \psi^\dagger$$

$$\begin{aligned}
|k\rangle\langle l| &= |\varphi_k\rangle\langle\varphi_l| = \varphi_k\varphi_l^\dagger \\
\langle k|l\rangle &= \langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \varphi_k^\dagger\varphi_l \\
\langle k|A|l\rangle &= \langle\varphi_k|A|\varphi_l\rangle = \langle\varphi_k|A\varphi_l\rangle = A_{kl}
\end{aligned}$$

## 2.4 Projektionsoperatoren

Sei  $\mathcal{M}$  ein Teilraum eines unitären Vektorraumes  $\mathcal{U}$ . Dann bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}^\perp$  das **orthogonale Komplement** von  $\mathcal{M}$ , welches aus allen Elementen  $\psi \in \mathcal{U}$  mit  $\langle\varphi|\psi\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}$  besteht. Dann ist  $\mathcal{M}^\perp$  wieder ein Teilraum von  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ , denn

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2} \in \mathcal{M}^\perp &\Rightarrow \langle\varphi|c_1\psi_1 + c_2\psi_2\rangle = c_1\langle\varphi|\psi_1\rangle + c_2\langle\varphi|\psi_2\rangle = 0 \\
&\Rightarrow c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \in \mathcal{M}^\perp, \\
\psi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp &\Rightarrow \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{\in\mathcal{M}} \underbrace{= 0}_{\in\mathcal{M}^\perp} \Rightarrow \psi = 0.
\end{aligned}$$

Mit dem Skalarprodukt von  $\mathcal{U}$  ist  $\mathcal{M}$  selbst ein unitärer Raum. Daher besitzt  $\mathcal{M}$  eine ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ . Für jeden Vektor  $\psi \in \mathcal{U}$  sei

$$\psi_{\mathcal{M}} = \sum_{k=1}^m \varphi_k \langle\varphi_k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger \psi$$

Dann ist  $\psi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$  und  $\psi - \psi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}^\perp$ , weil

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_k|\psi - \psi_{\mathcal{M}}\rangle &= \langle\varphi_k|\psi\rangle - \langle\varphi_k|\psi_{\mathcal{M}}\rangle \\
&= \langle\varphi_k|\psi\rangle - \langle\varphi_k|\sum_{l=1}^m \varphi_l \langle\varphi_l|\psi\rangle\rangle \\
&= \langle\varphi_k|\psi\rangle - \sum_{l=1}^m \langle\varphi_l|\psi\rangle \underbrace{\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle}_{\delta_{kl}} \\
&= \langle\varphi_k|\psi\rangle - \langle\varphi_k|\psi\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \psi = \psi_{\mathcal{M}} + (\psi - \psi_{\mathcal{M}})$  mit  $\psi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$  und  $\psi - \psi_{\mathcal{M}} = \psi_{\mathcal{M}^\perp} \in \mathcal{M}^\perp$ . Diese Darstellung ist eindeutig, weil  $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$  ist, d.h.  $\mathcal{U} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$  und  $\dim \mathcal{M}^\perp = \dim \mathcal{U} - \dim \mathcal{M}$ . Weiters ist  $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$  für jeden Teilraum  $\mathcal{M}$ . Man bezeichnet  $\psi_{\mathcal{M}}$  als die **orthogonale Projektion** von  $\psi$  auf den Teilraum  $\mathcal{M}$ .

Aus der Gleichung

$$\psi_{\mathcal{M}} = \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger \psi$$

sieht man, dass der Operator

$$P_{\mathcal{M}} = \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^m |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| \in L(\mathcal{U}) \quad (m \leq \dim \mathcal{U})$$

die Projektion  $\psi \rightarrow \psi_{\mathcal{M}}$  auf den  $m$ -dimensionalen Teilraum  $\mathcal{M}$  bewerkstelligt, wobei  $P_{\mathcal{M}}\mathcal{M}^\perp = 0$ .  $P_{\mathcal{M}}$  heißt daher (**orthogonaler**) **Projektionsoperator** oder (**orthogonaler**) **Projektor** auf  $\mathcal{M}$ .  $P_{\mathcal{M}}$  ist natürlich von der Wahl der ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  in  $\mathcal{M}$  unabhängig.

Eigenschaften von  $P_{\mathcal{M}}$ :

1.  $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$  (**idempotent**) wegen  $P_{\mathcal{M}}\psi = \psi_{\mathcal{M}}$ ,  $P_{\mathcal{M}}\psi_{\mathcal{M}} = \psi_{\mathcal{M}}$ .

Anderer Beweis:

$$P_{\mathcal{M}}^2 = \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger \sum_{l=1}^m \varphi_l \varphi_l^\dagger = \sum_{k,l=1}^m \varphi_k \underbrace{\varphi_k^\dagger \varphi_l}_{\delta_{kl}} \varphi_l^\dagger = \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger = P_{\mathcal{M}}$$

2.  $P_{\mathcal{M}}^\dagger = P_{\mathcal{M}}$  (einen Operator mit dieser Eigenschaft nennt man **hermitesch** oder **selbstadjungiert**).

$$P_{\mathcal{M}}^\dagger = \left( \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger \right)^\dagger = \sum_{k=1}^m \left( \varphi_k \varphi_k^\dagger \right)^\dagger = \sum_{k=1}^m \varphi_k^{\dagger\dagger} \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^\dagger = P_{\mathcal{M}}$$

Umgekehrt definiert jeder Operator  $P \in L(\mathcal{U})$ , der die Eigenschaften  $P^2 = P$  und  $P^\dagger = P$  erfüllt, durch sein Bild  $\mathcal{M} = P\mathcal{U}$  einen linearen Teilraum, wobei  $P\mathcal{M}^\perp = 0$ , da

$$\langle \chi | P\psi \rangle = \langle P^\dagger \chi | \psi \rangle = \underbrace{\langle P\chi | \psi \rangle}_{\in \mathcal{M}} = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{M}^\perp, \quad \forall \chi \in \mathcal{U}$$

wobei  $P^\dagger = P$  verwendet wurde.

**Bemerkung:**  $P_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbf{1} - P_{\mathcal{M}}$ ,  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{M}^\perp} = 0$ .

$P_{\mathcal{M}}$  besitzt die Eigenwerte 0 (falls  $\dim \mathcal{M} < \dim \mathcal{U} = n$ ) und 1, da  $P_{\mathcal{M}}\varphi = \varphi$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{M}$  und  $P_{\mathcal{M}}\psi = 0$   $\forall \psi \in \mathcal{M}^\perp$  und  $\mathcal{U} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ . Man kann die ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  von  $\mathcal{M}$  (die aus  $n$  linear unabhängigen Eigenvektoren von  $P_{\mathcal{M}}$  zum Eigenwert 1 besteht) durch die Hinzunahme einer beliebigen ONB  $\{\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n\}$  von  $\mathcal{M}^\perp$  (die aus  $n - m$  linear unabhängigen Eigenvektoren von  $P_{\mathcal{M}}$  zum Eigenwert 0 besteht) zu einem VONS  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n\}$  des ganzen Raumes  $\mathcal{U} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$  ergänzen.



## 2.5 Hermitesche Operatoren

**Definition:** Ein Operator  $A \in L(\mathcal{U})$  ( $\mathcal{U}$  ist ein unitärer Vektorraum) heißt **hermitesch** oder **selbstadjungiert**, wenn  $A^\dagger = A$  ist.

Die Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell: Sei  $\psi \in \mathcal{U}$  ein Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $a$  ( $A\psi = a\psi$ ). Dann ist

$$\langle \psi | A\psi \rangle = \langle \psi | a\psi \rangle = a\langle \psi | \psi \rangle.$$

Andererseits ist wegen  $A^\dagger = A$

$$\langle \psi | A\psi \rangle = \langle A^\dagger \psi | \psi \rangle = \langle A\psi | \psi \rangle = \langle a\psi | \psi \rangle = a^* \langle \psi | \psi \rangle,$$

und somit

$$(a - a^*)\langle \psi | \psi \rangle = 0.$$

Da  $\psi$  als Eigenvektor nicht der Nullvektor sein kann, ist auch  $\langle \psi | \psi \rangle \neq 0$ , woraus  $a = a^* \in \mathbb{R}$  folgt.

**Bemerkung:** Die Umkehrung gilt nicht, das heißt ein Operator, der nur reelle Eigenwerte besitzt, ist nicht notwendigerweise hermitesch. Gegenbeispiel im  $U^2$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jedoch hat  $A$  den (einfach entarteten) Eigenwert 1.

**Beispiele** für hermitesche Operatoren:

1. Die allgemeine Form einer hermiteschen Matrix im  $U^2$  ist

$$A = \begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Überzeugen Sie sich, dass die Eigenwerte von  $A$  tatsächlich reell sind.

2. Mit den orthogonalen Projektoren ( $P^2 = P, P^\dagger = P$ ) haben wir bereits Spezialfälle von hermiteschen Operatoren kennengelernt. Man kann auch sagen, dass die Projektionsoperatoren genau jene hermiteschen Elemente aus  $L(\mathcal{U})$  sind, deren Eigenwerte 0 oder 1 sind.
3. In einem unitären Vektorraum  $\mathcal{U}$  mögen die Vektoren  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ein VONS von  $\mathcal{U}$  bilden. Dann ist

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n a_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

ein hermitescher Operator. Die reellen Zahlen  $a_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) sind Eigenwerte von  $A$  und die ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  besteht aus Eigenvektoren von  $A$ . Wir werden später sehen, dass sich jeder hermitesche Operator in der oben angegebenen Form (**Spektraldarstellung**) schreiben lässt.

## 2.6 Unitäre Operatoren

**Definition:** Ein Operator  $U \in L(\mathcal{U})$  ( $\mathcal{U}$  ein unitärer Vektorraum) heißt unitär, falls  $U$  invertierbar ist mit  $U^{-1} = U^\dagger$  (d.h.  $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}$ ).

**Bemerkung:** Es handelt sich bei einer unitären Transformation offensichtlich um die Verallgemeinerung des bei den euklidischen Vektorräumen besprochenen Konzepts der orthogonalen Transformation.

**Satz:** Sei  $U \in L(\mathcal{U})$  ( $\mathcal{U}$  ein unitärer Vektorraum). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $U$  ist unitär.
2.  $\langle U\varphi | U\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{U}$ .
3.  $\|U\psi\| = \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{U}$ .
4.  $U$  bildet jede ONB von  $\mathcal{U}$  wieder auf eine ONB von  $\mathcal{U}$  ab.

**Bemerkung:** Der Beweis verläuft analog zum euklidischen Fall, man muss jetzt aber die komplexe Version der Polarisierungsidentität verwenden.

Sind  $U_1, U_2 \in L(\mathcal{U})$  zwei unitäre Operatoren, dann ist auch das Produkt  $U_1 U_2$  ein unitärer Operator, da

$$(U_1 U_2)^{-1} = U_2^{-1} U_1^{-1} = U_2^\dagger U_1^\dagger = (U_1 U_2)^\dagger$$

Die Eigenwerte eines unitären Operators haben den Betrag eins, da

$$\begin{aligned} U\psi &= u\psi \quad (\psi \neq 0, u \in \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \\ \langle \psi | \psi \rangle &= \langle U\psi | U\psi \rangle = \langle u\psi | u\psi \rangle = |u|^2 \underbrace{\langle \psi | \psi \rangle}_{\neq 0} \quad \Rightarrow \quad |u| = 1 \\ \Rightarrow \quad u &= e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das heißt, das Spektrum (die Menge der Eigenwerte) eines unitären Operators ist eine Teilmenge des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene.

**Beispiele** von unitären Abbildungen:

1. Sei  $U$  eine unitäre Matrix auf  $U^n$ . Dann wird die Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  (VONS von  $U^n$ ) in ein anderes VONS von  $U^n$   $\{Ue_1, \dots, Ue_n\} = \{f_1, \dots, f_n\}$  übergeführt. Wegen  $\sum_{k=1}^n f_k f_k^\dagger = \mathbf{1}$  kann man schreiben:

$$U = U\mathbf{1} = U \sum_{k=1}^n e_k e_k^\dagger = \sum_{k=1}^n \underbrace{Ue_k}_{f_k} e_k^\dagger = \sum_{k=1}^n f_k e_k^\dagger = (f_1, \dots, f_n),$$

d.h. die Spalten einer unitären Matrix bilden ein VONS.

2. Die allgemeine Form einer unitären  $2 \times 2$  Matrix ist daher:

$$U = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} e^{i\alpha}, \quad a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Die Vektoren  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  mögen ein VONS eines unitären Vektorraums bilden. Dann ist

$$U = \sum_{k=1}^n e^{i\alpha_k} \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n e^{i\alpha_k} |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|, \quad \alpha_k \in \mathbb{R},$$

ein unitärer Operator. Die komplexe Zahl  $e^{i\alpha_k}$  ist ein Eigenwert von  $U$  mit dazugehörigem Eigenvektor  $\varphi_k$ . Wieder kann man zeigen, dass sich jeder unitäre Operator in der obigen Form schreiben lässt.

## 2.7 Normale Operatoren

**Definition:** Ein Operator  $A \in L(\mathcal{U})$  ( $\mathcal{U}$  ein unitärer Vektorraum) heißt **normal**, falls  $AA^\dagger = A^\dagger A$ .

**Bemerkung:** Definiert man den **Kommutator** zweier Operatoren  $A, B \in L(\mathcal{U})$  durch  $[A, B] = AB - BA$ , so ist die Eigenschaft, dass bei einem normalen Operator  $A$  und  $A^\dagger$  vertauschen, gleichbedeutend mit  $[A, A^\dagger] = 0$ .

**Beispiele** für normale Operatoren:

1. Hermitesche und unitäre Operatoren sind normal.
2. Sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ein VONS eines unitären Vektorraumes  $\mathcal{U}$ . Dann ist

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n a_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

ein normaler Operator. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass sich jeder normale Operator in dieser Form schreiben lässt. Das ist die Aussage des **Spektralsatzes für normale Operatoren**. Dieser behauptet nämlich, dass die normalen Operatoren genau diejenigen sind, die eine ONB von Eigenvektoren besitzen.

**Bemerkungen:**

1. Im Raum  $U^2$  ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**nicht** normal ( $AA^\dagger \neq A^\dagger A$ ). Diese Matrix hat nur **einen** Eigenvektor!

2. Für jedes  $A \in L(\mathcal{U})$  sind  $A^\dagger A$  und  $AA^\dagger$  hermitesch.
3. Für jedes  $A \in L(\mathcal{U})$  sind

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^\dagger)$$

hermitesche Operatoren und es gilt

$$A = A_1 + iA_2$$

Der Operator  $A$  ist genau dann normal, wenn  $[A_1, A_2] = 0$  gilt. Daraus ergibt sich, dass man normale Operatoren in gewisser Hinsicht als Verallgemeinerung der komplexen Zahlen interpretieren kann, wobei die hermiteschen Operatoren den reellen Zahlen entsprechen. Die unitären Operatoren ( $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ ) stellen das Analogon zu einer komplexen Zahl  $z$  mit  $z^*z = 1$ , d.h.  $|z| = 1$ , dar.

## 2.8 Spektralsatz für normale Operatoren

*Normale Operatoren lassen sich dadurch charakterisieren, dass sie ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren besitzen. Die Spektraldarstellung normaler Operatoren ist eine unmittelbare Folgerung aus dieser Eigenschaft. Diese wird in den verschiedensten physikalischen Anwendungen benötigt.*

**Spektralsatz für normale Operatoren:** Jeder normale Operator in einem unitären Vektorraum besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren.

**Beweis:** Sei  $A \in L(\mathcal{U})$  ein normaler Operator ( $[A, A^\dagger] = 0$ ) in einem  $n$ -dimensionalen unitären Vektorraum  $\mathcal{U}$ . Dann besitzt das charakteristische Polynom von  $A$ ,

$$p_A(a) = \det(a\mathbf{1} - A),$$

mindestens eine Nullstelle  $a_1 \in \mathbb{C}$ . Die Eigenwertgleichung

$$A\varphi = a_1\varphi$$

besitzt daher eine nichttriviale Lösung  $\varphi_1 \neq 0$ , wobei man  $\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = 1$  wählen kann. Da  $A$  normal ist, ist  $\varphi_1$  auch Eigenvektor des adjungierten Operators  $A^\dagger$  zum Eigenwert  $a_1^*$ :

$$A^\dagger \varphi_1 = a_1^* \varphi_1.$$

Das kann man folgendermaßen sehen:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (A - a_1)\varphi_1 | (A - a_1)\varphi_1 \rangle \\ &= \langle \varphi_1 | (A - a_1)^\dagger (A - a_1)\varphi_1 \rangle \\ &= \langle \varphi_1 | (A - a_1)(A - a_1)^\dagger \varphi_1 \rangle \\ &= \langle (A - a_1)^\dagger \varphi_1 | (A - a_1)^\dagger \varphi_1 \rangle \\ &= \langle (A^\dagger - a_1^*)\varphi_1 | (A^\dagger - a_1^*)\varphi_1 \rangle \\ &\Rightarrow A^\dagger \varphi_1 = a_1^* \varphi_1 \end{aligned}$$

Man betrachtet nun den  $(n-1)$ -dimensionalen Teilraum

$$\mathcal{N} = [\varphi_1]^\perp = \{\psi \in \mathcal{U} \mid \langle \varphi_1 | \psi \rangle = 0\}.$$

Die Anwendung von  $A$  bzw.  $A^\dagger$  auf Elemente von  $\mathcal{N}$  führt aus diesem Teilraum nicht heraus, denn für  $\psi \in \mathcal{N}$  gilt

$$\langle \varphi_1 | A\psi \rangle = \langle A^\dagger \varphi_1 | \psi \rangle = \langle a_1^* \varphi_1 | \psi \rangle = a_1 \langle \varphi_1 | \psi \rangle = 0$$

und

$$\langle \varphi_1 | A^\dagger \psi \rangle = \langle A\varphi_1 | \psi \rangle = \langle a_1 \varphi_1 | \psi \rangle = a_1^* \langle \varphi_1 | \psi \rangle = 0.$$

Man kann daher  $A$  als Operator auf  $\mathcal{N}$  auffassen, der natürlich auch normal ist. Man wiederholt nun das Verfahren von vorhin und erhält ein  $\varphi_2 \in \mathcal{N}$  (d.h.  $\langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle = 0$ ),  $\|\varphi_2\| = 1$ , mit  $A\varphi_2 = a_2\varphi_2$ . Die weitere Fortsetzung dieser Prozedur liefert nach insgesamt  $n$  Schritten ein VONS  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  von Eigenvektoren von  $A$ :  $A\varphi_k = a_k\varphi_k$ .

Zur **Spektraldarstellung** eines normalen Operators,

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n a_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|,$$

gelangt man nun einfach durch die Verwendung der Vollständigkeitsrelation für die ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ :

$$A = A\mathbf{1} = A \sum_{k=1}^n \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n A\varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \varphi_k^\dagger$$

**Bemerkung:** Sei  $A \in L(U^n)$  eine normale  $n \times n$ -Matrix. Dann gibt es ein VONS  $\{f_1, \dots, f_n\}$  von Eigenvektoren von  $A$ :

$$f_k^\dagger f_l = \delta_{kl}, \quad \sum_{k=1}^n f_k f_k^\dagger = \mathbf{1}, \quad A f_k = a_k f_k.$$

$$A = \sum_{k=1}^n f_k a_k f_k^\dagger = \underbrace{(f_1, \dots, f_n)}_U \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}}_{\hat{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} f_1^\dagger \\ \vdots \\ f_n^\dagger \end{pmatrix}}_{U^\dagger}$$

Die Matrizen

$$U = \sum_{k=1}^n f_k e_k^\dagger = (f_1, \dots, f_n)$$

und

$$U^\dagger = \sum_{k=1}^n e_k f_k^\dagger = \begin{pmatrix} f_1^\dagger \\ \vdots \\ f_n^\dagger \end{pmatrix}$$

sind unitär ( $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ ). Der Spektralsatz besagt also, dass man jede normale  $n \times n$ -Matrix in der Form

$$A = U \hat{A} U^\dagger$$

schreiben kann, wobei  $U$  unitär ist und  $\hat{A}$  die aus den Eigenwerten  $a_1, \dots, a_n$  gebildete **Diagonalmatrix**  $\hat{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  ist. Multipliziert man die obige Gleichung von links mit  $U^\dagger$  und von rechts mit  $U$ , so erhält man

$$U^\dagger A U = \hat{A}$$

d.h. eine  $n \times n$ -Matrix lässt sich genau dann durch eine unitäre Transformation auf Diagonalgestalt bringen, wenn sie normal ist. An dieser Stelle sei an den allgemeinen Fall einer diagonalisierbaren  $n \times n$ -Matrix erinnert, bei der eine Basis  $\{f_1, \dots, f_n\}$  von Eigenvektoren  $A f_k = a_k f_k$  existiert. Bildet man die Matrix  $S = (f_1, \dots, f_n)$ , so ist  $S^{-1} A S = \hat{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  die gewünschte Diagonalisierung. In unserem Fall einer normalen Matrix haben wir also den Spezialfall, dass die Eigenvektoren eine ONB bilden und  $S$  daher unitär ist ( $S^{-1} = S^\dagger$ ).

**Kochrezept** für das Diagonalisieren einer normalen  $n \times n$ -Matrix  $A$  (d.h. einer Matrix mit  $[A, A^\dagger] = 0$ ):

1. Man berechne das **charakteristische Polynom** von  $A$ :

$$p_A(a) = \det(a\mathbf{1} - A)$$

- Man berechne die **Eigenwerte** von  $A$ , indem man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt. Es kann natürlich vorkommen, dass manche der Eigenwerte entartet sind.
- Man ermittle die dazugehörigen **Eigenvektoren**  $f_k$  aus der **Eigenwertgleichung**

$$Af_k = a_k f_k$$

und normiere sie ( $\|f_k\| = 1$ ). Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ( $a_k \neq a_l$ ) sind automatisch orthogonal, denn

$$\begin{aligned} f_k^\dagger A f_l &= a_l f_k^\dagger f_l = (A^\dagger f_k)^\dagger f_l = a_k f_k^\dagger f_l \\ \Rightarrow \underbrace{(a_k - a_l)}_{\neq 0} f_k^\dagger f_l &= 0 \quad \Rightarrow \quad f_k^\dagger f_l = 0. \end{aligned}$$

Ist ein Eigenwert  $d$ -fach entartet, so gibt es  $d$  linear unabhängige Eigenvektoren (d.h. der Eigenraum dieses Eigenwertes ist  $d$ -dimensional). Diese Eigenvektoren können aber stets orthonormal **gewählt** werden. Auf diese Weise erhält man ein VONS  $\{f_1, \dots, f_n\}$  von  $U^n$ .

- Man bilde die unitäre Matrix  $U = (f_1, \dots, f_n)$  mit den Eigenvektoren als Spalten  $\Rightarrow U^\dagger A U = \hat{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ .

### Beispiele:

- Die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ist in  $U^2$  unitär, ihre Eigenwerte sind  $e^{\pm i\theta}$ , die dazugehörigen normierten Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (\text{zum Eigenwert } e^{+i\theta}), \\ f_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (\text{zum Eigenwert } e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

somit ist

$$U = (f_1, f_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

und

$$U^\dagger R U = \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}).$$

2. Die  $3 \times 3$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ist hermitesch, die Eigenwerte müssen daher reell sein. Für das charakteristische Polynom erhält man  $p_A(a) = a(a^2 - 9)$  und somit die Eigenwerte

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -3.$$

Die Eigenwertgleichungen  $Af_1 = 0$ ,  $Af_2 = 3f_2$ ,  $Af_3 = -3f_3$  ergeben die (normierten) Lösungen

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Man überprüft leicht, dass  $\{f_1, f_2, f_3\}$  tatsächlich eine ONB von  $U^3$  ist. Ebenso kann man als Probe die Spektraldarstellung

$$A = \sum_{k=1}^3 a_k f_k f_k^\dagger = 3 \left( f_2 f_2^\dagger - f_3 f_3^\dagger \right)$$

„überprüfen“. Für die unitäre Matrix  $U = (f_1, f_2, f_3)$ , welche die Diagonalisierung von  $A$  in der Form  $U^\dagger A U = \text{diag}(0, 3, -3)$  bewerkstelligt, erhält man daher

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:** Wir haben die Spektraldarstellung eines normalen Operators  $A$  in einem  $n$ -dimensionalen unitären Raum so formuliert, dass wir  $A$  als Linearkombination von **eindimensionalen** Projektionsoperatoren  $|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$  geschrieben haben,

$$A = \sum_{k=1}^n a_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|.$$

Wenn es entartete Eigenwerte gibt, dann sind einige der  $a_k$  **gleich** und es ist möglich die entsprechenden Terme zusammenzufassen. Dazu ändern wir unsere Notation etwas ab:  $\{a_\alpha\}_{\alpha=1}^m$  sei das Spektrum von  $A$  (d.h.  $a_\alpha \neq a_\beta$  für  $\alpha \neq \beta$ ).  $a_1, \dots, a_m$  bezeichnen also jetzt die  $m \leq n$  **verschiedenen** Eigenwerte von  $A$  mit dazugehörigen Eigenräumen  $\mathcal{M}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ), die paarweise aufeinander orthogonal stehen:

$$\mathcal{M}_\alpha \perp \mathcal{M}_\beta \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta, \quad \mathcal{U} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_m.$$



Durch eine geeignete Umbenennung der Vektoren der ONB  $\{|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$  in

$$\{|\alpha, r\rangle\} \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, d_\alpha = \dim \mathcal{M}_\alpha$$

kann man die Projektoren auf die Eigenräume  $\mathcal{M}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) in der Form

$$P_{\mathcal{M}_\alpha} = \sum_{r=1}^{d_\alpha} |\alpha, r\rangle\langle\alpha, r|$$

schreiben. Die Tatsache, dass die  $P_{\mathcal{M}_\alpha}$  orthogonale Projektionsoperatoren auf die paarweise orthogonal stehenden Teilräume  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m$  sind, drückt sich durch die Relationen

$$P_{\mathcal{M}_\alpha} P_{\mathcal{M}_\beta} = \delta_{\alpha\beta} P_{\mathcal{M}_\alpha}, \quad P_{\mathcal{M}_\alpha}^\dagger = P_{\mathcal{M}_\alpha}$$

aus. Zusammen mit der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\alpha=1}^m P_{\mathcal{M}_\alpha} = \mathbf{1}$$

gelangen wir schließlich zur gewünschten alternativen Formulierung der Spektraldarstellung von  $A$ :

$$A = \sum_{\alpha=1}^m a_\alpha P_{\mathcal{M}_\alpha}.$$

## 2.9 Gleichzeitige Diagonalisierbarkeit

*Das folgende Kriterium für die gleichzeitige Diagonalisierbarkeit normaler Operatoren wird vor allem in der Quantenmechanik oft benötigt.*

**Satz:**  $A, B \in L(\mathcal{U})$  seien normale Operatoren, die miteinander **vertauschen** ( $[A, B] = 0$ ). Dann gibt es eine **gemeinsame** ONB von Eigenvektoren für beide Operatoren.

**Beweis:** Seien  $a_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) die verschiedenen Eigenwerte von  $A$  und  $\mathcal{M}_\alpha$  die entsprechenden Eigenräume.  $\psi \in \mathcal{M}_\alpha \Rightarrow B\psi \in \mathcal{M}_\alpha$ , denn

$$AB\psi = BA\psi = Ba_\alpha\psi = a_\alpha B\psi$$

$\Rightarrow B|_{\mathcal{M}_\alpha}$  ist ein normaler Operator auf  $\mathcal{M}_\alpha \Rightarrow \exists$  ONB von  $\mathcal{M}_\alpha$   $\{|\alpha, 1\rangle, \dots, |\alpha, d_\alpha\rangle\}$  von Eigenvektoren von  $B$ . Außerdem ist natürlich  $A|\alpha, r\rangle = a_\alpha|\alpha, r\rangle$ .

Die Vektoren  $|\alpha, r\rangle$  ( $\alpha = 1, \dots, m, r = 1, \dots, d_\alpha = \dim \mathcal{M}_\alpha$ ) bilden ein VONS von  $\mathcal{U}$ , das aus Eigenvektoren von  $A$  und  $B$  gebildet wird.

**Bemerkung:** Für normale  $n \times n$ -Matrizen  $A, B$  mit  $[A, B] = 0$  bedeutet das:  $\exists$  unitäre Matrix  $U$ , sodass  $U^\dagger A U$  und  $U^\dagger B U$  Diagonalmatrizen sind. ( $A$  und  $B$  sind gleichzeitig diagonalisierbar.)

## 2.10 Funktionen normaler Operatoren

Funktionen von linearen Operatoren treten etwa bei der Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen, der Beschreibung von Symmetrietransformationen und der Zeitentwicklung in der Quantenmechanik auf. Die Berechnung der Funktion eines normalen Operators ist erstaunlich einfach. Sie kann auf die Bestimmung der Funktionswerte auf dem Spektrum des Operators zurückgeführt werden.

Um dies zu sehen, gehen wir von der Spektraldarstellung eines normalen Operators  $A$  in der Form

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \varphi_k^\dagger$$

aus. Multipliziert man diesen Ausdruck mit sich selbst (was einer nochmaligen Anwendung der Abbildung  $A$  entspricht), so erhält man

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \varphi_k^\dagger \sum_{l=1}^n a_l \varphi_l \varphi_l^\dagger = \sum_{k,l=1}^n a_k a_l \varphi_k \underbrace{\varphi_k^\dagger \varphi_l}_{\delta_{kl}} \varphi_l^\dagger \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \varphi_k \varphi_k^\dagger \end{aligned}$$

bzw. für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$A^m = \underbrace{A \cdots A}_{m\text{-mal}} = \sum_{k=1}^n a_k^m \varphi_k \varphi_k^\dagger.$$

Ebenso erhält man für ein Polynom von  $A$  den Ausdruck

$$p(A) = \sum_m c_m A^m = \sum_{k=1}^n \left( \sum_m c_m a_k^m \right) \varphi_k \varphi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n p(a_k) \varphi_k \varphi_k^\dagger.$$

Für eine beliebige komplexwertige Funktion  $f$ , die auf dem **Spektrum** des normalen Operators  $A \in L(\mathcal{U})$  (das ist die Menge der Eigenwerte von  $A$ ) definiert ist, kann man  $f(A) \in L(\mathcal{U})$  daher durch

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(a_k) \varphi_k \varphi_k^\dagger$$

definieren, wobei  $f(A)$  natürlich wieder ein normaler Operator ist.

**Beispiele:**

1. Sei  $A \in L(U^n)$  eine normale  $n \times n$ -Matrix.  $A = U\hat{A}U^\dagger$ ,  $\hat{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ,  $U$  unitär  $\Rightarrow f(A) = Uf(\hat{A})U^\dagger$ ,  $f(\hat{A}) = \text{diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))$ .
2. Sei  $U \in L(\mathcal{U})$  ein unitärer Operator. Seine Eigenwerte haben dann die Gestalt  $e^{i\alpha_k}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) und die Spektraldarstellung lautet

$$U = \sum_{k=1}^n e^{i\alpha_k} \varphi_k \varphi_k^\dagger = e^{iA},$$

wobei  $A = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \varphi_k^\dagger = A^\dagger$ .

Das heißt, jeder unitäre Operator kann in der Form

$$U = e^{iA}, \quad A = A^\dagger,$$

geschrieben werden.

3. Die Funktion  $f(A)$  eines normalen Operators  $A$  in einem **zweidimensionalen** unitären Raum kann als Linearkombination des Einheitsoperators und von  $A$  selbst geschrieben werden. Sind die zwei möglichen Eigenwerte entartet, so ist  $A = a\mathbf{1}$  und daher  $f(A) = f(a)\mathbf{1}$ , womit die Behauptung offensichtlich erfüllt ist. Im Fall verschiedener Eigenwerte ( $a_1 \neq a_2$ ) hat man

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2, \quad P_1 + P_2 = \mathbf{1},$$

wobei

$$P_1 = \varphi_1 \varphi_1^\dagger, \quad P_2 = \varphi_2 \varphi_2^\dagger$$

die beiden eindimensionalen Projektoren auf die von den Eigenvektoren  $\varphi_{1,2}$  aufgespannten Eigenräume sind. Aus der Spektraldarstellung und der Vollständigkeitsrelation kann man die beiden Projektionsoperatoren als Linearkombinationen von  $\mathbf{1}$  und  $A$  schreiben:

$$P_1 = \frac{A - a_2}{a_1 - a_2}, \quad P_2 = \frac{A - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} f(A) &= f(a_1)P_1 + f(a_2)P_2 = f(a_1)\frac{A - a_2}{a_1 - a_2} + f(a_2)\frac{A - a_1}{a_1 - a_2} \\ &= \frac{f(a_2)a_1 - f(a_1)a_2}{a_1 - a_2}\mathbf{1} + \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2}A. \end{aligned}$$

4. In der Quantenmechanik treten bei der Beschreibung des Spin 1/2-Systems die **Paulischen Spinmatrizen**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

auf. Sie sind in  $U^2$  hermitesch mit Eigenwerten  $\pm 1$ . Sie erfüllen die **Vertauschungsrelationen**

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} \sigma_m$$

und die Antivertauschungsrelationen

$$\sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k = 2\delta_{kl}.$$

Bildet man die Linearkombination

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{k=1}^3 n_k \sigma_k$$

mit einem Einheitsvektor

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1,$$

so ist  $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$  wieder hermitesch mit Eigenwerten  $\pm 1$ . Bei der Beschreibung der räumlichen Drehung eines Spins um den Winkel  $\alpha$  mit Drehachse  $\vec{n}$ , tritt die Matrix

$$e^{-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma} / 2}$$

auf. Überprüfen Sie, dass diese Matrix in der Form

$$e^{-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma} / 2} = \mathbf{1} \cos \frac{\alpha}{2} - i \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2}$$

geschrieben werden kann. Hinweis: Wenden Sie die Formel von Beispiel 3 an.

## 2.11 Anwendung des Spektralsatzes auf reelle Matrizen

*Einige Resultate über reelle  $n \times n$  Matrizen erhält man auf sehr einfache Weise dadurch, dass man sie als Abbildungen in einem unitären Vektorraum auffasst.*

$A \in L(E^n)$  sei eine reelle  $n \times n$ -Matrix mit  $A^T A = A A^T$ . Lässt sich dann  $A$  durch eine **orthogonale** Transformation auf Diagonalgestalt bringen? Das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

zeigt, dass das im Allgemeinen nicht möglich ist, denn die Eigenwerte sind  $a \pm ib$  und das Produkt reeller Matrizen ist wieder reell, kann also nie eine komplexe Diagonalmatrix ergeben. Allerdings ist das in gewisser Weise das einzige Gegenbeispiel.

Sei also  $A = A^*$  mit  $A^T A = A A^T$ , dann können wir  $A$  als Operator im  $U^n$  auffassen und wir wissen, dass es ein VONS von Eigenvektoren  $\{f_1, \dots, f_n\}$  gibt, die im Allgemeinen komplex sind. Seien also  $a_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) die verschiedenen Eigenwerte von  $A$  mit Vielfachheit  $d_\alpha$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.  $a_\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A f_1 &= a_\alpha f_1, & 0 \neq f_1 &= p_1 + i q_2, & p_1, q_1 &\in \mathbb{R}^n \\ A(p_1 + i q_1) &= a_\alpha(p_1 + i p_2) \\ \Rightarrow A p_1 + i A q_1 &= a_\alpha p_1 + i a_\alpha p_2 \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil auf der linken und der rechten Seite ergibt:

$$A p_1 = a_\alpha p_1, \quad A q_1 = a_\alpha q_1$$

Da  $f_1 = p_1 + i q_1 \neq 0$  ist entweder  $p \neq 0$  oder  $q \neq 0$  (oder beide), d.h. es gibt eine **reelle** Lösung  $r_1$  für den Eigenvektor. Ist nun  $d_\alpha = 1$ , dann sind wir fertig, ist  $d_\alpha \geq 2$ , dann betrachten wir  $[r_1]^\perp$ . Das heißt, wir suchen einen Vektor  $f_2 \neq 0$  mit  $r_1^\dagger f_2 = r_1^T f_2 = 0$  und  $A f_2 = a_\alpha f_2$  (die Existenz von  $f_2$  ist klar). Wir zerlegen  $f_2$  wieder in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} f_2 &= p_2 + i q_2, & p_2, q_2 &\in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow r_1^\dagger p_2 &= r_1^T p_2 = 0, & A p_2 &= a_\alpha p_2, \\ r_1^\dagger q_2 &= r_1^T q_2 = 0, & A q_2 &= a_\alpha q_2. \end{aligned}$$

Da  $f_2 \neq 0$ , ist wieder  $p_2 \neq 0$  oder  $q_2 \neq 0$ . Auf diese Weise erhält man eine reelle Lösung  $r_2$  der Eigenwertgleichung  $A r_2 = a_\alpha r_2$  mit  $r_1^T r_2 = 0$ . Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man  $d_\alpha$  **reelle** Eigenvektoren zum Eigenwert  $a_\alpha$ , die ein Orthonormalsystem bilden:

$$A r_k = a_\alpha r_k, \quad k = 1, \dots, d_\alpha, \quad r_k \in \mathbb{R}^n, \quad r_k^T r_l = \delta_{kl}.$$

2.  $a_\alpha \notin \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Ag &= a_\alpha g, & g \in \mathbb{C}^n, & \quad g^\dagger g = 1 \\ \Rightarrow Ag^* &= a_\alpha^* g^* \end{aligned}$$

Da laut Voraussetzung  $a_\alpha \neq a_\alpha^*$  ist, stehen die Vektoren  $g$  und  $g^*$  aufeinander orthogonal ( $g^\dagger g^* = 0$ ). Schreibt man  $g$  in der Form

$$g = \frac{x + iy}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= g^\dagger g^* = \frac{1}{2}(x + iy)^\dagger(x - iy) \\ &= \frac{1}{2}(x^T x - y^T y - ix^T y - iy^T x) \\ &= \frac{1}{2}(x^T x - y^T y - 2ix^T y) \\ &\Rightarrow x^T x = y^T y, \quad x^T y = 0. \end{aligned}$$

Aus der Normierung erhält man

$$1 = g^\dagger g = \frac{1}{2}(x + iy)^\dagger(x + iy) = \frac{1}{2}(x^T x + y^T y)$$

und zusammen mit  $x^T x = y^T y$  somit  $x^T x = y^T y = 1$ .

Zerlegt man die Eigenwertgleichung

$$A(x + iy) = (\operatorname{Re} a_\alpha + i \operatorname{Im} a_\alpha)(x + iy)$$

in Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\begin{aligned} Ax &= x \operatorname{Re} a_\alpha - y \operatorname{Im} a_\alpha, \\ Ay &= x \operatorname{Im} a_\alpha + y \operatorname{Re} a_\alpha. \end{aligned}$$

Die Matrixdarstellung von  $A$  in dem von  $x$  und  $y$  gebildeten Unterraum ist also

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_\alpha & \operatorname{Im} a_\alpha \\ -\operatorname{Im} a_\alpha & \operatorname{Re} a_\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren  $\{r_1, \dots, r_s, g_1, g_1^*, \dots, g_t, g_t^*\}$  ( $r_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $s + 2t = n$ ) bilden ein VONS in  $U^n$ . Aus diesem kann man durch

$$x_k = \sqrt{2} \operatorname{Re} g_k \in \mathbb{R}^n, \quad y_k = \sqrt{2} \operatorname{Im} g_k \in \mathbb{R}^n$$

eine ONB des  $E^n$  erhalten:

$$\{r_1, \dots, r_s, x_1, y_1, \dots, x_t, y_t\}.$$

Bezüglich dieser Basis erhält man die Fast-Diagonalgestalt

$$S^T AS = \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_s & & & \\ & & & B_{s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_{s+t} \end{pmatrix}.$$

mit den  $2 \times 2$ -Blöcken  $B_l$  der Form

$$B_l = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_l & \operatorname{Im} a_l \\ -\operatorname{Im} a_l & \operatorname{Re} a_l \end{pmatrix}$$

und der orthogonalen Matrix

$$S = (r_1, \dots, r_s, x_1, y_1, \dots, x_t, y_t)$$

Besonders wichtig ist der Spezialfall einer reellen **symmetrischen Matrix**  $A$ , d.h. einer Matrix mit  $A^T = A$ . Das ist der Spezialfall einer hermiteschen Matrix, daher sind alle Eigenwerte reell und  $A$  kann durch eine orthogonale Transformation  $S$  auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$S^T AS = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad S^T S = SS^T = \mathbf{1}.$$

**Beispiel: Eine quadratische Form**

$$\sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j = x^T Ax, \quad x_i, A_{ij} = A_{ji} \in \mathbb{R}$$

kann durch eine orthogonale Transformation  $x = Sy$  auf die besonders einfache **Hauptachsenform**

$$y^T \hat{A} y = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2$$

gebracht werden (**Hauptachsentransformation**).

**Beweis:**  $A = S\hat{A}S^T \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^T Ax &= x^T S\hat{A}S^T x \\ &= (S^T x)^T \hat{A} S^T x = y^T \hat{A} y = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2, \end{aligned}$$

wobei  $y = S^T x \Leftrightarrow x = Sy$ .





# Kapitel 3

## Einfache Quantensysteme

*Die in der Theorie der unitären Räume eingeführten mathematischen Konzepte haben eine unmittelbare Entsprechung zu jenen grundlegenden physikalischen Begriffen, die bei der Formulierung der Grundpostulate der Quantentheorie verwendet werden. Obwohl man zur Beschreibung der meisten realistischen quantenmechanischen Systeme unendlichdimensionale Hilberträume benötigt, können die wesentlichen Grundideen der mathematischen Struktur der Quantentheorie bereits an Hand des einfacheren Spezialfalls eines endlichdimensionalen Zustandsraumes erläutert werden.*

### 3.1 Grundpostulate der Quantentheorie

Zu jedem quantenmechanischen System gibt es einen geeigneten **Hilbertraum**  $\mathcal{H}$ , den sogenannten **Zustandsraum** des betrachteten Systems. Obwohl der Zustandsraum i.Allg. **unendlichdimensional** ist, gibt es physikalische Probleme, bei denen nur ein endlicher **Teilraum** des gesamten Hilbertraums relevant ist. Wir wollen uns also bei der Formulierung der Axiome der Quantentheorie auf Systeme beschränken, die sich durch einen **endlichdimensionalen Zustandsraum**  $\mathcal{H}$  (unitären Vektorraum) beschreiben lassen.

Die **beobachtbaren Größen (Observable)** des betrachteten quantenmechanischen Systems werden durch die **hermiteschen** Elemente der **Observablenalgebra**  $L(\mathcal{H})$  repräsentiert. Beispiele für Observable wären etwa die Energie oder der Drehimpuls des Systems. Der wesentliche Unterschied zur klassischen Physik liegt darin, dass man es in der Quantenmechanik mit einer **nichtkommutativen** Observablenalgebra zu tun hat, d.h. es gibt Operatoren  $A, B \in L(\mathcal{H})$  mit  $[A, B] \neq 0$ .

Die **möglichen Messwerte** der durch den hermiteschen Operator  $A \in L(\mathcal{H})$  beschriebenen Observablen sind die Elemente des **Spektrums** von  $A$  (d.h. die **Eigenwerte** von  $A$ ). D.h. bei einer Messung der Observablen  $A$  kann als Messergebnis immer nur einer der Eigenwerte  $a_1, \dots, a_n$  von  $A$  auftreten.

**Bemerkung:** Eine besondere Rolle spielen die Projektionsoperatoren, die als hermitesche Operatoren ja ebenfalls beobachtbare Größen repräsentieren. Ist ein hermitescher Operator durch seine Spektraldarstellung

$$A = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} P_{\alpha}$$

gegeben ( $m$  ist die Anzahl der **verschiedenen** Eigenwerte von  $A$ ), so entspricht dem Projektor  $P_{\alpha}$  (der auf den Eigenraum des Eigenwertes  $a_{\alpha}$  projiziert) die Durchführung des folgenden ja-nein-Experiments: „Erhält man bei einer Messung der Observablen  $A$  den Messwert  $a_{\alpha}$ ?“ Da der Projektionsoperator  $P_{\alpha}$  nur die Eigenwerte 1 und 0 besitzt, entspricht dem Eigenwert 1 die Antwort „ja“ und dem Eigenwert 0 die Antwort „nein“.

Die möglichen **Zustände** des Systems werden durch **lineare Funktionale** auf der Observablenalgebra beschrieben, die zusätzlich **nicht negativ** und **normiert** sind. Bei einem Zustand  $\omega$  handelt es sich also um eine Abbildung  $\omega : L(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\omega(c_1 A_1 + c_2 A_2) = c_1 \omega(A_1) + c_2 \omega(A_2), \quad c_{1,2} \in \mathbb{C}, A_{1,2} \in L(\mathcal{H})$
2.  $\omega(A^{\dagger} A) \geq 0 \quad \forall A \in L(\mathcal{H})$
3.  $\omega(\mathbf{1}) = 1$

Durch den Zustand  $\omega$  wird jeder Observablen  $A$  ihr **Erwartungswert**  $\omega(A)$  zugeordnet. Für den Projektionsoperator  $P_{\alpha} = P_{\alpha}^{\dagger} = P_{\alpha} P_{\alpha}$  erhält man wegen der Eigenschaft 2

$$p_{\alpha} = \omega(P_{\alpha}) = \omega(P_{\alpha} P_{\alpha}) = \omega(P_{\alpha}^{\dagger} P_{\alpha}) \geq 0.$$

$p_{\alpha} = \omega(P_{\alpha})$  ist die **Wahrscheinlichkeit** bei einer Messung der Observablen  $A$  den Messwert  $a_{\alpha}$  zu erhalten, wenn sich das System in dem durch  $\omega$  beschriebenen Zustand befindet. Wegen der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\alpha=1}^m P_{\alpha} = \mathbf{1}$$

und der Linearität der Normierung von  $\omega$  erhält man

$$\sum_{\alpha=1}^m p_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \omega(P_{\alpha}) = \omega\left(\sum_{\alpha=1}^m P_{\alpha}\right) = \omega(\mathbf{1}) = 1$$

für die Wahrscheinlichkeit **irgendeinen** der Eigenwerte von  $A$  zu messen. Der Erwartungswert von  $A$  im Zustand  $\omega$  lässt sich dann, wieder unter Verwendung der Linearität von  $\omega$ , in der Form

$$\omega(A) = \omega\left(\sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} P_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} \omega(P_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} p_{\alpha}$$

schreiben. Präpariert man eine große Anzahl  $N$  von identischen Kopien des Systems alle im gleichen Zustand  $\omega$  und führt dann an jeder dieser Kopien eine Messung der Observablen  $A$  durch, so wird man  $N_{\alpha}$ -mal den Messwert  $a_{\alpha}$  erhalten, wobei

$$\frac{N_{\alpha}}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p_{\alpha}$$

und  $\sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha} = N$  ist. Für den **Mittelwert** der Messwerte ergibt sich daher

$$\sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} \frac{N_{\alpha}}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} p_{\alpha} = \omega(A).$$

### Beispiele von Zuständen:

1.  $\psi \in \mathcal{H}$  sei ein Einheitsvektor. Dann wird durch  $\omega(A) = \langle \psi | A \psi \rangle \forall A \in L(\mathcal{H})$  ein sogenannter **reiner Zustand** definiert. Man überzeugt sich leicht, dass die Eigenschaften 1-3 tatsächlich erfüllt sind. Man nennt  $\psi$  dann den **Zustandsvektor** des entsprechenden reinen Zustands. **Bemerkung:** Der Zustandsvektor  $e^{i\varphi} \psi$  beschreibt den selben Zustand.
2.  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$  seien Zustände und  $p_1, p_2, \dots, p_r$  positive Zahlen mit  $\sum_{j=1}^r p_j = 1$ . Dann ist  $\omega = \sum_{j=1}^r p_j \omega_j$  ebenfalls ein Zustand. Insbesondere wird durch

$$\omega(A) = \sum_{j=1}^r p_j \langle \psi_j | A \psi_j \rangle \quad \forall A \in L(\mathcal{H})$$

ein Zustand definiert, wenn die  $|\psi_j\rangle$  (**nicht** notwendigerweise aufeinander normal stehende) Zustandsvektoren ( $\langle \psi_j | \psi_j \rangle = 1$ ) sind. Zustände, die man **nicht** in der Form  $\omega(A) = \langle \psi | A \psi \rangle$  schreiben kann, heißen **gemischte Zustände**.

Man kann eine **Standardform** für die Beschreibung von Zuständen angeben. Da  $\omega(A)$  **linear** in  $A$  ist, muss sich  $\omega(A)$  in der Form

$$\omega(A) = \sum_{k,l} \rho_{kl} A_{lk}$$

schreiben lassen, wobei  $A_{lk} = \langle \varphi_l | A \varphi_k \rangle$  die Matrixelemente des Operators  $A$  bezüglich einer **beliebigen** ONB  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ( $n = \dim \mathcal{H}$ ) sind. Die Koeffizienten  $\rho_{kl} \in \mathbb{C}$  kann man dann ebenfalls als die Matrixelemente eines Operators  $\rho \in L(\mathcal{H})$  bezüglich der selben ONB auffassen ( $\rho_{kl} = \langle \varphi_k | \rho \varphi_l \rangle$ ).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \omega(A) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \varphi_k | \rho \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | A \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k | \rho A \varphi_k \rangle = \text{Tr}(\rho A), \end{aligned}$$

wobei die Spur eines Operators  $B$ ,

$$\text{Tr} B = \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k | B \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^n B_{kk}$$

**unabhängig** von der gewählten Basis ist.

(Tr = trace = Spur).

Bis jetzt wurde nur die Linearität von  $\omega$  verwendet. Die Eigenschaft

$$\omega(A^\dagger A) \geq 0 \quad \forall A \in L(\mathcal{H})$$

liefert eine weitere Einschränkung an den Operator  $\rho$ . Nimmt man für  $A$  nämlich den eindimensionalen Projektor  $A = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  (wobei  $|\varphi\rangle$  ein beliebiger Einheitsvektor ist), so erhält man wegen  $A^\dagger A = A$

$$\langle \varphi | \rho \varphi \rangle \geq 0.$$

Ergänzt man nämlich  $|\varphi\rangle$  zu einer ONB  $\{|\varphi\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$  von  $\mathcal{H}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho A^\dagger A) &= \text{Tr}(\rho A) = \langle \varphi | \rho \varphi \rangle \underbrace{\langle \varphi | \varphi \rangle}_1 + \sum_{k=2}^n \langle \varphi_k | \rho \varphi \rangle \underbrace{\langle \varphi | \varphi_k \rangle}_0 \\ &= \langle \varphi | \rho \varphi \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

und daher mit  $|\psi\rangle = c|\varphi\rangle$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) die Aussage

$$\langle \psi | \rho \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Einen Operator mit dieser Eigenschaft nennt man **nicht negativ** ( $\rho \geq 0$ ). Man kann zeigen, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1.  $\langle \psi | \rho \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$ .
2.  $\rho$  ist hermitesch und alle Eigenwerte sind  $\geq 0$ .

3. Es gibt einen Operator  $A \in L(\mathcal{H})$ , sodass  $\rho = A^\dagger A$ .

**Beweis:**

1  $\Rightarrow$  2: Es seien  $\psi_k$  und  $\psi_l$  zwei aufeinander orthogonal stehende Einheitsvektoren. Dann ist laut Voraussetzung

$$\langle \psi_k + \psi_l | \rho(\psi_k + \psi_l) \rangle = \underbrace{\rho_{kk}}_{\geq 0} + \underbrace{\rho_{ll}}_{\geq 0} + \rho_{kl} + \rho_{lk} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(\rho_{kl} + \rho_{lk}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_k + i\psi_l | \rho(\psi_k + i\psi_l) \rangle &= \underbrace{\rho_{kk}}_{\geq 0} + \underbrace{\rho_{ll}}_{\geq 0} + i\rho_{kl} - i\rho_{lk} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Re}(\rho_{kl} - \rho_{lk}) = 0, \\ &\Rightarrow \quad \rho_{kl} = \rho_{lk}^* \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho^\dagger. \end{aligned}$$

Ist nun  $\chi_k \neq 0$  ein Eigenvektor von  $\rho$  zum Eigenwert  $\rho_k$ , so ist

$$\langle \chi_k | \rho \chi_k \rangle = \langle \chi_k | \rho_k \chi_k \rangle = \rho_k \underbrace{\langle \chi_k | \chi_k \rangle}_{>0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_k \geq 0.$$

2  $\Rightarrow$  3: Laut Voraussetzung gibt es eine ONB  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  von Eigenvektoren von  $\rho$  mit Eigenwerten  $\rho_k \geq 0$ . In der Spektraldarstellung hat  $\rho$  die Gestalt

$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k |\chi_k\rangle \langle \chi_k|$$

Man kann hier problemlos den hermiteschen (und ebenfalls nicht negativen) Operator

$$\sqrt{\rho} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\rho_k} |\chi_k\rangle \langle \chi_k|$$

bilden und erhält  $\rho = \sqrt{\rho} \sqrt{\rho} = (\sqrt{\rho})^\dagger \sqrt{\rho}$ .

3  $\Rightarrow$  1:  $\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle = \langle A \psi | A \psi \rangle \geq 0$ .

Die Implikationskette 1  $\Rightarrow$  2  $\Rightarrow$  3  $\Rightarrow$  1 ist somit geschlossen und die Äquivalenz von 1,2,3 gezeigt. Jede dieser drei Eigenschaften kann daher zur Definition eines nicht negativen Operators herangezogen werden.

Es gibt also eine ONB  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  von Eigenvektoren von  $\rho$  mit Eigenwerten  $\rho_k \geq 0$ . Schließlich impliziert die Normierungsbedingung

$$\omega(\mathbf{1}) = \text{Tr} \rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n \rho_k = 1.$$

**Der Dichteoperator**

$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k |\chi_k\rangle \langle \chi_k|, \quad \rho_k \geq 0, \quad \text{Tr} \rho = \sum_{k=1}^n \rho_k = 1,$$

liefert also mit  $\omega(A) = \text{Tr}(\rho A) \quad \forall A \in L(\mathcal{H})$  die gewünschte Standardform für die Darstellung des Zustands  $\omega$ . Man kann sich also einen beliebigen Zustand  $\omega$  als **statistisches Gemisch** von reinen Zuständen (repräsentiert durch die Zustandsvektoren  $|\chi_k\rangle$ ) vorstellen, wobei  $|\chi_k\rangle$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\rho_k$  auftritt. Ein **reiner** Zustand ist dadurch charakterisiert, dass alle  $\rho_k$  bis auf eines verschwinden. Der Dichteoperator, der dem Zustandsvektor  $|\psi\rangle$  entspricht, ist  $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ , also ein **eindimensionaler Projektor** ( $\rho_\psi^\dagger = \rho_\psi$ ,  $\rho_\psi^2 = \rho_\psi$ ). Die Eigenschaft  $\rho^2 = \rho$  **charakterisiert** jene Dichteoperatoren, die reinen Zuständen entsprechen, denn in diesem Fall kann  $\rho$  nur die Eigenwerte 0, 1 besitzen und wegen der Normierungsbedingung  $\sum_{k=1}^n \rho_k = 1$  kann der Eigenwert 1 nur ein einziges Mal auftreten  $\Rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ .

Für den Erwartungswert eines Operators  $A$  in einem beliebigen (gemischten) Zustand ergibt sich

$$\omega(A) = \text{Tr}(\rho A) = \sum_{k=1}^n \langle\chi_k | \rho A \chi_k\rangle = \sum_{k=1}^n \rho_k \langle\chi_k | A \chi_k\rangle.$$

Hat  $A$  die Spektraldarstellung

$$A = \sum_{\alpha=1}^m a_\alpha P_\alpha,$$

so erhält man

$$\omega(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \rho_k \underbrace{\langle\chi_k | P_\alpha \chi_k\rangle}_{p_{k\alpha}} a_\alpha.$$

Es treten hier sowohl die „quantenmechanischen“ Wahrscheinlichkeiten  $p_{k\alpha}$  als auch die „klassischen“ statistischen Wahrscheinlichkeiten  $\rho_k$  auf.  $p_{k\alpha}$  ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der Observablen  $A$  in dem durch den Zustandsvektor  $|\chi_k\rangle$  beschriebenen reinen Zustand den Messwert  $a_\alpha$  zu erhalten. Dagegen ist  $\rho_k$  die Wahrscheinlichkeit in dem gemischten Zustand  $\omega$  den durch  $|\chi_k\rangle$  beschriebenen reinen Zustand vorzufinden. Die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von  $A$  im Zustand  $\omega$  den Messwert  $a_\alpha$  zu erhalten, ist daher

$$\omega(P_\alpha) = \sum_{k=1}^n \rho_k \langle\chi_k | P_\alpha \chi_k\rangle = \sum_{k=1}^n \rho_k p_{k\alpha}.$$

Ist  $\omega_\psi$  ein reiner Zustand (mit Dichteoperator  $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ ), so vereinfachen sich die Formeln:

$$\begin{aligned} \omega_\psi(A) &= \langle\psi | A \psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^m \langle\psi | P_\alpha \psi\rangle a_\alpha, \\ \omega_\psi(P_\alpha) &= \langle\psi | P_\alpha \psi\rangle. \end{aligned}$$

Verwendet man die Spektraldarstellung

$$P_\alpha = \sum_{r=1}^{d_\alpha} |\alpha, r\rangle\langle\alpha, r|$$

des Projektors auf den Eigenraum  $\mathcal{M}_\alpha$ , so kann man auch schreiben:

$$\omega_\psi(P_\alpha) = \sum_{r=1}^{d_\alpha} \langle\psi | \alpha, r\rangle\langle\alpha, r | \psi\rangle = \sum_{r=1}^{d_\alpha} |\langle\alpha, r | \psi\rangle|^2.$$

Ist  $d_\alpha = 1$ , so hat man einfach  $\omega_\psi(P_\alpha) = |\langle\alpha | \psi\rangle|^2$ .

**Beispiele** für Dichteoperatoren gemischter Zustände:

1. Sei  $\dim \mathcal{H} = n$ , dann beschreibt der Dichteoperator  $\rho = \mathbf{1}/n$  den Zustand mit **maximaler Mischung**.
2. Jener hermitesche Operator, welcher der Observablen „Gesamtenergie des Systems“ entspricht, wird als **Hamiltonoperator**  $H$  bezeichnet. Befindet sich das betrachtete System im **thermischen Gleichgewicht** mit einem „Wärmebad“ der **absoluten Temperatur**  $T$ , so wird der entsprechende Zustand des Systems durch den Dichteoperator

$$\rho = \frac{e^{-H/kT}}{\text{Tr}e^{-H/kT}}$$

beschrieben, wobei  $k \simeq 1.38 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$  die **Boltzmann-Konstante** ist.

Ist  $\{|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$  eine ONB von Eigenvektoren von  $H$ ,

$$H|\varphi_k\rangle = E_k|\varphi_k\rangle, \quad \langle\varphi_k | \varphi_l\rangle = \delta_{kl}, \quad \sum_{k=1}^n |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \mathbf{1},$$

so ist die Spektraldarstellung des Dichteoperators durch

$$\rho = \sum_{l=1}^n \frac{e^{-E_l/kT}}{Z} |\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|, \quad Z = \sum_{l=1}^n e^{-E_l/kT}$$

gegeben.

## 3.2 Spin 1/2 System

*Die doch einigermaßen abstrakten allgemeinen Spielregeln der Quantentheorie sollen nun durch ihre Anwendung auf ein möglichst einfaches quantenmechanisches System mit etwas mehr Leben erfüllt werden.*

Sieht man von den Translationsfreiheitsgraden eines Elektrons (oder eines beliebigen anderen Spin  $1/2$  Teilchens) ab, so werden seine **Spinfreiheitsgrade** durch einen zweidimensionalen Zustandsraum beschrieben. Da ein zweidimensionaler unitärer Vektorraum isomorph zu  $U^2$  ist, kann man die Zustandsvektoren durch komplexe zweidimensionale Spaltenvektoren darstellen, die Observablenalgebra ist dann nichts anderes als die Menge der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen. Den drei räumlichen Komponenten  $S_1, S_2, S_3$  des **Spindrehimpulsvektors**  $\vec{S}$  entsprechen die hermiteschen Matrizen

$$S_k = \frac{\hbar}{2} \sigma_k \quad (1 \leq k \leq 3)$$

mit den bereits früher besprochenen **Paulischen Spinmatrizen**  $\sigma_k$ . Die Komponenten des Spinvektors in einer beliebigen räumlichen Richtung  $\vec{n}$  ( $|\vec{n}| = 1$ ) wird durch die Matrix

$$\frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} \sum_{k=1}^3 n_k \sigma_k = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Eigenwerte dieser Matrix sind  $\pm \hbar/2$ , d.h. bei der Messung einer Spinkomponente in einer beliebigen räumlichen Richtung kann als Messwert nur entweder  $+\hbar/2$  oder  $-\hbar/2$  auftreten (daher „Spin  $1/2$ “).

Die Matrix

$$S_3 = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}$$

besitzt die ONB von Eigenvektoren

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$S_3 \chi_{\uparrow} = \frac{\hbar}{2} \chi_{\uparrow}, \quad S_3 \chi_{\downarrow} = -\frac{\hbar}{2} \chi_{\downarrow}.$$

Dagegen besitzt

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix}$$

die ONB von Eigenvektoren

$$\varphi_{\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mit

$$S_1 \varphi_{\uparrow} = \frac{\hbar}{2} \varphi_{\uparrow}, \quad S_1 \varphi_{\downarrow} = -\frac{\hbar}{2} \varphi_{\downarrow}.$$



Nehmen wir nun an, dass sich das System in dem durch den Zustandsvektor  $\chi_\uparrow$  beschriebenen reinen Zustand  $\omega$  befindet (d.h.  $\omega(A) = \chi_\uparrow^\dagger A \chi_\uparrow$ ,  $A \in L(U^2)$ ). Die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der Spinkomponente  $S_3$  in diesem Zustand den Messwert  $+\hbar/2$  zu erhalten, ist durch den Erwartungswert des Projektionsoperators  $\chi_\uparrow \chi_\uparrow^\dagger$  gegeben:

$$\omega\left(\chi_\uparrow \chi_\uparrow^\dagger\right) = \underbrace{\chi_\uparrow^\dagger \chi_\uparrow}_1 \underbrace{\chi_\uparrow^\dagger \chi_\uparrow}_1 = 1.$$

Das heißt, bei einer Messung von  $S_3$  erhält man in diesem Zustand **immer** den Messwert  $+\hbar/2$ . Dementsprechend ist die Wahrscheinlichkeit in diesem Zustand für  $S_3$  den Messwert  $-\hbar/2$  zu erhalten gleich null:

$$\omega\left(\chi_\downarrow \chi_\downarrow^\dagger\right) = \underbrace{\chi_\uparrow^\dagger \chi_\downarrow}_0 \underbrace{\chi_\downarrow^\dagger \chi_\uparrow}_0 = 0.$$

Der Erwartungswert von  $S_3$  ist in diesem Zustand dann natürlich durch

$$\omega(S_3) = \chi_\uparrow^\dagger S_3 \chi_\uparrow = \frac{\hbar}{2}$$

gegeben. Misst man dagegen in dem selben Zustand die Spinkomponente  $S_1$ , so erhält man für die Erwartungswerte der Projektoren  $\varphi_\uparrow \varphi_\uparrow^\dagger, \varphi_\downarrow \varphi_\downarrow^\dagger$

$$\omega\left(\varphi_\uparrow \varphi_\uparrow^\dagger\right) = \underbrace{\chi_\uparrow^\dagger \varphi_\uparrow}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{\varphi_\uparrow^\dagger \chi_\uparrow}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2},$$

$$\omega\left(\varphi_\downarrow \varphi_\downarrow^\dagger\right) = \underbrace{\chi_\uparrow^\dagger \varphi_\downarrow}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{\varphi_\downarrow^\dagger \chi_\uparrow}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2},$$

was bedeutet, dass man bei einer Messung von  $S_1$  in der Hälfte der Fälle den Messwert  $+\hbar/2$  und in der anderen Hälfte den Messwert  $-\hbar/2$  erhalten wird. Der Erwartungswert von  $S_1$  muss in dem betrachteten Zustand dann klarerweise verschwinden:

$$\omega(S_1) = \chi_\uparrow^\dagger S_1 \chi_\uparrow = 0$$

Wir wollen noch kurz den allgemeinen Fall der Messung der Spinkomponente

$$\vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad |\vec{n}| = 1$$

besprechen. Man kann den räumlichen Einheitsvektor  $\vec{n}$  in der Form

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Für den Projektor  $P_{\uparrow}$  auf den (eindimensionalen) Eigenraum zum Eigenwert  $+1$  von  $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$  erhält man

$$P_{\uparrow} = \frac{\mathbf{1} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

und für den Projektor  $P_{\downarrow}$  auf den Eigenraum zum Eigenwert  $-1$  von  $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$

$$P_{\downarrow} = \frac{\mathbf{1} - \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta e^{-i\phi} \\ -\sin \theta e^{i\phi} & 1 + \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir wieder an, dass sich unser System in dem durch den Zustandsvektor

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschriebenen reinen Zustand  $\omega$  befindet, so ist

$$\omega(P_{\uparrow}) = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \omega(P_{\downarrow}) = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Für den speziellen Wert  $\theta = \pi/2$  ergeben sich die früher erhaltenen Resultate.

Für den durch die Dichtematrix  $\rho = \mathbf{1}/2$  beschriebenen maximal gemischten Zustand (entspricht z.B. einem Strahl unpolarisierter Teilchen) erhält man die Erwartungswerte

$$\text{Tr}(\rho A) = \frac{1}{2} \text{Tr} A.$$

Somit verschwinden in diesem Fall die Erwartungswerte von  $S_1, S_2, S_3$ , dagegen erhält man wegen  $S_i^2 = \frac{\hbar^2}{4} \mathbf{1}$

$$\text{Tr}(\rho S_i^2) = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Befindet sich ein Spin 1/2-System mit **magnetischem Moment**

$$\vec{\mu} = \mu \vec{\sigma}$$

in einem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$ , so ist der Hamiltonoperator

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

Legt man die 3-Achse des räumlichen Koordinatensystems in Richtung des Magnetfeldes ( $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ), so ist

$$H = -\mu B \sigma_3 = \begin{pmatrix} -\mu B & 0 \\ 0 & +\mu B \end{pmatrix}$$

diagonal mit Energieeigenwerten  $E_{\uparrow} = -\mu B$ ,  $E_{\downarrow} = +\mu B$  und dazugehörigen (normierten) Eigenvektoren

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Befindet sich dieses magnetische Moment nun im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur  $T$ , so ist seine Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-H/kT} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{\mu B/kT} & 0 \\ 0 & e^{-\mu B/kT} \end{pmatrix},$$

wobei

$$Z = \text{Tr} e^{-H/kT} = e^{\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT} = 2 \cosh \frac{\mu B}{kT}.$$

Die Erwartungswerte von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  (bzw. auch  $S_1$  und  $S_2$ ) verschwinden in diesem Zustand, dagegen erhält man für den Erwartungswert von  $\mu_3$  den Ausdruck

$$\text{Tr}(\rho \mu_3) = \mu \tanh \frac{\mu B}{kT},$$

der in der Theorie des **Paramagnetismus** eine Rolle spielt.



# Kapitel 4

## Tensorprodukte von Vektorräumen

*Tensorprodukte und Tensoren sind Standardkonstruktionen der linearen Algebra. Sie treten in praktisch allen Gebieten der Physik auf. Erwähnt seien hier nur der Trägheitstensor in der klassischen Mechanik, der metrische Tensor in der Relativitätstheorie, der Feldstärketensor in der Elektrodynamik sowie das Tensorprodukt von Zustandsräumen zur Beschreibung zusammengesetzter Systeme in der Quantenmechanik.*

### 4.1 Tensorprodukte

$\mathcal{V}^{(1)}, \dots, \mathcal{V}^{(r)}$  seien  $r$  (i.A. verschiedene) Vektorräume über einem Grundkörper  $K$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Unter dem **Tensorprodukt**

$$\mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$$

dieser Vektorräume versteht man die Menge aller **multilinearen Funktionale**

$$T : \tilde{\mathcal{V}}^{(1)} \times \dots \times \tilde{\mathcal{V}}^{(r)} \rightarrow K$$

auf dem kartesischen Produkt der Dualräume  $\tilde{\mathcal{V}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathcal{V}}^{(r)}$ .

Definiert man in  $\mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$  eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren durch

$$(a_1 T_1 + a_2 T_2)(\tilde{v}^{(1)}, \dots, \tilde{v}^{(r)}) = a_1 T_1(\tilde{v}^{(1)}, \dots, \tilde{v}^{(r)}) + a_2 T_2(\tilde{v}^{(1)}, \dots, \tilde{v}^{(r)}),$$
$$a_{1,2} \in K, \quad T_{1,2} \in \mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}, \quad \tilde{v}^{(k)} \in \tilde{\mathcal{V}}^{(k)},$$

so bildet  $\mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$  seinerseits einen Vektorraum.

Das **Tensorprodukt**

$$v^{(1)} \otimes \dots \otimes v^{(r)} \in \mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$$

der **Vektoren**  $v^{(1)}, \dots, v^{(r)}$  ( $v^{(k)} \in \mathcal{V}^{(k)}$ ) wird durch

$$(v^{(1)} \otimes \dots \otimes v^{(r)})(\tilde{v}^{(1)}, \dots, \tilde{v}^{(r)}) = \tilde{v}^{(1)}(v^{(1)}) \dots \tilde{v}^{(r)}(v^{(r)})$$

definiert.

Sind in den Vektorräumen  $\mathcal{V}^{(1)}, \dots, \mathcal{V}^{(r)}$  Basissysteme

$$\{e_1^{(k)}, \dots, e_{\dim \mathcal{V}^{(k)}}^{(k)}\}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

gegeben, dann bilden die Elemente

$$\{e_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i_r}^{(r)}\}, \quad 1 \leq i_k \leq \dim \mathcal{V}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

eine Basis von  $\mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$ . Somit gilt:

$$\dim(\mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}) = \prod_{k=1}^r \dim \mathcal{V}^{(k)}.$$

Jedes Element von  $\mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$  lässt sich daher in der Form

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r} e_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i_r}^{(r)} T_{i_1 \dots i_r}$$

schreiben.  $T$  bezeichnet man als **Tensor**  $r$ -ter Stufe mit Komponenten  $T_{i_1 \dots i_r}$  bezüglich der gewählten Basis. Das Transformationsverhalten der Tensorkomponenten bei einem Basiswechsel ist damit offensichtlich.

Sind  $r$  lineare Abbildungen

$$A^{(k)} : \mathcal{V}^{(k)} \rightarrow \mathcal{V}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

gegeben, dann definiert man die lineare Abbildung

$$A^{(1)} \otimes \dots \otimes A^{(r)} : \mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)} \rightarrow \mathcal{V}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^{(r)}$$

durch

$$(A^{(1)} \otimes \dots \otimes A^{(r)})(v^{(1)} \otimes \dots \otimes v^{(r)}) = (A^{(1)}v^{(1)}) \otimes \dots \otimes (A^{(r)}v^{(r)}).$$

Die Erweiterung auf beliebige Tensoren (d.h. solche, die sich nicht in Produktform schreiben lassen) erfolgt durch die Linearitätsforderung.

**Bemerkung:** Für die hier durchgeführten Konstruktionen müssen die Vektorräume  $\mathcal{V}^{(1)}, \dots, \mathcal{V}^{(r)}$  nicht mit Skalarprodukten versehen sein.

## 4.2 Tensoren in reellen Vektorräumen

Wir betrachten nun den in der Physik häufig anzutreffenden Fall eines einzigen  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $\mathcal{V}$  über dem Grundkörper  $K = \mathbb{R}$ . In  $\mathcal{V}$  sei eine Basis

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

gegeben. Die dazugehörige duale Basis  $\tilde{\mathcal{V}}$  schreiben wir als

$$\{e^1, \dots, e^n\}, \quad e^i(e_j) = \delta_j^i.$$

Für die Zerlegung eines Vektors  $v \in \mathcal{V}$  bezüglich der gewählten Basis schreiben wir

$$v = e_i v^i, \quad v^i \in \mathbb{R},$$

wobei wir hier die **Einsteinsche Summenkonvention** verwenden, nach der über **doppelt** vorkommende Indizes **summiert** wird, d.h.

$$v = e_i v^i \equiv \sum_{i=1}^n e_i v^i.$$

Analog schreibt man die Zerlegung eines Elements  $l \in \tilde{\mathcal{V}}$  bezüglich der dualen Basis in der Form

$$l = e^i l_i.$$

Für den Raum<sup>1</sup>

$$V^p{}_q = \underbrace{\mathcal{V} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{\tilde{\mathcal{V}} \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{V}}}_{q\text{-mal}}$$

kann man durch

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}\}, \quad 1 \leq i_k, j_k \leq n,$$

eine Basis konstruieren. Ein Element  $T \in V^p{}_q$  hat dann bezüglich dieser Basis die Zerlegung

$$T = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q},$$

wobei

$$T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).$$

Man bezeichnet  $T$  als  $p$ -fach kontravarianten und  $q$ -fach kovarianten Tensor der Stufe  $p + q$ , oder kurz als Tensor vom Typ  $(p, q)$ . In dieser Sprechweise sind die Elemente  $v = e_i v^i$  des Vektorraums  $\mathcal{V}$  Tensoren vom Typ  $(1, 0)$ , die Elemente

---

<sup>1</sup>Beachten Sie die Identifizierung  $\tilde{\tilde{\mathcal{V}}} = \mathcal{V}$ .

$l = e^i l_i$  des Dualraums  $\tilde{\mathcal{V}}$  Tensoren vom Typ  $(0, 1)$  und Skalare Tensoren vom Typ  $(0, 0)$ .

Ein Basiswechsel in  $\mathcal{V}$ ,

$$e_k = S \bar{e}_k = \bar{e}_i S^i_k \Leftrightarrow e^l = (S^{-1})^l_j \bar{e}^j,$$

wird durch eine **invertierbare** Abbildung  $S \in L(\mathcal{V})$  bewerkstelligt. Bezeichnet man die Komponenten des Tensors  $T$  bezüglich der neuen Basis mit  $\bar{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ , so erhält man das Transformationsgesetz

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = S^{i_1}_{k_1} \dots S^{i_p}_{k_p} T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} (S^{-1})^{l_1}_{j_1} \dots (S^{-1})^{l_q}_{j_q}.$$

**Bemerkung:** In der saloppen Sprechweise der Physik werden die Komponenten  $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  eines Tensors oft als „Tensor“ bezeichnet, wobei man ihn durch sein Transformationsverhalten bei einem Basiswechsel charakterisiert.

### 4.3 Metrischer Tensor

Im Raum der Tensoren vom Typ  $(0, 2)$  bilden die **symmetrischen** Elemente,

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1), \quad v_{1,2} \in \mathcal{V},$$

einen Teilraum. Bezüglich einer Basis hat ein solcher Tensor die Gestalt

$$g = e^i \otimes e^j g_{ij}, \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Bei einem Basiswechsel transformieren die Tensorkomponenten gemäß

$$\bar{g}_{ij} = g_{kl} (S^{-1})^k_i (S^{-1})^l_j \Leftrightarrow S^i_k \bar{g}_{ij} S^j_l = g_{kl}.$$

Man kann daher stets eine Basis finden, sodass

$$g_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}, \quad \sigma_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ist zusätzlich  $\sigma_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$  erfüllt, nennt man  $g$  **nichtsingulär**.  $g$  ist dann ein sogenannter **metrischer Tensor**. In diesem Fall folgt aus  $g(v, w) = 0 \forall w \in \mathcal{V}$ , dass  $v = 0$  sein muss. Durch

$$\tilde{v}(w) = g(v, w), \quad v \in \mathcal{V} \text{ fest}, \quad w \in \mathcal{V}$$

kann man jedem Vektor  $v \in \mathcal{V}$  ein lineares Funktional  $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$  zuordnen. Als Folge der Nichtsingularität von  $g$  ist diese Zuordnung injektiv und wegen  $\dim \mathcal{V} = \dim \tilde{\mathcal{V}}$



auch surjektiv. Bei Vorliegen eines metrischen Tensors kann somit der Vektorraum  $\mathcal{V}$  mit seinem Dualraum  $\mathcal{V}$  auf **basisunabhängige** Weise identifiziert werden.

Ist eine Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  von  $\mathcal{V}$  gegeben, dann besteht wegen

$$\tilde{e}_i(v) = g(e_i, v) = g(e_i, e_j v^j) = g_{ij} v^j = g_{ij} e^j(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

die Beziehung

$$\tilde{e}_i = g_{ij} e^j.$$

Ist ein Vektor  $v = e_i v^i \in \mathcal{V}$  gegeben, dann bezeichnen wir die Komponenten von  $\tilde{v}$  bezüglich der dualen Basis  $\{e^1, \dots, e^n\}$  mit  $v_i$  (untere Indizes):

$$\tilde{v} = e^i v_i.$$

Da andererseits

$$\tilde{v} = e^i g_{ij} v^j,$$

besteht zwischen den Komponenten mit unteren und oberen Indizes die Beziehung

$$v_i = g_{ij} v^j.$$

Man kann daher schreiben:

$$\tilde{v}(w) = \tilde{w}(v) = g(v, w) = g(e_i v^i, e_j w^j) = v^i g_{ij} w^j = v^i w_i = w^i v_i, \quad v, w \in \mathcal{V}.$$

**Bemerkung:** Für einen metrischen Tensors  $g$  ist die Abbildung

$$(v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto g(v, w)$$

zwar bilinear und symmetrisch, aus der Nichtsingularität von  $g$  folgt aber nicht notwendigerweise, dass  $g(v, v) \geq 0$  ist, oder dass  $g(v, v) = 0$  auch  $v = 0$  impliziert. Ein metrischer Tensor definiert also im Allgemeinen **kein** Skalarprodukt im Sinne eines euklidischen Vektorraumes. Ist allerdings (bezüglich der oben besprochenen Basis)  $\sigma_i = \sigma \forall i = 1, \dots, n$ , dann wird durch  $(v|w) = \sigma g(v, w)$  ein positiv definites Skalarprodukt definiert.

**Beispiele:**

1. Definiert man im  $\mathbb{R}^n$  einen metrischen Tensor  $g$  durch

$$g(e_i, e_j) = g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

bezüglich der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , dann ist durch

$$(x|y) = g(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

das übliche Skalarprodukt des  $E^n$  definiert. Eine orthogonale Transformation  $O$  ist durch die Eigenschaft

$$g(Ox, Oy) = g(x, y), \quad \forall x, y$$

charakterisiert. Beschränkt man sich bei einem Basiswechsel auf orthogonale Transformationen, dann ändern sich die Komponenten  $g_{ij}$  des metrischen Tensors nicht.

2. Der **Minkowskiraum**  $\mathbb{M}$  ist ein vierdimensionaler reeller Vektorraum mit einem metrischen Tensor  $g$ , dessen Komponenten bezüglich einer Basis  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  die Diagonalgestalt

$$g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{22} = -1, g_{33} = -1$$

besitzen. Dieser Raum spielt in der speziellen Relativitätstheorie eine zentrale Rolle. Ein zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  an einem Ort mit den kartesischen Koordinaten  $x^1, x^2, x^3$  stattfindendes **Ereignis** wird durch Element des Minkowskiraumes (einen sogenannten **Raum-Zeit-Vierervektor**),

$$x = e_\mu x^\mu,$$

beschrieben, wobei  $x^0 = ct$  ist ( $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit). Der Ausdruck

$$g(x, y) = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu = x \cdot y$$

ist das **Viererskalarprodukt** der beiden Vierervektoren  $x, y$ . Unter dem **Viererabstand** des Ereignisses  $x$  vom Ereignis 0 (Ursprung des Minkowskiraumes) versteht man den Ausdruck

$$g(x, x) = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x \cdot x = c^2 t^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}.$$

Ist  $g(x, x) > 0$  ( $x$  ist ein **zeitartiger** Vierervektor), dann ist eine kausale Verknüpfung des Ereignisses  $x$  mit dem Ereignis 0 durch Signale mit Unterlichtgeschwindigkeit möglich. Ist  $g(x, x) = 0$  ( $x$  ist ein **lichtartiger** Vierervektor), dann ist diese Verbindung nur durch Lichtsignale möglich. Für  $g(x, x) < 0$  ( $x$  ist ein **raumartiger** Vierervektor) besteht keine kausale Verknüpfung zwischen den Ereignissen  $x$  und 0.

Eine **Lorentztransformation**  $L \in L(\mathbb{M})$  ist dadurch charakterisiert, dass sie die Eigenschaft

$$g(Lx, Ly) = g(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{M}$$

erfüllt. Die Menge der Lorentztransformationen bildet eine Gruppe, die Lorentzgruppe  $\mathcal{L}$ . Wichtig ist die Untergruppe

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{L \in \mathcal{L} \mid \det L = +1, L^0_0 \geq 1\}$$

der **eigentlichen orthochronen** Lorentztransformationen. Wird eine Basistransformation mit Hilfe eines Elements  $L \in \mathcal{L}_+^\dagger$  durchgeführt, dann entspricht dies dem Wechsel vom ursprünglichen Bezugssystem in ein anderes Inertialsystem.

## 4.4 Levi-Cività-Tensor

Wir betrachten einen  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $\mathcal{V}$ . Die **total antisymmetrischen** Tensoren vom Typ  $(0, n)$ ,

$$T(v^{(1)}, \dots, v^{(i)}, \dots, v^{(j)}, \dots, v^{(n)}) = -T(v^{(1)}, \dots, v^{(j)}, \dots, v^{(i)}, \dots, v^{(n)}),$$

bilden einen Teilraum von  $\mathcal{V}_n^0$ . Normiert man für  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  den total antisymmetrischen Tensor  $\epsilon$  durch

$$\epsilon(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

dann ist dieser Tensor natürlich nichts anderes als die Determinante,  $\epsilon \equiv \det$ . Bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  sind die Komponenten des  $\epsilon$ -Tensors (oder Levi-Cività-Tensors) daher durch

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \epsilon(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \begin{cases} 1 & i_1, \dots, i_n \text{ gerade Permutation von } 1, \dots, n \\ -1 & i_1, \dots, i_n \text{ unger. Permutation von } 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Wegen  $\det(AB) = \det A \det B$  verhalten sich die Komponenten des Levi-Cività-Tensors bei einem Basiswechsel  $e_i = S\bar{e}_i$  gemäß der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 \dots i_n} &= \epsilon(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \epsilon(S\bar{e}_{i_1}, \dots, S\bar{e}_{i_n}) = \det S \epsilon(\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n}) \\ &= \det S \bar{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}. \end{aligned}$$

Geschieht der Basiswechsel durch eine **unimodulare** Transformation  $S$  (das ist eine Abbildung mit  $\det S = 1$ ), dann ändern sich die Komponenten des  $\epsilon$ -Tensors demnach nicht.

Im Fall  $n = 2$  ist

$$\epsilon(x, y) = \epsilon(e_i x^i, e_j y^j) = \epsilon_{ij} x^i y^j = x^1 y^2 - x^2 y^1$$

nichts anderes als der **orientierte Flächeninhalt** des von den Vektoren  $x, y$  aufgespannten Parallelogramms.

Für  $n = 3$  ist

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon(e_i x^i, e_j y^j, e_k z^k) = \epsilon_{ijk} x^i y^j z^k$$

das **orientierte Volumen** des von den Vektoren  $x, y, z$  aufgespannten Parallelepipeds.

Allgemein ist im  $\mathbb{R}^n$  durch  $\epsilon(v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$  das orientierte Volumen des von den Vektoren  $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten  $n$ -dimensionalen Gebiets

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v^{(i)} \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

gegeben.

## 4.5 Tensoren im dreidimensionalen Raum

Beschränkt man sich im dreidimensionalen euklidischen Raum auf Basistransformationen  $S \in SO(3)$ , so wird eine rechtshändige orthonormierte Standardbasis  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  wieder in eine gleich orientierte Orthonormalbasis übergeführt. In diesem Fall ändern sich die Komponenten des metrischen Tensors  $g_{ij} = \delta_{ij}$  bei einem Basiswechsel nicht und es kann auf die Unterscheidung oberer und unterer Indizes verzichtet werden. Man schreibt dann einfach (unter Verwendung der Summenkonvention)  $\vec{x} = \vec{e}_i x_i$  für Vektoren und  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i$  für das Skalarprodukt von  $\vec{x}, \vec{y}$ .

Wegen der Unimodularität von  $SO(3)$ -Matrizen ändern sich auch die Komponenten des dreidimensionalen  $\epsilon$ -Tensors,

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i, j, k \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{falls } i, j, k \text{ unger. Permutation von } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bei einer derartigen Basistransformation nicht.

Das **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  steht normal auf die von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannte Fläche, seine Richtung ist durch die Rechtsschraubenregel (Rechte-Hand-Regel) festgelegt. Die Länge ist gleich der Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms  $= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ . Das Kreuzprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist bilinear und antisymmetrisch ( $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ).

Die Wirkung des Vektorprodukts auf die Vektoren einer rechtshändigen Orthonormalbasis,

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2,$$

lässt sich mit Hilfe des  $\epsilon$ -Tensors in kompakter Form ausdrücken:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k.$$

Sind  $\vec{a} = \vec{e}_i a_i$  und  $\vec{b} = \vec{e}_i b_i$  bezüglich der Orthonormalbasis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  gegeben, so folgt aus der Bilinearität des Kreuzprodukts und der obigen Formel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_j a_j \times \vec{e}_k b_k = \vec{e}_j \times \vec{e}_k a_j b_k = \vec{e}_i \epsilon_{jki} a_j b_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Das heißt, die  $i$ -te Komponente von  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist gegeben durch:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Das **Spatprodukt**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \epsilon_{ijk} b_j c_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ergibt das orientierte Volumen des von den Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  aufgespannten Parallelepipeds (positives Vorzeichen falls  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  Rechtssystem, negatives Vorzeichen für Linkssystem).

**Aufgabe:** Beweisen Sie die oft benötigten Relationen

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad \epsilon_{imn} \epsilon_{jmn} = 2\delta_{ij}.$$

Hinweis: Beweis der ersten Formel entweder durch Ausprobieren aller Möglichkeiten oder durch Verwendung von  $\epsilon_{ijk} = \det(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  und den bekannten Rechenregeln für Determinanten ( $\det A^T = \det A$ ,  $\det(AB) = \det A \det B$ ). Die zweite Formel (mit zwei überschobenen Indizes) folgt dann aus der ersten.

Zeigen Sie damit:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}).$$

## 4.6 Tensorprodukt von Zustandsräumen

Wird ein Teil  $A$  eines Quantensystems durch den Zustandsraum  $\mathcal{H}^{(A)}$  und ein Teil  $B$  durch den Zustandsraum  $\mathcal{H}^{(B)}$  beschrieben, dann ist das Tensorprodukt

$$\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$$

der geeignete Zustandsraum für das Gesamtsystem  $A \cup B$ . Wir wollen der Einfachheit halber wieder annehmen, dass  $\mathcal{H}^{(A)}$  und  $\mathcal{H}^{(B)}$  **endlichdimensionale** unitäre Vektorräume mit Skalarprodukten

$$\langle \varphi^{(A)} | \psi^{(A)} \rangle_{\mathcal{H}^{(A)}}, \varphi^{(A)}, \psi^{(A)} \in \mathcal{H}^{(A)}, \quad \langle \varphi^{(B)} | \psi^{(B)} \rangle_{\mathcal{H}^{(B)}}, \varphi^{(B)}, \psi^{(B)} \in \mathcal{H}^{(B)}$$

sind. Das Skalarprodukt in  $\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$  wird durch

$$\langle \varphi^{(A)} \otimes \varphi^{(B)} | \psi^{(A)} \otimes \psi^{(B)} \rangle_{\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}} = \langle \varphi^{(A)} | \psi^{(A)} \rangle_{\mathcal{H}^{(A)}} \langle \varphi^{(B)} | \psi^{(B)} \rangle_{\mathcal{H}^{(B)}}$$

zusammen mit der Linearitätsforderung erklärt.

Ist

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \quad \varphi_a \in \mathcal{H}^{(A)}$$

eine ONB von  $\mathcal{H}^{(A)}$  und

$$\{\chi_1, \dots, \chi_\nu\}, \quad \chi_\alpha \in \mathcal{H}^{(B)}$$

eine ONB von  $\mathcal{H}^{(B)}$ , dann ist

$$\{\varphi_a \otimes \chi_\alpha\}, \quad 1 \leq a \leq n, \quad 1 \leq \alpha \leq \nu$$

eine ONB von  $\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$ . Ein Vektor  $\Psi \in \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$  besitzt dann bezüglich dieser ONB die Darstellung

$$\Psi = \sum_{a=1}^n \sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_a \otimes \chi_\alpha c_{a\alpha}, \quad c_{a,\alpha} = \langle \varphi_a \otimes \chi_\alpha | \Psi \rangle \in \mathbb{C}.$$

Besteht zwischen den beiden Teilen des Systems keine Wechselwirkung, dann ist jener hermitesche Operator, welcher der Observablen „Gesamtenergie des Systems“ entspricht von der Form

$$H = H^{(A)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H^{(B)}$$

(Hamiltonoperator des Gesamtsystems ohne Wechselwirkung), wobei die hermiteschen Operatoren

$$H^{(A)} = H^{(A)\dagger} \in L(\mathcal{H}^{(A)}), \quad H^{(B)} = H^{(B)\dagger} \in L(\mathcal{H}^{(B)})$$

die Hamiltonoperatoren der Teilsysteme sind. Bei Vorhandensein einer Wechselwirkung zwischen den beiden Teilsystemen hat man

$$H = H^{(A)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H^{(B)} + W,$$

wobei der Wechselwirkungsterm  $W = W^\dagger \in L(\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)})$  die Struktur

$$W = \sum_r (X_r^{(A)} \otimes Y_r^{(B)} + X_r^{(A)\dagger} \otimes Y_r^{(B)\dagger}), \quad X_r^{(A)} \in L(\mathcal{H}^{(A)}), \quad Y_r^{(B)} \in L(\mathcal{H}^{(B)})$$

besitzt.

**Bemerkungen:**

1.  $(X^{(A)} \otimes Y^{(B)})^\dagger = X^{(A)\dagger} \otimes Y^{(B)\dagger}$ ,  $X^{(A)} \in L(\mathcal{H}^{(A)})$ ,  $Y^{(B)} \in L(\mathcal{H}^{(B)})$ .
2. In der physikalischen Literatur findet man oft die Schreibweise  $|a, \alpha\rangle$  statt  $\varphi_a \otimes \chi_\alpha$ . Statt  $X^{(A)} \otimes \mathbb{1}$  und  $\mathbb{1} \otimes Y^{(B)}$  schreibt man kurz  $X^{(A)}$  und  $Y^{(B)}$  wobei der Kommutator  $[X^{(A)}, Y^{(B)}] = 0$  ist. Wegen  $(X^{(A)} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes Y^{(B)}) = X^{(A)} \otimes Y^{(B)}$  schreibt man dann einfach  $X^{(A)} Y^{(B)}$  statt  $X^{(A)} \otimes Y^{(B)}$ .

**Beispiel:** Zwei Spins werden im Zustandsraum  $U^2 \otimes U^2$  beschrieben. Den räumlichen Komponenten von Spin  $A$  entsprechen die Operatoren

$$S_k^{(A)} = \frac{\hbar}{2} \sigma_k \otimes \mathbb{1}, \quad k = 1, 2, 3,$$

jenen von Spin  $B$  die Operatoren

$$S_k^{(B)} = \frac{\hbar}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Der Operator für den Gesamtspinvektor des Systems ist durch

$$\vec{S} = \vec{S}^{(A)} + \vec{S}^{(B)} = \frac{\hbar}{2} (\vec{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{\sigma})$$

gegeben.

Wir wählen die Eigenvektoren von  $\sigma_3$ ,

$$\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

als ONB von  $U^2$ . Dann bilden die Tensorprodukte dieser Vektoren,

$$\chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow, \chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow, \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow, \chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow,$$

eine ONB von  $U^2 \otimes U^2$ . Diese Elemente von  $U^2 \otimes U^2$  sind natürlich auch gleichzeitig Eigenvektoren von  $S_3^{(A)}$  und  $S_3^{(B)}$ :

$$\begin{aligned} S_3^{(A)}(\chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow) &= +\frac{\hbar}{2} \chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow, & S_3^{(B)}(\chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow) &= +\frac{\hbar}{2} \chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow, \\ S_3^{(A)}(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow) &= +\frac{\hbar}{2} \chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow, & S_3^{(B)}(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow) &= -\frac{\hbar}{2} \chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow, \\ S_3^{(A)}(\chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow) &= -\frac{\hbar}{2} \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow, & S_3^{(B)}(\chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow) &= +\frac{\hbar}{2} \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow, \\ S_3^{(A)}(\chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow) &= -\frac{\hbar}{2} \chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow, & S_3^{(B)}(\chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow) &= -\frac{\hbar}{2} \chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Quadrat des Gesamtspinvektors

$$\vec{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{2} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{k=1}^3 \sigma_k \otimes \sigma_k.$$

Unter Verwendung von

$$\sigma_1 \chi_\uparrow = \chi_\downarrow, \quad \sigma_1 \chi_\downarrow = \chi_\uparrow, \quad \sigma_2 \chi_\uparrow = i\chi_\downarrow, \quad \sigma_2 \chi_\downarrow = -i\chi_\uparrow$$

rechnet man leicht nach, dass  $\chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow$  und  $\chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow$  Eigenvektoren von  $\vec{S}^2$  sind:

$$\vec{S}^2(\chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow) = 2\hbar^2 \chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow, \quad \vec{S}^2(\chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow) = 2\hbar^2 \chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow.$$

Dagegen sind  $\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow$  und  $\chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow$  keine Eigenvektoren von  $\vec{S}^2$ . Man erhält vielmehr

$$\begin{aligned} \vec{S}^2(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow) &= \hbar^2(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow + \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow) \\ \vec{S}^2(\chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow) &= \hbar^2(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow - \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow) \end{aligned}$$

Allerdings bilden die Vektoren  $\psi_{s,s_3}$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow - \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow), \\ \psi_{1,1} &= \chi_\uparrow \otimes \chi_\uparrow, \\ \psi_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow \otimes \chi_\downarrow + \chi_\downarrow \otimes \chi_\uparrow), \\ \psi_{1,-1} &= \chi_\downarrow \otimes \chi_\downarrow, \end{aligned} \tag{4.1}$$

eine ONB von Eigenvektoren von  $\vec{S}^2$  und  $S_3$ :

$$\vec{S}^2 \psi_{s,s_3} = s(s+1)\hbar^2 \psi_{s,s_3}, \quad S_3 \psi_{s,s_3} = s_3 \hbar \psi_{s,s_3}.$$

Es gibt also einen Zustand mit Spin  $s = 0$  (Singulett) und drei Zustände mit Spin  $s = 1$  (Triplet).



# Kapitel 5

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 5.1 Grundbegriffe

Unter einer **gewöhnlichen** Differentialgleichung versteht man einen Ausdruck, der **eine unabhängige** Variable  $x$  und eine **abhängige** Variable  $y$  mit einer gewissen Anzahl ihrer Ableitungen enthält:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1.$$

Unter der **Ordnung** der Differentialgleichung versteht man die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung. Eine Funktion  $y(x)$ , welche in einem gewissen Bereich  $I \ni x$  den vorgegebenen Ausdruck identisch erfüllt, heißt **Lösung** der Differentialgleichung.

#### Bemerkungen:

1. Handelt es sich bei der abhängigen Variablen um die Zeit  $t$ , so schreibt man eine Differentialgleichung üblicherweise in der Form

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1.$$

wobei  $x(t)$  gesucht ist.

2. Kommen wenigstens zwei unabhängige Variable vor, spricht man von einer **partiellen** Differentialgleichung. Ein Beispiel wäre die Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

bei der  $u(x, y)$  gesucht ist. Wir werden uns in diesem Kapitel nur mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen.

3. Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} F_1(t, x_1, \dots, x_k, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_k, \dots, x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) &= 0 \\ &\dots = \dots \\ F_l(t, x_1, \dots, x_k, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_k, \dots, x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) &= 0 \end{aligned}$$

bezeichnet man als **System** von  $l$  gewöhnlichen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung für die  $k$  abhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_k$ .

**Beispiele:**

1. **Radioaktiver Zerfall:** Zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien  $N_0$  Atome vorhanden. Wieviele Atome  $N(t)$  sind zum Zeitpunkt  $t$  noch nicht zerfallen? Handelt es sich um eine sehr große Anzahl von Atomen, dann kann man  $N(t)$  durch eine kontinuierliche Funktion approximieren. Im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  hat man

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) \simeq -\lambda N(t) \Delta t$$

wobei  $\lambda > 0$  eine für die betrachtete Substanz charakteristische Konstante der Dimension (Zeit) $^{-1}$  ist. Im Limes  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Ihre **allgemeine** Lösung

$$N(t) = C e^{-\lambda t}$$

enthält eine willkürliche **Integrationskonstante**  $C$ , deren Wert durch die **Anfangsbedingung**  $N(0) = N_0$  festgelegt wird:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

2. **Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Partikel:** Die Bewegung eines Teilchens mit Masse  $m$  wird in der (nichtrelativistischen) Mechanik durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

beschrieben. Die Gestalt der auf das Teilchen wirkenden Kraft  $\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$  hängt von der gegebenen physikalischen Situation ab. Explizit angeschrieben hat man

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ m\ddot{x}_3 &= F_3(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \end{aligned}$$

Es handelt sich also um ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

3. **Kräftefreie Bewegung:** Im Fall  $\vec{F} = 0$  entkoppeln die drei Differentialgleichungen und es genügt, die Bewegungsgleichung für **einen** Freiheitsgrad  $x$  zu untersuchen:

$$\ddot{x} = 0.$$

Einmalige Integration liefert

$$\dot{x}(t) = C_1,$$

und nochmaliges Integrieren ergibt die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 t + C_2.$$

Befindet sich das Teilchen zum Zeitpunkt  $t = 0$  am Ort  $x^{(0)}$  und besitzt die Geschwindigkeit  $v^{(0)}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x(0) = C_2 \\ v^{(0)} &= v(0) = C_1 \end{aligned}$$

und somit

$$x(t) = v^{(0)}t + x^{(0)}.$$

Für alle drei Freiheitsgrade bekommt man die allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = \vec{v}^{(0)}t + \vec{x}^{(0)},$$

das heißt, das Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}^{(0)}$ .

4. **Bewegung in konstantem Gravitationsfeld:** Auch für  $\vec{F} = -mg\vec{e}_3$  entkoppeln die drei Differentialgleichungen. Für  $x_1, x_2$  ergibt sich nichts Neues, dagegen lautet die Differentialgleichung für  $x_3$  jetzt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3 &= -g \\ \Rightarrow \dot{x}_3(t) &= -gt + C_1 \\ \Rightarrow x_3(t) &= -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Wieder können die beiden Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  der allgemeinen Lösung durch die Anfangsbedingungen  $x_3(0) = x_3^{(0)}$ ,  $\dot{x}_3(0) = v_3^{(0)}$  ausgedrückt werden:

$$C_2 = x_3^{(0)}, C_1 = v_3^{(0)} \quad \Rightarrow \quad x_3(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_3^{(0)}t + x_3^{(0)}.$$

Zusammen mit den Lösungen für die beiden anderen Freiheitsgrade  $x_1, x_2$ , erhält man als vollständige Lösung:

$$\vec{x}(t) = -\frac{gt^2}{2}\vec{e}_3 + \vec{v}^{(0)}t + \vec{x}^{(0)}$$

## 5.2 Richtungsfeld

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich in der expliziten Form

$$y' = f(x, y)$$

schreiben lassen, kann man sich durch die graphische Darstellung des **Richtungsfeldes** in der  $x - y$ -Ebene einen qualitativen Überblick über die Lösungskurven der Differentialgleichung verschaffen. Durch  $y' = f(x, y)$  wird nämlich jedem Punkt  $(x, y)$  die **Steigung** der durch ihn gehenden Lösungskurve zugeordnet. Dazu zeichnet man zunächst einige **Kurven konstanter Steigung** (sogenannte **Isoklinen**)

$$f(x, y) = k = \text{const.}$$

in der  $x - y$ -Ebene. Längs der Isokline  $f(x, y) = k$  zeichnet man eine Anzahl von kurzen **Linielementen** mit Steigung  $k$ . Das führt man jetzt für alle eingezeichneten Isoklinen durch und erhält auf diese Weise ein Feld von Linielementen, das sogenannte Richtungsfeld der Differentialgleichung. Die Lösungen der Differentialgleichung sind nun jene Kurven, die in das Richtungsfeld „hineinpassen“.

**Beispiel:** Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = -\lambda y$  und skizzieren Sie die Lösungskurven. Vergleichen Sie ihr Resultat mit der exakten Lösung.

## 5.3 Trennung der Variablen

Lässt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

schreiben, so erhält man ihre allgemeine Lösung durch Integration von

$$dy g(y) = dx f(x).$$

Das heißt

$$\underbrace{\int dy g(y)}_{G(y)} = \underbrace{\int dx f(x)}_{F(x)} + C,$$

wobei  $F$  die Stammfunktion von  $f$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  ist.

**Beispiele:**

1. Die Lösungen der bereits früher besprochenen Differentialgleichung  $y' = -\lambda y$  lassen sich auf diese Weise finden:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = -\lambda dx &\Rightarrow \ln |y| = -\lambda x + \ln c \\ \Rightarrow |y| = ce^{-\lambda x} &\Rightarrow y = \pm ce^{-\lambda x} \Rightarrow y = Ce^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} y' = -2\lambda xy &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -2\lambda x dx \\ \Rightarrow \ln |y| = -\lambda x^2 + \ln cx &\Rightarrow |y| = ce^{-\lambda x^2} \\ \Rightarrow y = \pm ce^{-\lambda x^2} &\Rightarrow y = Ce^{-\lambda x^2} \end{aligned}$$

3. Die eindimensionale Bewegung eines Körpers mit Masse  $m$  in einem konstanten Gravitationsfeld bei Berücksichtigung des Luftwiderstands wird durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = mg - k|\dot{x}|\dot{x}, \quad k > 0$$

beschrieben. Für die Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  erhält man daher eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$m\dot{v} = mg - k|v|v$$

Unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit nähert sich für  $t \rightarrow \infty$  die Geschwindigkeit  $v(t)$  asymptotisch der Grenzgeschwindigkeit

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

an. Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn man statt der Geschwindigkeit  $v$  die dimensionslose Variable  $u$ ,

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}u$$

und statt der Zeit die dimensionslose Variable

$$\tau = \sqrt{\frac{gk}{m}}t$$

verwendet. In den neuen Variablen hat die Differentialgleichung die einfache Form

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - |u|u.$$

**Aufgabe:** Zeichnen Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung und skizzieren Sie die Lösungskurven. Welche Fälle sind zu unterscheiden? Geben Sie eine physikalische Interpretation!

Wegen

$$\frac{du}{1 - |u|u} = d\tau$$

sind bei der Integration der Differentialgleichung die Fälle  $u > 1$ ,  $u = 1$  und  $u < 1$  zu unterscheiden.

(a) Für  $u > 1$  hat man

$$\frac{du}{1 - u^2} = d\tau.$$

Wegen

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u + 1} - \frac{1}{u - 1} \right)$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \ln \frac{u + 1}{u - 1} = \tau - \tau_0 \\ \Rightarrow & u(\tau) = \coth(\tau - \tau_0) \quad \text{für } \tau - \tau_0 > 0. \end{aligned}$$

(b) Der Fall  $u = 1$  entspricht der Bewegung mit konstanter Grenzgeschwindigkeit.

(c) Für  $u < 1$  muss man die folgenden zwei Fälle unterscheiden:

$$1 - |u|u = \begin{cases} 1 + u^2 & \text{für } u < 0 \\ 1 - u^2 & \text{für } 0 \leq u < 1 \end{cases}$$

Im ersten Fall ( $u < 0$ ) ergibt die Integration

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u = \tau - \tau_0$$

und im zweiten Fall ( $0 \leq u < 1$ )

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1 - u^2} &= \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{u + 1} + \frac{1}{u - 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1 + u) - \ln(1 - u)] = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u}{1 - u} = \tau - \tau_0 \end{aligned}$$

Somit erhält man die Lösung

$$u(\tau) = \begin{cases} \tan(\tau - \tau_0) & \text{für } -\frac{\pi}{2} < \tau - \tau_0 \leq 0 \\ \tanh(\tau - \tau_0) & \text{für } \tau - \tau_0 \geq 0 \end{cases}$$

$u(\tau)$  ist an der „Anstückelungsstelle“  $\tau - \tau_0$  stetig differenzierbar.

Man kann nun die Lösung der Bewegungsgleichung wieder durch die ursprünglichen Variablen  $t, v$  ausdrücken. Die Grenzgeschwindigkeit  $v_\infty = \sqrt{mg/k}$  gestattet die Klassifizierung der drei Lösungstypen:

- (a) Ist die Anfangsgeschwindigkeit größer als die Grenzgeschwindigkeit, dann ist

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \coth \left( \sqrt{\frac{gk}{m}} (t - t_0) \right), \quad t > t_0.$$

- (b)  $v(t) = v_\infty$  ist eine Lösung der Bewegungsgleichung.

- (c) Ist die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als die Grenzgeschwindigkeit, dann ist

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \times \begin{cases} \tan \left( \sqrt{\frac{mg}{k}} (t - t_0) \right), & -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mg}{k}} < t - t_0 \leq 0 \\ \tanh \left( \sqrt{\frac{mg}{k}} (t - t_0) \right), & t - t_0 \geq 0 \end{cases}$$

**Bemerkung:** Differentialgleichungen vom Typ

$$y' = g \left( \frac{y}{x} \right)$$

können durch die Substitution  $u = y/x$  auf eine Form gebracht werden, in der die Trennung der neuen Variablen  $x, u$  möglich ist:

$$\begin{aligned} y(x) = u(x)x &\Rightarrow y' = u + u'x \\ \Rightarrow u + u'x = g(u) &\Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Um die Lösung der Differentialgleichung

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

zu finden, dividiert man zu nächst durch  $x^2$ ,

$$2\frac{y}{x}y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Mit Hilfe der Substitution  $u = y/x$  erhält man

$$2u(u + u'x) - u^2 + 1 = 0$$

oder

$$2xuu' + u^2 + 1 = 0.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Die Integration ergibt

$$\begin{aligned} \ln(u^2 + 1) &= -\ln|x| + k \\ \Rightarrow u^2 + 1 &= \frac{2c}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{2c}{x} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 2cx \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 = c^2 \end{aligned}$$

## 5.4 Exakte Differentialgleichungen

In der  $x - y$ -Ebene seien Kurvenscharen durch die implizite Gleichung

$$\Phi(x, y) = C$$

gegeben. Wenn wir annehmen, dass  $\Phi$  in einem gewissen Bereich stetig differenzierbar ist, dann erfüllen diese Kurven die Differentialgleichung

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy = 0$$

oder

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y' = 0.$$

Ist  $\Phi$  zwei mal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Wenn nun umgekehrt eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} P(x, y) + Q(x, y)y' &= 0 \\ \Leftrightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \end{aligned}$$

gegeben ist, so heißt diese **exakt**, wenn  $P$  und  $Q$  in einem **einfach zusammenhängenden** Gebiet der  $x - y$ -Ebene stetig differenzierbar sind, und die **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

erfüllen. Dann existiert eine Funktion  $\Phi(x, y)$  mit

$$P = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$$



und  $\Phi(x, y) = C$  ist die Lösungsschar der exakten Differentialgleichung.

**Beispiel:** Die Differentialgleichung

$$ye^{xy}dx + (2 + xe^{xy})dy = 0$$

ist exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = \frac{\partial}{\partial x}(2 + xe^{xy})$$

in der gesamten  $x - y$ -Ebene erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} &= ye^{xy} \Rightarrow \Phi(x, y) = e^{xy} + f(y) \\ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} &= xe^{xy} + f'(y) = 2x + xe^{xy} \\ \Rightarrow f'(y) &= 2 \Rightarrow f(y) = 2y + k \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Die Lösungen der Differentialgleichungen sind die Kurven

$$e^{xy} + 2y = C.$$

Ist bei einer Differentialgleichung der Gestalt

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

die Integritätsbedingung **nicht** erfüllt, so kann man versuchen, sie durch Multiplikation mit einem **integrierenden Faktor**  $\mu(x, y)$  exakt zu machen. Die Funktion  $\mu$  muss in diesem Fall die Bedingung

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

erfüllen.  $\mu$  ist also eine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} P = \mu \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

Es ist nun keineswegs nötig die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung zu kennen, es genügt eine spezielle Lösung für  $\mu(x, y)$  zu finden.

**Beispiel:** Die Differentialgleichung

$$(x^2 + 2y)dx + xdy = 0$$

ist nicht exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2y) = 2 \neq \frac{\partial}{\partial y}x = 1.$$

Ein integrierender Faktor  $\mu(x, y)$  muss die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x^2 + 2y) + 2\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu$$

erfüllen. Wir versuchen für  $\mu$  eine Lösung zu finden, die nur von  $x$  abhängt.

$$\Rightarrow \mu'(x)x = \mu(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = kx.$$

Wir wählen  $k = 1$  und erhalten die exakte Differentialgleichung

$$x(x^2 + 2y)dx + x^2dy = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = x^2 &\Rightarrow \Phi(x, y) = x^2y + f(x) \\ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = 2xy + f'(x) &= x^3 + 2xy \\ \Rightarrow f'(x) = x^3 &\Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + k \end{aligned}$$

Somit erhält man als Lösung der Differentialgleichung:

$$x^2y + \frac{x^4}{4} = C.$$

## 5.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

geschrieben werden kann. Wesentlich ist, dass  $y$  und  $y'$  nur linear enthalten sind (d.h. in der ersten Potenz stehen). Ist  $Q(x) \equiv 0$  heißt die Gleichung **homogen**, andernfalls nennt man sie **inhomogen**.

Die allgemeine Lösung  $y_h(x)$  der homogenen Gleichung

$$y'_h + P(x)y_h = 0$$

findet man durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy_h}{y_h} &= -P(x)dx \\ \Rightarrow \ln |y_h| &= -\int dx P(x) + \ln c \\ \Rightarrow y_h(x) &= Ce^{-\int dx P(x)}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man nun als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer **speziellen** (partiikulären) Lösung  $y_s(x)$  der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x)$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man durch die auf Lagrange zurückgehende Methode der **Variation der Konstanten**. Darunter versteht man den Ansatz

$$y_s(x) = C(x)e^{-\int dx P(x)}$$

für die spezielle Lösung.

$$\begin{aligned} y'_s(x) + P(x)y_s(x) &= C'(x)e^{-\int dx P(x)} = Q(x) \\ \Rightarrow C'(x) &= Q(x)e^{\int dx P(x)} \Rightarrow C(x) = \int dx Q(x)e^{\int dx P(x)}. \end{aligned}$$

### Beispiele:

1. Die eindimensionale Bewegung eines Körpers mit Masse  $m$ , auf den eine konstante Kraft  $F_0$  und eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft  $-c\dot{x}$  wirkt, wird durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = F_0 - c\dot{x}$$

beschrieben (z.B. Kugel in zäher Flüssigkeit). Für die Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  erhält man die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$m\dot{v} + cv = F_0, \quad c > 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\dot{v}_h + \frac{c}{m}v_h = 0$$

ist durch

$$v_h(t) = Ke^{-ct/m}$$

gegeben, wobei  $K$  eine Integrationskonstante ist. Man sieht sofort, dass

$$v_s(t) = \frac{F_0}{c}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Somit ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$v(t) = v_h(t) + v_s(t) = Ke^{-ct/m} + \frac{F_0}{c}.$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann durch die Anfangsbedingung  $v(0) = v_0$  fixiert werden:

$$K = v_0 - \frac{F_0}{c}.$$

Die Geschwindigkeit

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{F_0}{c}$$

ist proportional zur konstanten Kraft  $F_0$  und unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  („Aristotelische Physik“).  $\tau = m/c$  ist ein Maß für die Zeitdauer, innerhalb der sich  $v_\infty$  einstellt.

2. Führt man in dem vorigen Beispiel die Ersetzungen

$$\begin{aligned} v &\rightarrow I && \text{(Strom)} \\ m &\rightarrow L && \text{(Induktivität)} \\ c &\rightarrow R && \text{(Widerstand)} \\ F_0 &\rightarrow U_0 && \text{(EMK)} \end{aligned}$$

durch, so erhält man die Differentialgleichung eines  $RL$ -Kreises:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U_0$$

Setzt man in

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + \left( I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-Rt/L}$$

$I_0 = 0$ , so erhält man das zeitliche Verhalten des Stromes nach dem Einschalten der Spannungsquelle:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

Die Größe  $\tau = L/R$  ist ein Maß für die Zeitdauer, in welcher der Strom  $I_\infty = U_0/R$  (praktisch) erreicht wird.

3. Im Fall einer zeitabhängigen EMK  $U(t)$  ist die Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U(t)$$

zu lösen. Wie vorhin, hat man als Lösung der homogenen Gleichung

$$I_h(t) = K e^{-Rt/L},$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man daraus durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} I_s &= K(t) e^{-Rt/L} \\ \Rightarrow L \dot{K}(t) e^{-Rt/L} &= U(t) \\ \Rightarrow \dot{K}(t) &= \frac{1}{L} U(t) e^{Rt/L}. \end{aligned}$$

Eine mögliche Wahl von  $I_s(t)$  ist daher

$$I_s(t) = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int_0^t dt' U(t') e^{Rt'/L}.$$

Als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir den Ausdruck

$$I(t) = K e^{-Rt/L} + \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int_0^t dt' U(t') e^{Rt'/L}$$

wobei  $K = I(0)$  ist.

4. Wir wollen noch den wichtigen Spezialfall einer Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

behandeln. Es ist vorteilhaft, die Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U_0 \underbrace{e^{i\omega t}}_{\cos \omega t + i \sin \omega t}$$

für eine **komplexe** Größe  $I(t)$  zu lösen und am Ende den Realteil von  $I(t)$  zu nehmen. Nach unseren vorangegangenen Überlegungen ist

$$\begin{aligned} I(t) &= K e^{-Rt/L} + \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int_0^t dt' U_0 e^{i\omega t'} e^{Rt'/L} \\ &= K e^{-Rt/L} + U_0 e^{-Rt/L} \frac{e^{i\omega t} e^{Rt/L} - 1}{R + i\omega L} \\ &= K e^{-Rt/L} + U_0 \frac{R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} (e^{i\omega t} - e^{-Rt/L}). \end{aligned}$$

Mit

$$R + i\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{i\delta}, \quad \delta = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

erhalten wir als komplexe Lösung

$$I(t) = \left( K - \frac{U_0 e^{-i\delta}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right) e^{-Rt/L} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}$$

und somit die reelle Lösung

$$I(t) = \left( I(0) - \frac{U_0 \cos \delta}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right) e^{-Rt/L} + \frac{U_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

für  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ . Nach einer Einschwingphase der Dauer  $\tau \sim L/R$  stellt sich eine phasenverschobene Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  ein, die unabhängig von der Anfangsbedingung  $I(0)$  ist.

## 5.6 Bernoullische Differentialgleichung

Die Bernoullische Differentialgleichung

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 1,$$

lässt sich durch Einführung der neuen Variablen  $z = y^{1-n}$  auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen:

$$\begin{aligned} z' = (1-n)y^{-n}y' &\Rightarrow y' = \frac{z'y^n}{1-n} \\ &\Rightarrow \frac{z'y^n}{1-n} + P(x)zy^n = Q(x)y^n \\ &\Rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \end{aligned}$$

**Beispiel:**  $y' + y = xy^{2/3}$

$$\begin{aligned} n = \frac{2}{3} &\Rightarrow z' + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}x \\ z_h(x)Ce^{-x/3}, \quad z_s(x) &= C(x)e^{-x/3} \\ C'(x)e^{-x/3} = \frac{1}{3}x &\Rightarrow C'(x) = \frac{1}{3}xe^{x/3} \\ C(x) = xe^{x/3} - \int dx e^{x/3} &= (x-3)e^{x/3} \\ z_s(x) &= x-3 \\ z(x) = z_h(x) + z_s(x) &= Ce^{-x/3} + x-3 \\ y(x) = z(x)^3 &= (Ce^{-x/3} + x-3)^3 \end{aligned}$$

## 5.7 Iterationsverfahren von Picard

Ist die Integration des **Anfangswertproblems**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

nicht exakt möglich, kann man **Näherungsverfahren** anwenden. Ein Beispiel dafür ist das Picardsche Iterationsverfahren. Durch Integration der Differentialgleichung bei Berücksichtigung der Anfangsbedingung erhält man die Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dx' f(x', y(x')).$$

Als nullte Näherung nimmt man die konstante Funktion  $y_0$ , setzt diese in die Integralgleichung ein, um auf diese Weise die erste Näherung

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dx' f(x', y_0)$$

zu erhalten. Man setzt dieses Verfahren nun fort und bekommt

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dx' f(x', y_1(x')).$$

Der  $n$ -te Iterationsschritt liefert

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dx' f(x', y_{n-1}(x')).$$

Man erhält auf diese Weise eine Folge von Funktionen

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots,$$

die unter gewissen Voraussetzungen (siehe nächster Abschnitt) gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

**Beispiel:** Behandeln Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der exakten Lösung.

## 5.8 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Das Anfangswertproblem

$$xy' = 2y, \quad y(0) = 1$$

besitzt **keine** Lösung. Das Anfangswertproblem

$$y' = 2x, \quad y(0) = 1$$

hat **genau eine** Lösung, nämlich  $y(x) = x^2 + 1$ . Das Anfangswertproblem

$$xy' = y - 1, \quad y(0) = 1$$

besitzt **unendlich viele** Lösungen der Form  $y(x) = 1 + kx$  ( $k$  beliebig).

Der folgende **Satz** gibt ein **hinreichendes** Kriterium für die **Existenz** und **Eindeutigkeit** der Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

**Existenz:** Die Funktion  $f(x, y)$  sei in einem offenen Rechteck

$$D = \{(x, y) \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

stetig und beschränkt, das heißt

$$|f(x, y)| \leq K, \quad \forall (x, y) \in D,$$

dann besitzt das Anfangswertproblem **mindestens** eine Lösung, die wenigstens auf dem Intervall  $I = \{x \mid |x - x_0| < \min(a, b/K)\}$  definiert ist.

**Eindeutigkeit:** Ist außerdem die partielle Ableitung  $\partial f / \partial y$  auf  $D$  stetig und beschränkt,

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq M \quad \forall (x, y) \in D,$$

dann besitzt das Anfangswertproblem **nur eine** Lösung, die jedenfalls  $\forall x \in I$  definiert ist. Die Funktionenfolge des Picardschen Iterationsverfahrens konvergiert dann gegen diese Lösung.

**Bemerkung:** Die Voraussetzungen dieses Satzes sind **hinreichend** aber keineswegs notwendig und können daher abgeschwächt werden. So kann etwa  $|\partial f / \partial y| \leq M$  durch die schwächere Voraussetzung

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$$

(**Lipschitz-Bedingung**) ersetzt werden.

## 5.9 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir haben  $n$  abhängige Veränderliche  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  und schreiben das Differentialgleichungssystem in kompakter Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$



mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung ist durch

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

gegeben.

**Beispiele:**

1. Die (nichtrelativistische) Bewegung eines Punktteilchens mit Masse  $m$  und elektromagnetischer Ladung  $q$ , das sich in einem zeitlich und räumlich konstanten Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{n}$  ( $|\vec{n}| = 1$ ) befindet, wird durch

$$m\dot{v} = q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

beschrieben, d.h.

$$\dot{v} = - \underbrace{\frac{qB}{mc}}_{\omega} \vec{n} \times \vec{v}.$$

Die Lösung dieses Systems von drei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ist daher

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= e^{-\omega t \vec{n} \times} \vec{v}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega t)^k}{k!} \underbrace{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dots (\vec{n} \times \vec{v}(0)) \dots)}_{k\text{-mal}} \end{aligned}$$

Man zerlegt den Vektor  $\vec{v}(0)$  in einen Anteil  $\vec{v}(0)_{\parallel}$  parallel zur Richtung des Magnetfeldes und einen Anteil  $\vec{v}(0)_{\perp}$  normal dazu,

$$\vec{v}(0) = \underbrace{\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{v}(0))}_{\vec{v}(0)_{\parallel}} + \underbrace{\vec{v}(0) - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{v}(0))}_{\vec{v}(0)_{\perp}},$$

und erhält somit in den einzelnen Summanden:

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad \vec{v}(0) \\ k = 1 & \quad \vec{n} \times \vec{v}(0)_{\perp} \\ k = 2 & \quad \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}(0)_{\perp}) = -\vec{v}(0)_{\perp} \\ k = 3 & \quad \vec{n} \times (-\vec{v}(0)_{\perp}) = -\vec{n} \times \vec{v}(0)_{\perp} \\ k = 4 & \quad \vec{n} \times (-\vec{n} \times \vec{v}(0)_{\perp}) = \vec{v}(0)_{\perp} \\ & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \vec{v}(0)_\perp (\cos \omega t - 1) - \vec{n} \times \vec{v}(0)_\perp \sin \omega t \\ &= \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}(0)) + [\vec{v}(0) - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}(0))] \cos \omega t - \vec{n} \times \vec{v}(0) \sin \omega t\end{aligned}$$

Durch Integration von  $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$  erhält man die Bahnkurve des Teilchens (Schraubenlinie):

$$\vec{x}(t) = \vec{a} + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}(0))t + \frac{\sin \omega t}{\omega} [\vec{v}(0) - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}(0))] + \frac{\cos \omega t}{\omega} \vec{n} \times \vec{v}(0)$$

2. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$  ist **nicht** diagonalisierbar!

$$\rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^t (x_1(0) + tx_2(0)) \\ x_2(t) &= e^t x_2(0)\end{aligned}$$

Falls die Matrix  $A$  **diagonalisierbar** ist, d.h. wenn  $A$  eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von Eigenvektoren ( $Av_i = a_i v_i$ ) besitzt, haben wir die folgende Situation:

$$\begin{aligned}A &= S\hat{A}S^{-1}, \quad \hat{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad S = (v_1, \dots, v_n) \\ \Rightarrow e^{At} &= Se^{\hat{A}t}S^{-1}, \quad e^{\hat{A}t} = \text{diag}(e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t}).\end{aligned}$$

Zerlegt man den Vektor  $x(0)$  bezüglich der Basisvektoren,

$$x(0) = \sum_{i=1}^n c_i v_i,$$

so erhält man die Lösung in der Form

$$x(t) = e^{At}x(0) = \sum_{i=1}^n c_i e^{a_i t} v_i.$$

**Bemerkung:** Ist für einen der Eigenwerte  $a_i \neq a_i^*$ , dann ist auch  $a_i^*$  ein Eigenwert von  $A$  (da  $A$  reell ist) mit dazugehörigem Eigenvektor  $v_i^*$ .

$$\Rightarrow \text{Re } e^{a_i t} v_i, \text{ Im } e^{a_i t} v_i \text{ sind reelle Lösungen.}$$

## 5.10 Zeitentwicklung in der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik wird die **Zeitentwicklung** eines Zustandsvektors  $\psi(t) \in \mathcal{H}$  (im Schrödingerbild) durch die **Schrödingergleichung**

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t)$$

beschrieben. Dabei ist  $H$  ein hermitescher Operator (**Hamiltonoperator**), welcher der Observablen „Gesamtenergie des betrachteten Systems“ entspricht. Die Lösung der Schrödingergleichung ist dann (wenn  $H$  zeitlich konstant ist) durch

$$\psi(t) = \exp(-iHt/\hbar) \psi(0)$$

gegeben. Da  $H$  hermitesch ist, ist der hier auftretende Operator

$$\exp(-iHt/\hbar)$$

unitär, woraus folgt, dass sich die Norm des Zustandsvektors nicht ändert:

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle.$$

Da  $H$  weiters eine ONB von Eigenvektoren,

$$\{\phi_1, \dots, \phi_n\}, \quad H\phi_k = E_k\phi_k$$

besitzt ( $E_1, \dots, E_n$  sind die Energieeigenwerte), hat  $H$  die Spektraldarstellung

$$H = \sum_{k=1}^n E_k \phi_k \phi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n E_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k|$$

Somit ist

$$\exp(-iHt/\hbar) = \sum_{k=1}^n e^{-iE_k t/\hbar} \phi_k \phi_k^\dagger = \sum_{k=1}^n e^{-iE_k t/\hbar} |\phi_k\rangle \langle \phi_k|$$

und

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp(-iHt/\hbar) \psi(0) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-iE_k t/\hbar} \phi_k \phi_k^\dagger \psi(0) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-iE_k t/\hbar} |\phi_k\rangle \langle \phi_k | \psi(0) \rangle. \end{aligned}$$

## 5.11 Energie

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\ddot{x} = F(x)$$

beschreibt die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse  $m$ , das sich in einem rein ortsabhängigen Kraftfeld  $F(x)$  befindet. Schreibt man das Kraftfeld mit Hilfe der **potentiellen Energie**  $V(x)$  in der Form

$$F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x},$$

so erhält man

$$m\ddot{x}\dot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\right) = 0.$$

Die **Gesamtenergie**

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$$

bleibt somit während der gesamten Bewegung konstant, man spricht von einer sogenannten **Erhaltungsgröße**. Durch die Existenz dieser Erhaltungsgröße konnten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen,

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))},$$

welche nun durch Separation der Variablen gelöst werden kann:

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = t - t_0.$$

**Beispiel:** Der eindimensionale harmonische Oszillator wird durch das Kraftfeld  $F(x) = -kx$  beschrieben. Die dazupassende potentielle Energie ist daher  $V(x) = kx^2/2$  und

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

ist eine Erhaltungsgröße.

Lässt sich diese Methode auch auf den Fall einer Bewegung in drei Dimensionen,

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}),$$

übertragen? Dies ist nur dann der Fall, wenn es sich um ein sogenanntes **kon-servatives** Kraftfeld,

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}),$$

handelt. Die Gesamtenergie

$$E = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + V(x)$$

ist dann wieder eine Erhaltungsgröße und eine der insgesamt sechs Integrationen ist damit ausgeführt.

**Beispiel:** Das Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{GmM}{x^2} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

besitzt die potentielle Energie

$$V(\vec{x}) = -\frac{GmM}{|\vec{x}|}.$$

## 5.12 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = f(t), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Für die homogene Gleichung ( $f(t) = 0$ ) machen wir den Ansatz:

$$x_h(t) = \exp(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Die folgende Fallunterscheidung ist nötig:

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$(a) \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \lambda_i \notin \mathbb{R} \text{ d.h. } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \quad \omega \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda_{1,2}t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$

Die allgemeine (reelle) Lösung ist daher in diesem Fall:

$$x_h(t) = e^{\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -a_1/2$

Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall:

$$x_h(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

**Beweis:** Man muss nur durch Einsetzen in die homogene Differentialgleichung überprüfen, dass  $t \exp \lambda t$  eine Lösung ist.

**Bemerkung:** Die homogene Differentialgleichung **zweiter** Ordnung,

$$\ddot{x}_h(t) + a_1\dot{x}_h(t) + a_0x_h(t) = 0,$$

kann auch als **System** von zwei linearen Differentialgleichungen **erster** Ordnung geschrieben werden, wenn man  $x_1 = x_h$  und  $x_2 = \dot{x}_h$  setzt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_0x_1 - a_1x_2 \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Ermitteln Sie die Lösung mit Hilfe des früher besprochenen Verfahrens zur Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die allgemeine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung ist durch

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t)$$

gegeben, wobei  $x_s(t)$  eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Ich diskutiere zunächst den wichtigen Spezialfall  $f(t) = \exp \mu t$  ( $\mu \in \mathbb{C}$ ):

1.  $\mu \neq \lambda_1, \lambda_2$

$$\text{Ansatz : } x_s(t) = Ce^{\mu t} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\mu^2 + a_1\mu + a_0}$$

2.  $\mu = \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\text{Ansatz : } x_s(t) = Cte^{\mu t} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\mu + a_1}$$

3.  $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$

$$\text{Ansatz : } x_s(t) = Ct^2e^{\mu t} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

**Bemerkung:** Wählt man  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$  ( $\mu_2 \neq 0$ ), so ist  $\operatorname{Re} x_s(t)$  eine reelle Lösung für  $f(t) = \operatorname{Re} \exp \mu t = \exp \mu_1 t \cos \mu_2 t$ .

**Beispiel:** Ich betrachte den Fall  $\mu = i\Omega \neq \lambda_{1,2}$ . Eine spezielle Lösung für  $f(t) = \cos \Omega t$  ist daher

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \operatorname{Re} \frac{e^{i\Omega t}}{-\omega^2 + ia_1\Omega + a_0} \\ &= \operatorname{Re} \frac{(\cos \Omega t + i \sin \Omega t)(-\Omega^2 + a_0 - ia_1\Omega)}{(-\Omega^2 + a_0)^2 + a_1^2\Omega^2} \\ &= \frac{(-\Omega^2 + a_0) \cos \Omega t + a_1\Omega \sin \Omega t}{(-\Omega^2 + a_0)^2 + a_1^2\Omega^2}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Der Nenner hat sein Minimum für  $\Omega^2 = a_0$ . Das macht sich besonders stark bemerkbar, wenn

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega = -\frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$$

und  $a_1^2 \ll a_0$ . Dann ist nämlich  $\omega \simeq \sqrt{a_0}$  und  $\Omega \rightarrow \omega$  führt zur „Resonanzkatastrophe“.

Für eine **allgemeine** Form der Funktion  $f(t)$  und den Fall  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch die Formel

$$x_s(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{t_0}^t dt' (e^{\lambda_1(t-t')} - e^{\lambda_2(t-t')}) f(t')$$

gegeben. Der Beweis dieser Formel erfolgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung. Die hier angegebene spezielle Lösung ist so gewählt, dass  $x_s(t_0) = 0$  und  $\dot{x}_s(t_0) = 0$ . Die Erfüllung der Randbedingungen  $x(t_0) = x_0$  und  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  der allgemeinen Lösung  $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$  erfolgt durch geeignete Wahl der zwei in  $x_h(t)$  enthaltenen freien Konstanten.

**Bemerkung:** Im Fall  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$  hat man

$$x_s(t) = \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t dt' e^{\alpha(t-t')} \sin \omega(t-t') f(t')$$

Im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  ist

$$x_s(t) = \int_{t_0}^t dt' (t-t') e^{\lambda(t-t')} f(t').$$

### 5.13 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir suchen die allgemeine Lösung der folgenden linearen, homogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Das Polynom  $P(\lambda)$  habe die Nullstellen  $\lambda_1^{(n_1)}, \dots, \lambda_k^{(n_k)}$  mit Vielfachheiten  $n_\alpha$  ( $\sum n_\alpha = n$ ).

**Behauptung:** Die linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}; \dots; e^{\lambda_k t}, \dots, t^{n_k-1}e^{\lambda_k t}.$$

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass die Funktionen

$$t^\nu e^{\lambda_i t}, \quad \nu = 0, \dots, n_i - 1$$

Lösungen sind. Mit Hilfe des Differentialoperators

$$D = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{d}{dt} + a_0$$

kann man die Differentialgleichung in der Form  $Dx = 0$  schreiben.

$$Dt^\nu e^{\lambda_i t} = D \frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} D e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} P(\lambda) e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_i}.$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} = Q(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

$$\frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} P(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \quad \text{für } \nu < n_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} P(\lambda) e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad Dt^\nu e^{\lambda_i t} = 0.$$

### 5.14 Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir schreiben dieses Differentialgleichungssystem wieder in kompakter Form

$$\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Cx(t) = 0$$



mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

und reellen  $n \times n$ -Matrizen  $B, C$ .

Macht man den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} v,$$

so erhält man

$$(\lambda^2 \mathbb{1} + \lambda B + C)v = 0,$$

woraus folgt, dass  $\lambda$  die Gleichung

$$\det(\lambda^2 \mathbb{1} + \lambda B + C) = 0$$

erfüllen muss.

Da sich ein lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung auf ein solches erster Ordnung zurückführen lässt, kann man auch so vorgehen: Man definiert

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Das Differentialgleichungssystem lässt sich dann mit Hilfe des  $2n$ -dimensionalen Spaltenvektors  $X$  und der  $2n \times 2n$ -Matrix  $A$  in der Form

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -C & -B \end{pmatrix}}_A X(t)$$

schreiben. Die (formale) Lösung ist daher

$$X(t) = e^{At} X(0).$$

Ich beschränke mich hier auf die Diskussion eines Differentialgleichungssystems der Form

$$M\ddot{x}(t) = -Kx(t), \quad M^T = M, \quad M > 0, \quad K^T = K, \quad K \geq 0.$$

Dieser wichtige Spezialfall tritt bei der Behandlung kleiner Schwingungen in der Mechnik auf und folgt aus der Lagrangefunktion ( $\rightarrow$  T1)

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} - \frac{1}{2} x^T K x$$

Da die Matrix  $M$  **strikt** positiv ist, existiert  $M^{-1/2}$  und man kann das Differentialgleichungssystem auch in der Form

$$M^{1/2}\ddot{x}(t) = -M^{-1/2}KM^{-1/2}M^{1/2}x(t)$$

schreiben. Da die Matrix  $M^{-1/2}KM^{-1/2}$  symmetrisch und positiv ist, kann sie durch eine (reelle) Orthogonalmatrix  $S$  diagonalisiert werden:

$$M^{-1/2}KM^{-1/2} = S\Omega^2S^T, \quad \Omega^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad \omega_i^2 \geq 0.$$

Die **Eigenfrequenzen**  $\omega_1, \dots, \omega_n$  erhält man aus der Gleichung

$$\det(\omega^2\mathbb{1} - M^{-1/2}KM^{-1/2}) = \det(\omega^2M - K) = 0$$

Definiert man

$$Q(t) = S^T M^{1/2}x(t),$$

so ergibt sich ein System von  $n$  **entkoppelten** Differentialgleichungen

$$\ddot{Q}(t) = -\Omega^2Q(t)$$

für die **Normalkoordinaten**  $Q_1(t), \dots, Q_n(t)$ :

$$\ddot{Q}_i(t) = -\omega_i^2Q_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Für  $\omega_i \neq 0$  erhält man die allgemeine Lösung

$$Q_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t.$$

Im **aperiodischen Grenzfall**  $\omega_i = 0$  ist die Lösung

$$Q_i(t) = A_i + B_i t.$$

Die allgemeine Lösung  $Q(t)$  ist somit

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t)e_i.$$

In den ursprünglichen Koordinaten hat man daher

$$x(t) = M^{-1/2}SQ(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \underbrace{M^{-1/2}Se_i}_{v_i}.$$

Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  erfüllen die Eigenwertgleichungen

$$(M\omega_i^2 - K)v_i = 0$$

und sind gemäß

$$v_i^T M v_j = \delta_{ij}$$

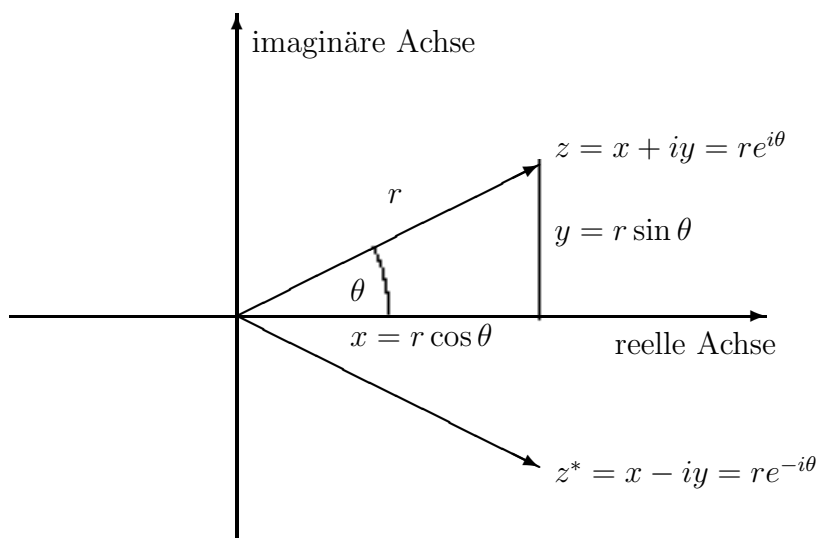
normiert.

# Kapitel 6

## Komplexe Analysis

Die Verwendung von Methoden der komplexen Analysis führt oft zu einer gewaltigen Vereinfachung sonst meist langwieriger Rechnungen. Grundkenntnisse der komplexen Analysis zählen daher zum Standardrepertoire in der theoretischen Physik.

### 6.1 Komplexe Zahlen



Eine **komplexe Zahl**  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit **Realteil**  $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$  und **Imaginärteil**  $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$  lässt sich durch einen (Orts-)Vektor in der **komplexen Zahlenebene** veranschaulichen. Die Zahl  $i \in \mathbb{C}$  ist die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$ . Die zu  $z = x + iy$  (**komplex**) **konjugierte Zahl**  $z^* = x - iy$  entspricht

der Spiegelung von  $z$  an der **reellen Achse**. Die Länge oder der **Betrag von  $z$**  ist durch

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z^*z}$$

gegeben. Wichtig ist auch die **Polardarstellung**

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)}_{e^{i\theta}},$$

$$r = |z| \geq 0, \quad \theta = \arg z \in [0, 2\pi).$$

Die **Addition** von zwei komplexen Zahlen,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

entspricht einfach der Vektoraddition. Die geometrische Interpretation der **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen ist bei Verwendung der Polardarstellung besonders leicht zu sehen:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Die Längen  $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2$  der beiden komplexen Zahlen werden miteinander multipliziert und die Argumente  $\arg z_1 = \theta_1, \arg z_2 = \theta_2$  werden addiert. Man kann sich auch leicht von der Gültigkeit der **Dreiecksungleichung**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

und der Formel

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

überzeugen.

## 6.2 Komplexe Funktionen

Die **Exponentialfunktion** lässt sich durch die Definition

$$e^z = \exp z = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy}, \quad z = x + iy$$

zu einer Abbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  verallgemeinern. Es gelten weiterhin die gewohnten Rechenregeln

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad \forall z_{1,2} \in \mathbb{C},$$

sowie die aus der reellen Analysis bekannte Potenzreihenentwicklung

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Für die **trigonometrischen Funktionen** suggerieren die aus der Eulerschen Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) folgenden Relationen

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad x \in \mathbb{R}$$

die **Definitionen**:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Alle gewohnten Formeln für die reellen trigonometrischen Funktionen gelten dann auch im Komplexen (z.B.  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ , etc.) Analog definiert man die **Hyperbelfunktionen** durch die bekannten Formeln

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Berechnung der  **$n$ -ten Wurzel** einer komplexen Zahl  $z$  erfordert etwas mehr Vorsicht. Betrachten wir die Beziehung

$$z = w^n, \quad (n \in \mathbb{N}, \text{fix}),$$

so entspricht jedem vorgegebenen Wert  $w \in \mathbb{C}$  **genau ein** Wert  $z \in \mathbb{C}$ . Dagegen gibt es zu jedem  $z \neq 0$   **$n$  verschiedene** mögliche Werte von  $w$ . Der Ausdruck

$$w = \sqrt[n]{z}$$

ist somit **mehrdeutig** und stellt **keine** Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dar. Zur Bestimmung der  $n$  verschiedenen möglichen Werte von  $w$  geht man folgendermaßen vor:

$$\left. \begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ w = Re^{i\phi} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{re^{i\theta}}_z = \underbrace{R^n e^{in\phi}}_{w^n}$$

$$\Rightarrow r = R^n \Rightarrow R = \sqrt[n]{r} \geq 0 \quad (\text{eindeutig})$$

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} = e^{in\phi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\Rightarrow w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die  $n$  verschiedenen Werte von  $\sqrt[n]{z}$  liegen auf einem Kreis mit Radius  $\sqrt[n]{|z|}$  um den Ursprung und bilden die Eckpunkte eines Polygons mit  $n$  gleich langen Seiten.

Ebenso ist der **Logarithmus** einer komplexen Zahl ein mehrdeutiger Ausdruck. Gehen wir, analog zu vorhin, von der Relation

$$z = e^w$$

aus, so gibt es wieder zu jedem vorgegebenen Wert von  $w$  genau einen Wert von  $z$ . Dagegen gibt es zu jedem Wert von  $z \neq 0$  **unendlich viele verschiedene** Werte von  $w$ , da  $w$  und  $w + 2\pi ik$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) das gleiche  $z$  liefern:

$$\left. \begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ w = u + iv \end{array} \right\} \Rightarrow re^{i\theta} = e^u e^{iv}$$

$$\Rightarrow e^u = r \Rightarrow u = \ln r \quad (\text{eindeutig})$$

$$e^{i(\theta+2\pi k)} = e^{i\theta} = e^{iv}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow v = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Beispiel:**  $\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

**Allgemeine Potenzen komplexer Zahlen** kann man durch den i.Allg. **mehrdeutigen** Ausdruck

$$z^c = e^{c \ln z}, \quad c \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

definieren.

$$z^c = e^{c \ln r} e^{ic\theta} e^{ic2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ist eindeutig für  $c = n \in \mathbb{Z}$ :

$$z^n = e^{n \ln r} e^{in\theta} \underbrace{e^{i2\pi kn}}_1 = r^n e^{in\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für  $c = \frac{1}{n}$ , ( $n = 2, 3, \dots$ ) erhält man den bereits bekannten Ausdruck für  $\sqrt[n]{z}$ :

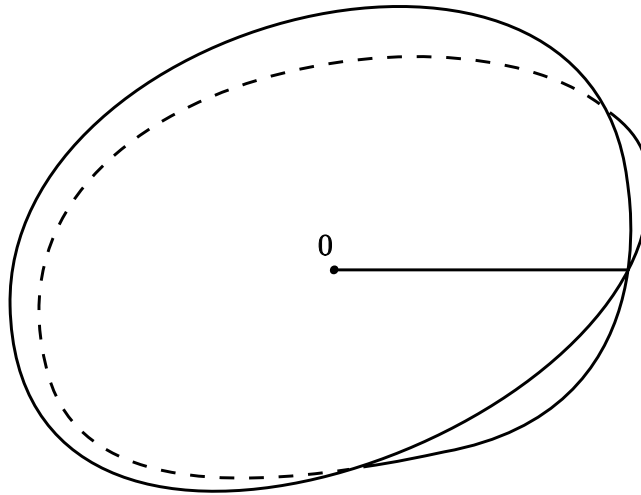
$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln r} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

**Beispiel:**  $i^i = e^{i \ln i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$ .  $i^i$  ist somit **rein reell**.

### 6.3 Riemannsche Flächen

Die Verwendung mehrdeutiger Ausdrücke wie  $\sqrt{z}$  oder  $\ln z$  lässt sich vermeiden, indem man für den Definitionsbereich statt der komplexen Zahlenebene geeignet gewählte Mannigfaltigkeiten, sogenannte Riemannsche Flächen, verwendet.

Um eine geeignete Riemannsche Fläche für die Quadratwurzel zu konstruieren, betrachten wir zunächst die Abbildung  $z \mapsto z^2$  der komplexen Zahlenebene auf sich selbst. Diese Abbildung ist wegen  $(-z)^2 = z^2$  **nicht injektiv** und somit **nicht invertierbar** (und  $\sqrt{z}$  daher mehrdeutig). Fasst man aber  $z \mapsto z^2$  nicht als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , sondern als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R}$  auf, so ist diese Abbildung **injektiv** und somit invertierbar.  $\mathcal{R}$  ist die unten dargestellte **zweiblättrige Riemannsche Fläche**.



Eine mögliche Parametrisierung von  $\mathcal{R}$  ist:

$$(r, \theta), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 4\pi$$

(0 und  $4\pi$  werden identifiziert)

Somit ist  $z \mapsto \sqrt{z}$ , aufgefasst als Abbildung  $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , eine **Funktion** (also nicht mehr mehrdeutig).

$$(r, \theta) \xrightarrow{\sqrt{\phantom{x}}} \left( \sqrt{r}, \frac{\theta}{2} \right)$$

$$0 \leq \theta < 4\pi \qquad 0 \leq \frac{\theta}{2} < 2\pi$$

**Bemerkungen:** Der Ursprung ist in dem obigen Beispiel ein **Verzweigungspunkt** (erster Ordnung). Die Lage des **Verzweigungsschnittes**, der 0 und  $\infty$  verbindet, ist an sich willkürlich, Hier wurde er längs der positiven reellen Achse gewählt. Allgemein heißt ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $n - 1$ , wenn er  $n$  Blätter verbindet. Die Riemannsche Fläche für  $\sqrt[n]{z}$  besitzt  $n$  Blätter mit einem Verzweigungspunkt der Ordnung  $n - 1$  bei  $z = 0$ . Die Riemannsche Fläche für den **Logarithmus** hat **unendlich viele** Blätter (der Nullpunkt gehört nicht dazu). Mögliche Parametrisierung:

$$(r, \theta), \quad r > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \xrightarrow{\ln} \ln r + i\theta \in \mathbb{C}$$

## 6.4 Differentiation im Komplexen

Die Forderung der Differenzierbarkeit einer Funktion ist im Komplexen, wegen der größeren Bewegungsfreiheit in der komplexen Zahlenebene, wesentlich einschränkender als die Differenzierbarkeit im Reellen.

Zunächst einige Definitionen:

**Definition:**  $D \subseteq \mathbb{C}$  heißt **offen**, wenn mit jedem Punkt  $z \in D$  auch eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z$  ganz in  $D$  liegt (d.h.  $\forall z \in D \exists r > 0 : \{y \mid |y - z| < r\} \subseteq D$ ).

Sei nun  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf einer offenen Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$  definierte Funktion,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{und } z_0 \in D.$$

**Definition:**

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0,$$

sodass  $|f(z) - w| < \varepsilon \forall z$  mit  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ .

Man sagt in diesem Fall: „ $f(z)$  hat den Grenzwert (Limes)  $w$  für  $z \rightarrow z_0$ “.

**Bemerkung:** Die Funktion  $f(z)$  strebt in diesem Fall bei **jeder beliebigen** Annäherung  $z \rightarrow z_0$  gegen den Grenzwert  $w$ .

**Definition:**  $f$  heißt **stetig** im Punkt  $z_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

**Definition:**  $f$  heißt **stetig auf**  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

**Definition:**  $f$  heißt **differenzierbar** im Punkt  $z \in D$ , wenn der Limes

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert. Dies ist äquivalent zu

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + \alpha(h)h \quad \text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0,$$

woraus folgt:

$$f \text{ differenzierbar im Punkt } z \Rightarrow f \text{ stetig im Punkt } z.$$



**Definition:**  $f$  heißt **holomorph** auf  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt von  $D$  differenzierbar ist.

**Satz:** Ist eine Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  im Punkt  $z = x + iy$  differenzierbar, dann erfüllen  $u, v$  im Punkt  $(x, y)$  die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Beweis:**  $h = \Delta x + i\Delta y$ ,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \lim_{\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt die Behauptung.

**Bemerkung:** Es gilt auch die **Umkehrung**, d.h. erfüllen zwei reelle Funktionen  $u, v$  im Punkt  $(x, y)$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die komplexe Funktion  $f = u + iv$  im Punkt  $z = x + iy$  differenzierbar.

**Beispiele:**

1.  $f(z) = z^2$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2z + h) = 2z \quad (\text{wie im Reellen}) \\ z^2 &= (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x. \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind somit erfüllt.

2.  $f(z) = z^*$  ist nicht differenzierbar.

$$z^* = x - iy \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind in diesem Fall **nicht** erfüllt.

**Bemerkung:** Es gelten die aus der reellen Analysis vertrauten Rechenregeln.  $f, g$  differenzierbar  $\Rightarrow (f + g)' = f' + g'$ ,  $(fg)' = f'g + fg'$ .

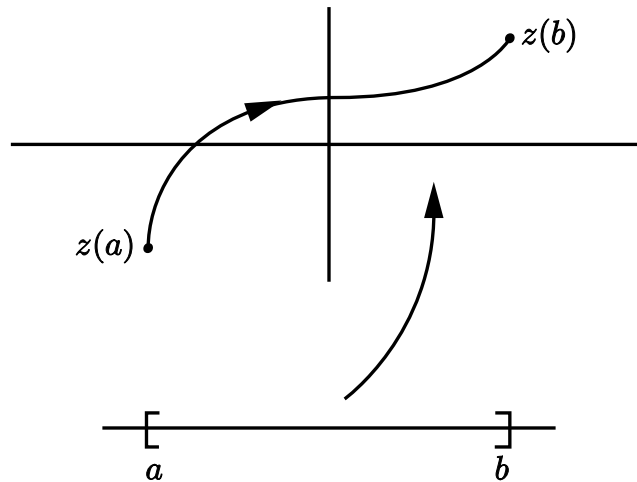
$$\begin{aligned} (z^n)' &= nz^{n-1}, & (e^z)' &= e^z, \\ (\sin z)' &= \cos z, & (\cos z)' &= -\sin z, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

## 6.5 Integration im Komplexen

Eine **glatte orientierte Kurve**  $\gamma$  in der komplexen Zahlenebene wird durch eine Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} [a, b] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ t &\mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

beschrieben, wobei  $\dot{z}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  existiert und stetig ist.



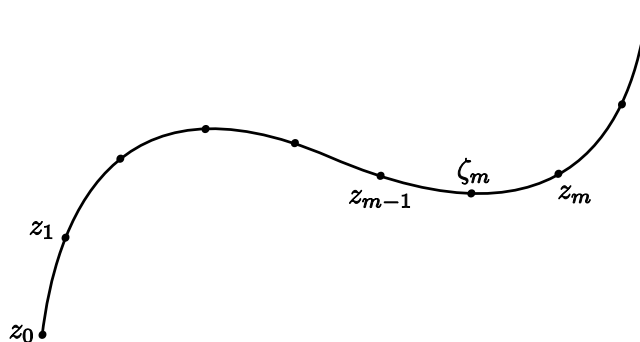
Sei nun  $f$  eine auf  $\gamma$  definierte und dort stetige komplexwertige Funktion. Dann definiert man das **Kurvenintegral** durch

$$\int_{\gamma} dz f(z) := \int_a^b dt \dot{z}(t) f(z(t)).$$

**Bemerkungen:**

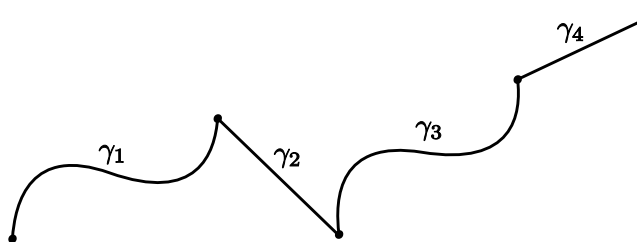
1. Die Definition des Kurvenintegrals ist **unabhängig** von der Wahl der Parametrisierung der Kurve  $\gamma$ .
2. Das Kurvenintegral kann auch als Grenzwert aufgefasst werden:

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \Delta z_m f(\zeta_m), \quad \Delta z_m = z_m - z_{m-1}.$$



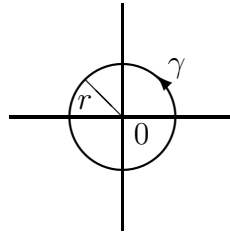
3. Die Definition des Kurvenintegrals kann unmittelbar auf **stückweise glatte** Kurven erweitert werden:

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \sum_k \int_{\gamma_k} dz f(z)$$

**Beispiele:**

1.  $f(z) = z^n, n \in \mathbb{Z}$

$\gamma$  sei ein Kreis mit Radius  $r$  und Mittelpunkt im Ursprung, der **ein** Mal im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Eine mögliche Parametrisierung ist  $z(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .



$$\Rightarrow \dot{z}(t) = ire^{it}$$

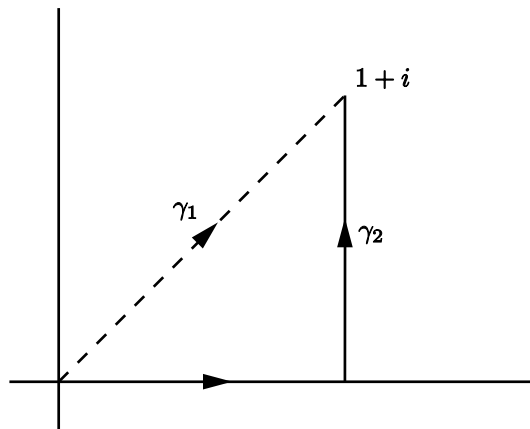
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz f(z) &= \int_0^{2\pi} dt ire^{it} r^n e^{int} = \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} dt e^{i(n+1)t} = \begin{cases} ir^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases}, \\ \int_{\gamma} dz z^n &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Für  $f(z) = (z - z_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  und einen Kreis mit Mittelpunkt  $z_0$  erhält man das gleiche Resultat:

$$\int_{\gamma} dz (z - z_0)^n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Das Kurvenintegral einer nichtholomorphen Funktion:

$$f(z) = \operatorname{Re} z = x$$



$$\gamma_1: \quad z(t) = (1+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \operatorname{Re} z = t$$

$$\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_0^1 dt (1+i)t = \frac{1+i}{2}$$

$$\gamma_2: \quad \text{zunächst } z(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (\operatorname{Re} z = t),$$

$$\text{dann } z(t) = 1 + it, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (\operatorname{Re} z = 1),$$

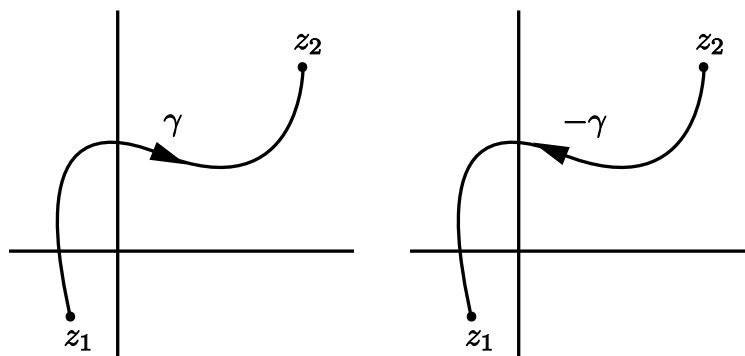
$$\int_{\gamma_2} dz f(z) = \int_0^1 dt t + i \int_0^1 dt = \frac{1}{2} + i.$$

Der Wert des Integrals hängt in diesem Fall nicht nur von den Endpunkten der Integrationskurve, sondern auch von ihrer Form ab.

Einige **Eigenschaften** komplexer Kurvenintegrale:

1.  $\gamma$  sei eine Kurve mit Anfangspunkt  $z_1$  und Endpunkt  $z_2$ . Bezeichnet man die in der entgegengesetzten Richtung durchlaufene Kurve mit  $-\gamma$  (diese besitzt also den Anfangspunkt  $z_2$  und den Endpunkt  $z_1$ ), so gilt

$$\int_{-\gamma} dz f(z) = - \int_{\gamma} dz f(z)$$



- 2.

$$\int_{\gamma} dz [\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)] = \lambda_1 \int_{\gamma} dz f_1(z) + \lambda_2 \int_{\gamma} dz f_2(z), \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$$

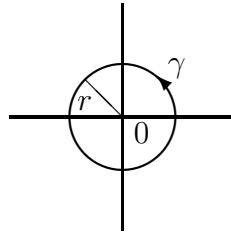
3.

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq M l(\gamma)$$

dabei ist  $l(\gamma)$  die Länge der Kurve  $\gamma$  und  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z$  auf  $\gamma$ , denn

$$\left| \sum_{m=1}^n \Delta z_m f(\zeta_m) \right| \leq \sum_{m=1}^n |\Delta z_m| |f(\zeta_m)| \leq M \sum_{m=1}^n |z_m| \rightarrow M l(\gamma)$$

Bsp. :  $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$



Angenommen  $f(z)$  besitze eine **Stammfunktion**  $F(z)$ , d.h.  $F'(z) = f(z)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz f(z) &= \int_a^b dt \dot{z}(t) f(z(t)) = \int_a^b dt \dot{z}(t) F'(z(t)) \\ &= \int_a^b dt \frac{d}{dt} F(z(t)) = F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Dabei wurde verwendet, dass

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z=z(t)} \frac{dz(t)}{dt}$$

ist:

$$\begin{aligned} F(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ \Rightarrow \dot{F} &= \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} \right). \end{aligned}$$

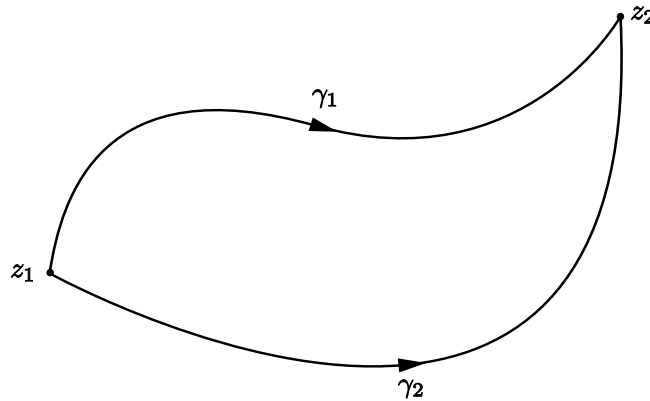
Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} \dot{z} &= \left( \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial v}{\partial y}} + i \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-\frac{\partial u}{\partial y}} \right) (\dot{x} + i\dot{y}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} \right) = \dot{F}. \end{aligned}$$

Wenn also  $f$  eine Stammfunktion besitzt, dann hängt

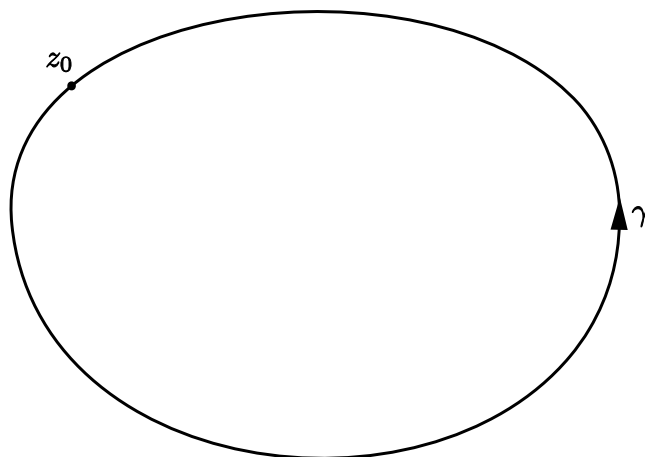
$$\int_{\gamma} dz f(z)$$

**nur** von den Endpunkten, aber nicht von der Form des dazwischenliegenden Integrationsweges ab.



$$\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z)$$

Weiters folgt, dass der Wert des Integrals über eine **geschlossene** Kurve in diesem Fall verschwindet (da Anfangs- und Endpunkt der Kurve zusammenfallen).



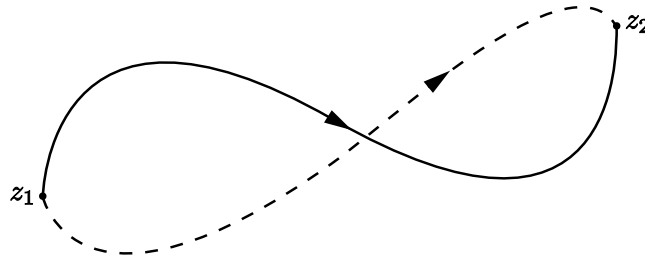
$$\int_{\gamma} dz f(z) = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

**Beispiele:**

1.  $f(z) = k \in \mathbb{C}$  ( $k = \text{const.}$ )  $\Rightarrow F(z) = kz \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} dz k = k(z_2 - z_1)$$

ist daher unabhängig von dem zwischen  $z_1$  und  $z_2$  gewählten Weg.

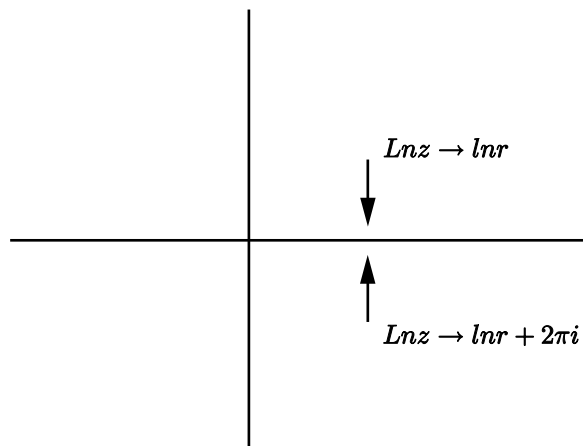


2.  $f(z) = z \Rightarrow F(z) = z^2/2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} dz z = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

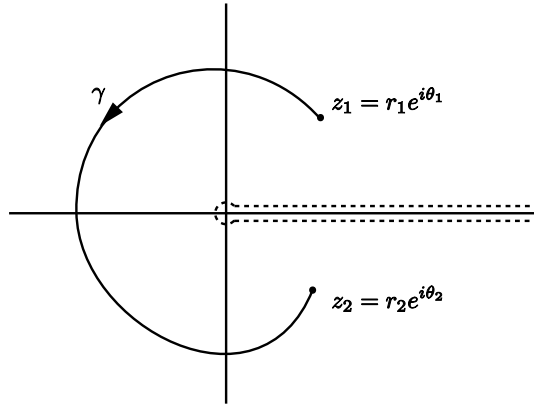
ist daher unabhängig vom Weg zwischen  $z_1$  und  $z_2$ .

3.  $f(z) = 1/z$ ;  $F(z) = \ln z$  ist mehrdeutig, man kann z.B.  $\text{Ln } z = \ln r + i\theta$ ,  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  auswählen. Dies ist aber **keine** Stammfunktion von  $1/z$   $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , da  $\text{Ln } z$  längs der reellen Achse **unstetig** ist (Sprung um  $2\pi i$ ).





$\ln z$  ist aber Stammfunktion von  $1/z$ , wenn man sich etwa auf das Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$  beschränkt.



In **diesem** Gebiet hängt  $\int_{\gamma} dz \frac{1}{z}$  nur von den Endpunkten ab:

$$\int_{\gamma} dz \frac{1}{z} = [\ln r + i\theta]_{r_1, \theta_1}^{r_2, \theta_2} = \ln \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_2 - \theta_1)$$

Wählt man  $r_1 = r_2 = r$  und  $\theta_1 = \varepsilon/2, \theta_2 = 2\pi - \varepsilon/2$ , so folgt

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = i(2\pi - \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi i.$$

Weiters ist

$$\left| \int_{\gamma'} \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{r\varepsilon}{r} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

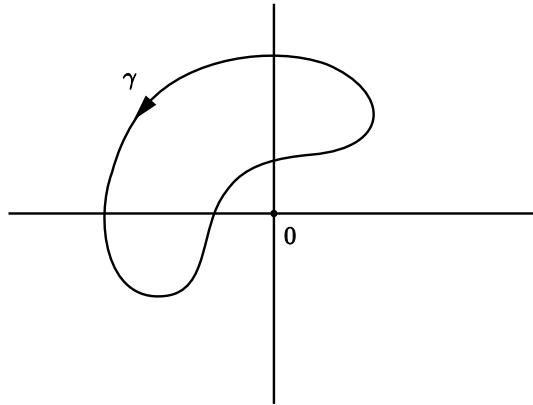
für die direkte Verbindung  $\gamma'$  der Länge  $l(\gamma') = r\varepsilon$  zwischen  $z_2$  und  $z_1$ . Somit erhält man das Ergebnis, dass

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

für eine **beliebige** geschlossene Kurve, die den Nullpunkt **ein** Mal im mathematisch positiven Sinn umläuft. (Für den Spezialfall eines Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung hatten wir dieses Resultat bereits hergeleitet.)

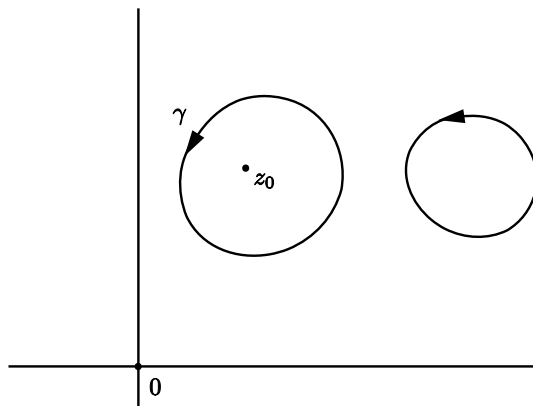
Umschließt dagegen eine **geschlossene** Integrationskurve  $\gamma$  den Nullpunkt **nicht**, dann ist

$$\int \frac{dz}{z} = 0$$



Diese Formeln kann man durch eine Verschiebung  $0 \rightarrow z_0$  sofort verallgemeinern ( $\gamma$  ist wieder eine geschlossene Kurve, die ein Mal im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird):

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } \gamma \text{ den Punkt } z_0 \text{ umschließt} \\ 0 & \text{falls } \gamma \text{ den Punkt } z_0 \text{ nicht umschließt} \end{cases}$$



## 6.6 Integralsatz von Cauchy

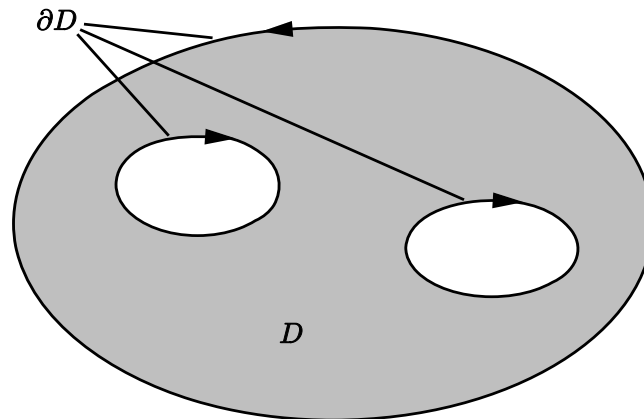
Wir werden im Folgenden mit **zusammenhängenden** offenen Gebieten  $D \subseteq \mathbb{C}$  zu tun haben, bei denen je zwei Punkte  $z_{1,2} \in D$  durch eine (stückweise) glatte, ganz in  $D$  liegende Kurve verbunden werden können.

Ein solches Gebiet heißt **einfach zusammenhängend**, falls jede **einfach geschlossen** (doppelpunktfreie) Kurve in  $D$  nur Punkte von  $D$  umschließt. Man kann dies auch so ausdrücken, dass sich in diesem Fall jede einfach geschlossene, in  $D$  liegende Kurve stetig auf einen in  $D$  liegenden Punkt zusammenziehen lässt, ohne dass dabei  $D$  verlassen wird.

Ein Punkt  $z \in D$  heißt **Randpunkt** von  $D$ , falls in **jeder** Umgebung von  $z$  sowohl Punkte von  $D$  als auch nicht zu  $D$  gehörende Punkte liegen. Die Menge der Randpunkte von  $D$  bildet den Rand von  $D$ , der mit  $\partial D$  bezeichnet wird. Besteht  $\partial D$  aus (i. Allg. mehreren) einfach geschlossenen Kurven, so wählen wir die Orientierung von  $\partial D$  so, dass sich  $D$  stets am linken Ufer des Randes befindet.

Ein **nicht** einfach zusammenhängendes Gebiet heißt **mehrfach zusammenhängend**. Das Innere eines Kreises ist einfach zusammenhängend, dagegen ist ein Kreisring mehrfach zusammenhängend (genauer: zweifach zusammenhängend). Ebenso ist  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$  (das Innere eines Kreises, bei dem der Mittelpunkt entfernt wurde) zweifach zusammenhängend. Allgemein heißt ein beschränktes Gebiet  $D$   $n$ -fach zusammenhängend, falls sein Rand  $\partial D$  aus  $n$  voneinander getrennten geschlossenen Kurven oder isolierten Punkten besteht.

Beispiel für ein dreifach zusammenhängendes Gebiet:



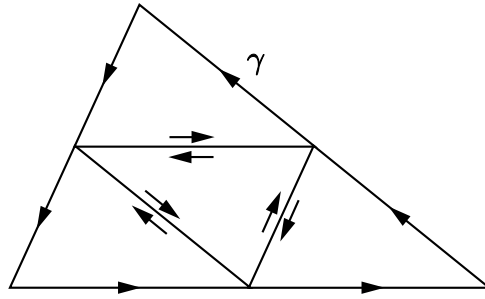
**Integralsatz von Cauchy:** Ist  $f(z)$  holomorph in einem **einfach zusammenhängenden** offenen Gebiet  $D$ , dann gilt für jede (einfach) geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $D$ :

$$\int_{\gamma} dz f(z) = 0.$$

**Beweis:**  $\gamma$  sei zunächst der Rand eines Dreiecks, der im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werde.

Man verbindet die Mittelpunkte der Dreiecksseiten und unterteilt das Dreieck dadurch in vier kongruente Teildreiecke, deren Ränder mit  $\gamma_I, \gamma_{II}, \gamma_{III}, \gamma_{IV}$  bezeichnet werden. Man erhält

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \int_{\gamma_I} dz f(z) + \int_{\gamma_{II}} dz f(z) + \int_{\gamma_{III}} dz f(z) + \int_{\gamma_{IV}} dz f(z),$$



da auf der rechten Seite entlang der drei Unterteilungsstrecken jeweils in **beiden** Richtungen integriert wird und die entsprechenden Beiträge in der Gesamtsumme somit wegfallen. Die Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq \left| \int_{\gamma_I} dz f(z) \right| + \left| \int_{\gamma_{II}} dz f(z) \right| + \left| \int_{\gamma_{III}} dz f(z) \right| + \left| \int_{\gamma_{IV}} dz f(z) \right|.$$

Von den vier Summanden auf der rechten Seite wählt man den größten aus, bezeichnet die entsprechende Randkurve mit  $\gamma_1$  und erhält

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma_1} dz f(z) \right|.$$

Das durch  $\gamma_1$  berandete Dreieck wird nun wie vorhin in Teildreiecke zerlegt. Für eines von ihnen (mit Rand  $\gamma_2$ ) gilt wieder

$$\left| \int_{\gamma_1} dz f(z) \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma_2} dz f(z) \right|$$

und somit

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq 4^2 \left| \int_{\gamma_2} dz f(z) \right|.$$

Setzt man das Verfahren fort, dann erhält man eine unendliche Folge von Dreiecken  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots$  mit Rändern  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  und

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} dz f(z) \right|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es sei nun  $z_0$  jener Punkt, der in **allen** Dreiecken  $D_1, D_2, \dots$  enthalten ist. Da die Funktion  $f$  laut Voraussetzung am Punkt  $z_0$  differenzierbar ist, kann man schreiben

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

wobei  $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = 0$ . Integriert man diesen Ausdruck längs der Randkurve  $\gamma_n$ , so erhält man

$$\int_{\gamma_n} dz f(z) = \underbrace{\int_{\gamma_n} dz f(z_0)}_0 + \underbrace{\int_{\gamma_n} dz f'(z_0)(z - z_0)}_0 + \int_{\gamma_n} dz \alpha(z)(z - z_0).$$

Da  $\alpha(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$ , gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$ , sodass  $|\alpha(z)| < \varepsilon \forall z$  mit  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ . Wir wählen nun  $n$  so groß, dass für alle Punkte  $z \in D_n$   $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$  ist. Bezeichnet man die Länge von  $\gamma_n$  mit  $l_n$ , dann ist  $|z - z_0| \leq l_n/2$  für alle  $z \in \gamma_n$  und  $z_0 \in D_n$ . Somit erhält man

$$\left| \int_{\gamma_n} dz f(z) \right| = \left| \int_{\gamma_n} dz \alpha(z)(z - z_0) \right| < \varepsilon \frac{l_n}{2} l_n = \frac{\varepsilon l_n^2}{2}.$$

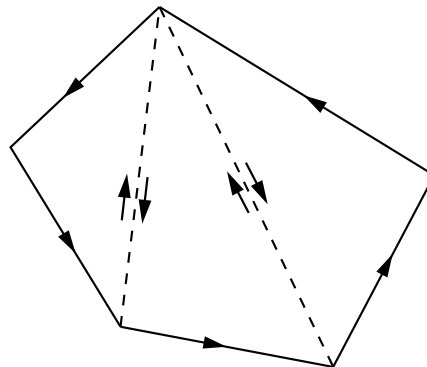
Sei nun  $l$  die Länge von  $\gamma$ . Dann hat die Kurve  $\gamma_1$  die Länge  $l_1 = l/2$  und schließlich hat  $\gamma_n$  die Länge  $l_n = l/2^n$ .

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| = 4^n \left| \int_{\gamma_n} dz f(z) \right| < 4^n \frac{\varepsilon}{2} l_n^2 = 4^n \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{l}{2^n} \right)^2 = \frac{\varepsilon}{2} l^2.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$\int_{\gamma_n} dz f(z) = 0.$$

Bis jetzt hatten wir uns auf den Spezialfall beschränkt, dass  $\gamma$  der Rand eines Dreiecks ist. Der Beweis für den Fall, dass es sich bei  $\gamma$  um den Rand eines Polygons handelt folgt unmittelbar aus dem Beweis für ein Dreieck, da sich jedes Polygon in Teildreiecke zerlegen lässt.



Der **allgemeine** Fall einer einfach geschlossenen Kurve  $\gamma$  kann nun dadurch behandelt werden, dass man  $\gamma$  beliebig genau durch die Seiten eines Polygons approximiert.

**Beispiele:**

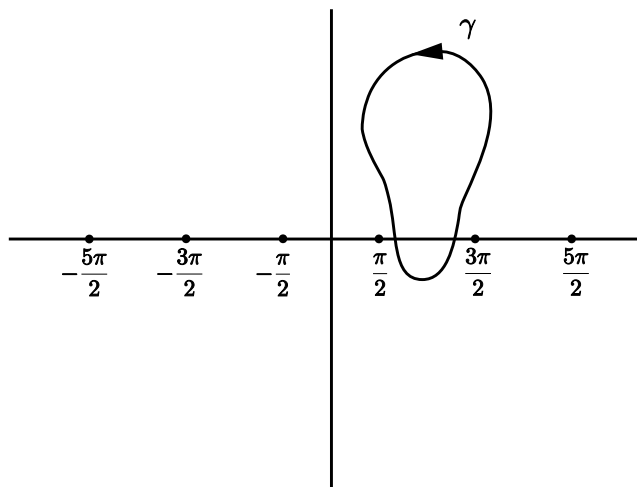
1.  $\int_{\gamma} dz e^z = 0$  für eine beliebige geschlossene Kurve  $\gamma$ , da  $e^z$  in der gesamten komplexen Zahlenebene holomorph ist. In diesem Fall kann man auch argumentieren, dass  $e^z$  Stammfunktion von  $e^z$  in der gesamten komplexen Zahlenebene ist und das Kurvenintegral von  $e^z$  über eine geschlossene Kurve somit verschwinden muss.
2. Ebenso gilt  $\int_{\gamma} dz \sin z = \int_{\gamma} dz \cos z = 0$  für eine beliebige geschlossene Kurve  $\gamma$ .
3. Die komplexe Funktion

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

ist für jene Werte von  $z$  nicht definiert (und somit auch nicht differenzierbar), bei denen  $\cos z = 0$  ist. Es sind dies die auf der reellen Achse liegenden Zahlen  $z_n = \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Der Cauchysche Integralsatz ist in diesem Fall somit nur auf einfach zusammenhängende Gebiete anwendbar, welche keine der Punkte  $z_n$  enthalten. Man kann dies auch so formulieren:

$$\int_{\gamma} dz \tan z = 0,$$

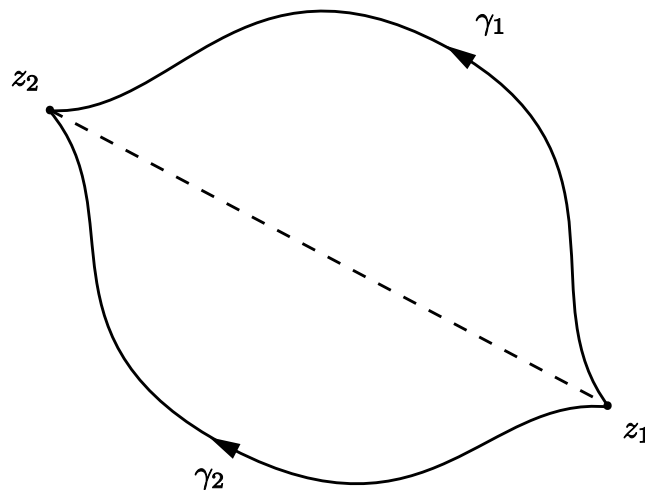
falls die geschlossene Kurve  $\gamma$  keine der  $z_n$  umschließt.



Ist  $f$  holomorph in einem einfach zusammenhängenden offenen Gebiet  $D$  und sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei ganz in  $D$  liegende Kurven mit gemeinsamem Anfangspunkt  $z_1$  und gemeinsamem Endpunkt  $z_2$ , dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} dz f(z) + \int_{-\gamma_2} dz f(z) \\ &= \int_{\gamma_1} dz f(z) - \int_{\gamma_2} dz f(z) \\ \Rightarrow \int_{\gamma_1} dz f(z) &= \int_{\gamma_2} dz f(z), \end{aligned}$$

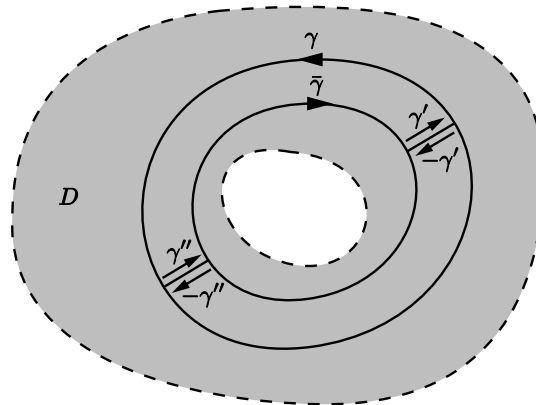
d.h. das Integral ist **wegunabhängig**. Anders ausgedrückt: Bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt der Integrationskurve ändert sich der Wert des Integrals nicht, wenn man den Integrationsweg **stetig deformiert** (ohne dabei das Holomorphiegebiet der Funktion zu verlassen).



Bis jetzt hatten wir immer angenommen, dass das Holomorphiegebiet  $D$  der betrachteten Funktion **einfach** zusammenhängend ist. Ist  $D$  dagegen **mehrfach** zusammenhängend, so kann dieses Gebiet in geeignete einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt werden, auf die dann der Cauchysche Integralsatz anwendbar ist.

**Beispiel:** Das **zweifach** zusammenhängende Gebiet  $D$  enthalte die geschlossenen (im entgegengesetzten Sinn durchlaufenen) Kurven  $\gamma, \bar{\gamma}$ , wobei wir annehmen wollen, dass sich beide (innerhalb von  $D$ ) nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Die Funktion  $f$  sei auf  $D$  holomorph.

Die von  $\gamma'$ , einem Teil von  $\gamma, \gamma''$  und schließlich einem Teil von  $\bar{\gamma}$  gebildete geschlossene Kurve liegt nun vollständig in einem einfach zusammenhängenden Holomorphiegebiet von  $f$ . Der Cauchysche Integralsatz ist somit anwendbar. Analog



gilt dies für die aus  $-\gamma''$ , dem zweiten Teil von  $\gamma$ ,  $-\gamma'$  und dem zweiten Teil von  $\bar{\gamma}$  gebildete geschlossene Kurve. Kombiniert man diese beiden Resultate und beachtet weiters, dass

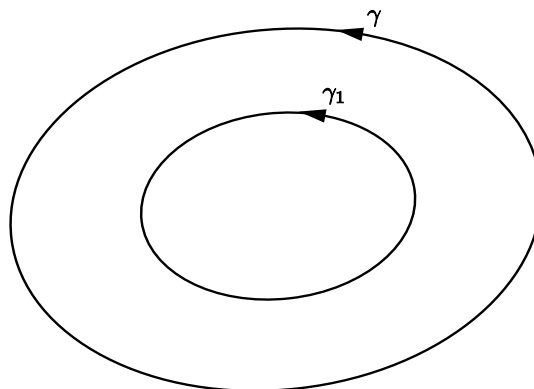
$$\int_{\gamma'} dz f(z) + \int_{-\gamma'} dz f(z) = \int_{\gamma''} dz f(z) + \int_{-\gamma''} dz f(z) = 0,$$

so erhält man das Ergebnis

$$\int_{\gamma} dz f(z) + \int_{\bar{\gamma}} dz f(z) = 0.$$

Bevorzugt man für beide Kurven den gleichen Umlaufsinn, so hat man ( $\gamma_1 := -\bar{\gamma}$ )

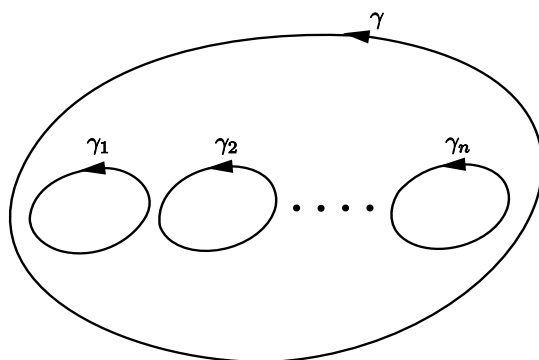
$$\int_{\gamma} dz f(z) = \int_{\gamma_1} dz f(z)$$



Für den **allgemeinen** Fall eines  $n + 1$ -fach zusammenhängenden Gebiets erhält man:

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} dz f(z)$$





Eine andere Formulierung könnte auch so lauten: Sei  $D$  ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand  $\partial D$  aus **einfach geschlossenen Kurven** besteht. Weiters liege  $D$  zusammen mit seinem Rand in einem Holomorphiegebiet der Funktion  $f$ . Dann gilt:

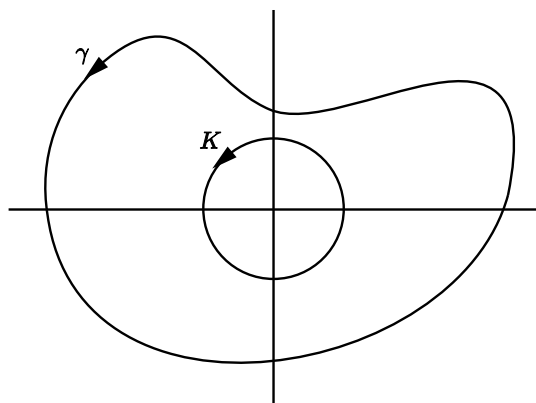
$$\int_{\partial D} dz f(z) = 0$$

### Beispiele:

1. Die Formel

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_K \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

gilt für eine **beliebige** einfach geschlossene Kurve  $\gamma$ , die den Nullpunkt umschließt:



2. Analog ist

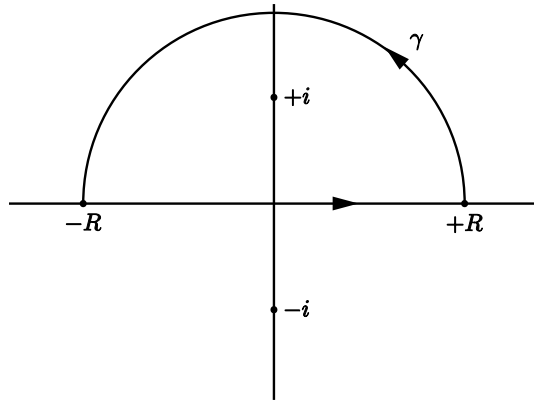
$$\int_{\gamma} dz (z - z_0)^n = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

für eine beliebige geschlossene Kurve, die den Punkt  $z_0$  (im mathematisch positiven Sinn) ein Mal umschließt.

3. Wir wollen

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

für die abgebildete Integrationskurve berechnen.



Die geschlossene Integrationskurve  $\gamma$  wird gebildet aus dem reellen Intervall  $[-R, +R]$  und dem Halbkreisbogen  $H_R = \{Re^{i\varphi} | 0 \leq \varphi \leq \pi, R > 1\}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} &= \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_{H_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - i}}_{2\pi i} - \underbrace{\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z + i}}_0 = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \end{aligned}$$

Um das **reelle** Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

zu bestimmen, benötigen wir eine Abschätzung für  $|\frac{1}{z^2+1}|$ : Auf dem Halb-

kreisbogen  $H_R$  gilt:

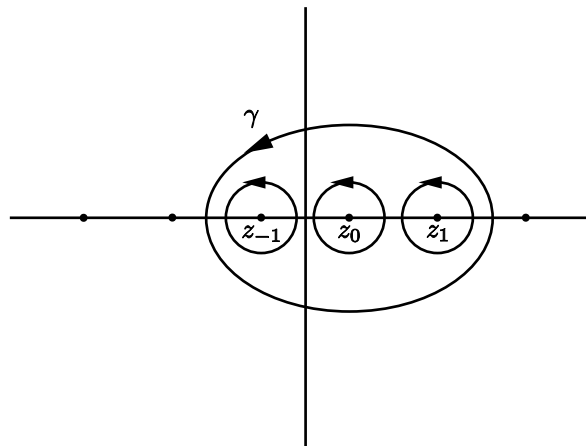
$$\begin{aligned}
 R^2 &= |z^2| = |(z^2 + 1) - 1| \leq |z^2 + 1| + 1 \\
 \Rightarrow R^2 - 1 &\leq |z^2 + 1| \\
 \Rightarrow \frac{1}{R^2 - 1} &\geq \frac{1}{|z^2 + 1|} \\
 \Rightarrow \left| \int_{H_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| &\leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \pi
 \end{aligned}$$

4. Umschließt die Integrationskurve  $\gamma$  von  $\int_{\gamma} dz \tan z = \int_{\gamma} dz \sin z / \cos z$  mehrere der Nullstellen  $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$  von  $\cos z$ , so genügt es die Integrale

$$\int_{|z - z_n| = r} dz \tan z$$

zu berechnen, wobei der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis  $|z - z_n| = r$  innerhalb von  $\gamma$  liegt und außer  $z_n$  keine weitere Nullstelle umschließt. Da man den Radius  $r$  beliebig klein machen kann, muss man das Verhalten des Integranden nur in infinitesimalen Umgebungen der von  $\gamma$  umschlossenen  $z_n$  untersuchen.

$$\int_{\gamma} dz \tan z = \sum_n \int_{|z - z_n| = r} dz \tan z \quad (z_n \text{ innerhalb von } \gamma)$$



## 6.7 Unbestimmtes Integral

Wir wissen bereits: Wenn  $f(z)$  in einem offenen Gebiet  $D$  eine Stammfunktion  $F(z)$  besitzt (d.h.  $F'(z) = f(z)$ ), dann ist

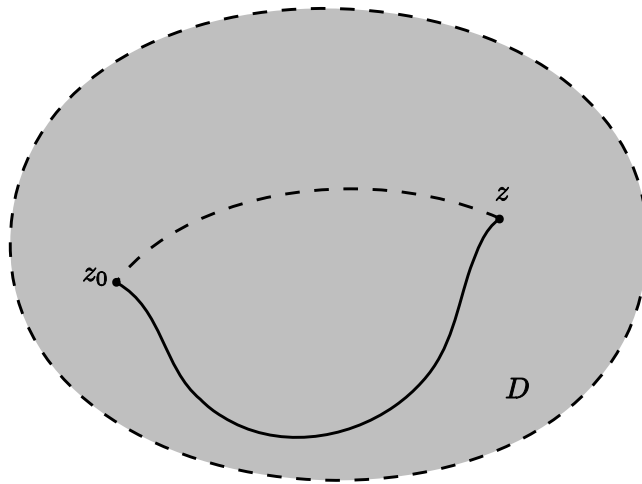
$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = F(z_2) - F(z_1)$$

für beliebige, ganz in  $D$  liegende Integrationskurven mit Anfangspunkt  $z_1$  und Endpunkt  $z_2$ . D.h. das Integral ist **wegunabhängig**.

Wir wollen nun eine Bedingung dafür angeben, dass eine Funktion  $f(z)$  eine Stammfunktion  $F(z)$  besitzt:

**Satz:** Sei  $f(z)$  **stetig** in einem mehrfach zusammenhängenden offenen Gebiet  $D$  und außerdem  $\int_{z_1}^{z_2} dz f(z)$  **wegunabhängig** in  $D$ , dann ist

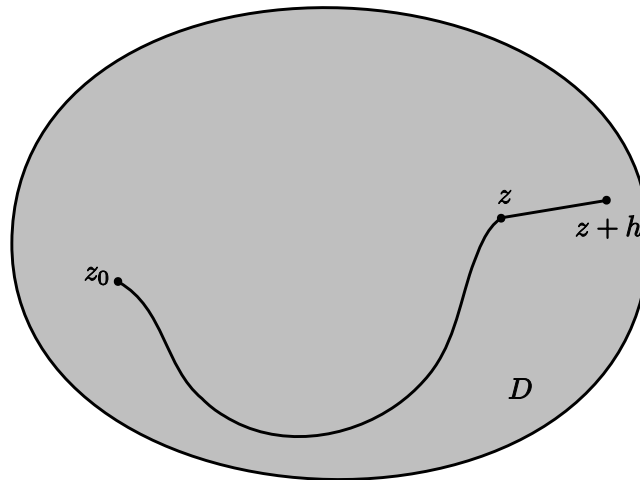
$$F(z) = \int_{z_0}^z dz' f(z')$$



holomorph in  $D$  und  $F'(z) = f(z)$ .

**Bemerkung:** Die Voraussetzungen dieses Satzes sind insbesondere für jede in  $D$  holomorphe Funktion erfüllt.

Beweis:



$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{z_0}^{z+h} dz' f(z') - \int_{z_0}^z dz' f(z') \\
 &= \int_z^{z+h} dz' f(z') \\
 \Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{\int_z^{z+h} dz' [f(z') - f(z)]}{h} \right| \\
 &\leq \max_{z' \in \{z' | z' = z+th, 0 \leq t \leq 1\}} |f(z') - f(z)|
 \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$ , sodass  $|f(z') - f(z)| < \varepsilon$  sofern  $|z - z'| < \delta(\varepsilon)$ . Wählt man nun  $|h| < \delta(\varepsilon)$ , so ist wegen  $|z' - z| \leq |h|$

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

und somit gezeigt, dass  $F'(z) = f(z)$ .

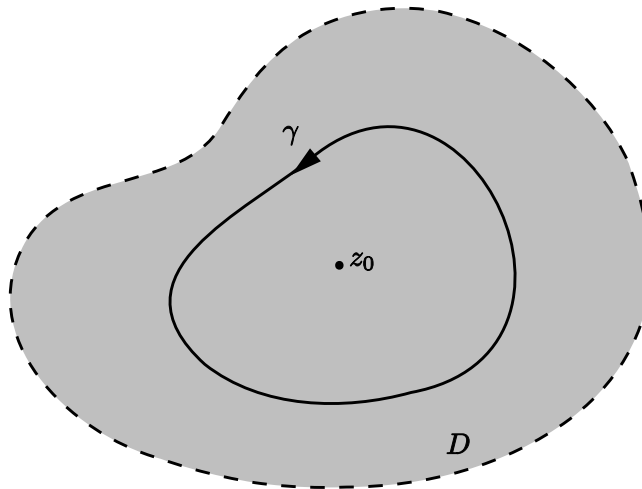
## 6.8 Cauchysche Integralformel

Die wichtigste Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz ist die Cauchysche Integralformel, die man, zusammen mit den notwendigen Voraussetzungen, in dem folgenden Satz formulieren kann:

**Satz:** Sei  $f(z)$  holomorph in einem einfach zusammenhängenden offenen Gebiet  $D$ . Dann gilt für jeden Punkt  $z_0 \in D$  und jede einfach geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $D$ , welche  $z_0$  umschließt

$$\int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

wobei die Integration im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) erfolgt.



**Beweis:**  $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0) \underbrace{\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i} + \int_{\gamma} dz \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Wir müssen also zeigen, dass der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet. Dazu ersetzen wir  $\gamma$  durch eine Kreislinie  $K$  mit Mittelpunkt  $z_0$ . Da  $f$  stetig ist, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$ , sodass  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  sofern  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ . Wir wählen nun den Radius  $r$  von  $K$  kleiner als  $\delta(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| &< \frac{\varepsilon}{r} \\ \Rightarrow \left| \int_K dz \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| &< \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, verschwindet dieses Integral tatsächlich.

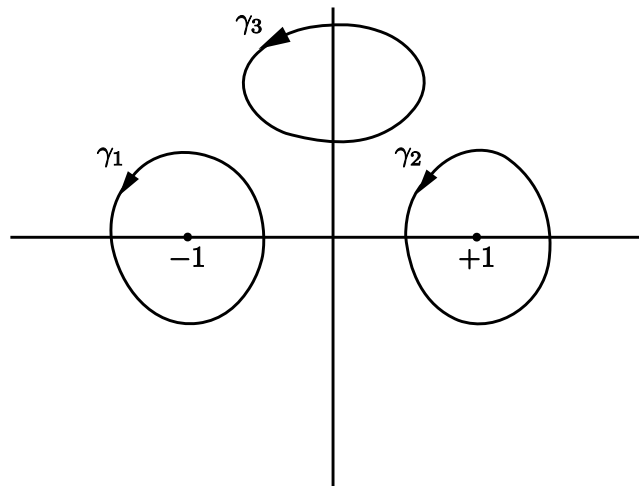
**Bemerkung:** Dass man die Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $f$  in  $D$  keinesfalls durch die schwächere Forderung der Stetigkeit von  $f$  in  $D$  ersetzen

kann, zeigt das folgende **Gegenbeispiel** mit der zwar stetigen, aber nicht holomorphen Funktion  $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ :

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r} dz \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} &= \int_0^{2\pi} dt \, i r e^{it} \frac{(r \cos t)^2}{r e^{it}} \\ &= i r^2 \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \\ &= i \pi r^2 \neq 0. \end{aligned}$$

**Beispiele:** Berechnung von

$$\int_{\gamma_i} dz \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$



1.

$$\int_{\gamma_1} dz \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)} = 2\pi i \left[ \frac{z^2 + 1}{z - 1} \right]_{z=-1} = -2\pi i$$

durch Anwenden der Cauchyschen Integralformel mit  $z_0 = -1$  und  $f(z) = (z^2 + 1)/(z - 1)$ .

2.

$$\int_{\gamma_2} dz \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)} = 2\pi i \left[ \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = 2\pi i$$

durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel mit  $z_0 = 1$  und  $f(z) = (z^2 + 1)/(z + 1)$ .

3.

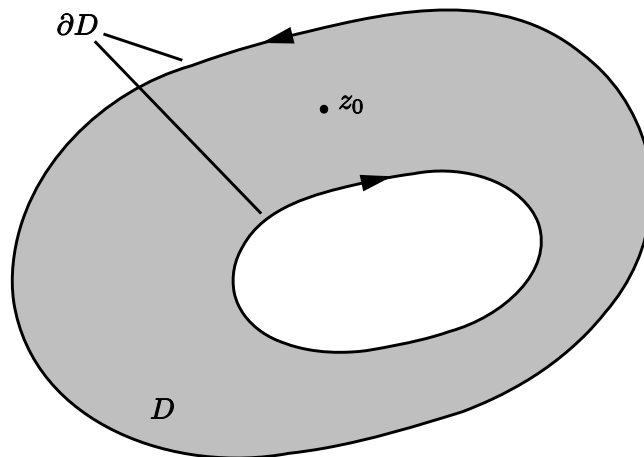
$$\int_{\gamma_3} dz \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = 0$$

als direkte Konsequenz des Cauchyschen Integralsatzes.

Auch die Cauchysche Integralformel lässt sich auf den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Gebiets verallgemeinern:

**Satz:**  $D$  sei ein mehrfach zusammenhängendes offenes Gebiet, dessen Rand  $\partial D$  aus einfach geschlossenen (stückweise) glatten Kurven besteht.  $D$  möge zusammen mit  $\partial D$  in einem Holomorphiegebiet liegen. Dann gilt für jeden Punkt  $z_0 \in D$ , dass

$$\int_{\partial D} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$



## 6.9 Ableitungen einer holomorphen Funktion

Man kann in der Cauchyschen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0}$$

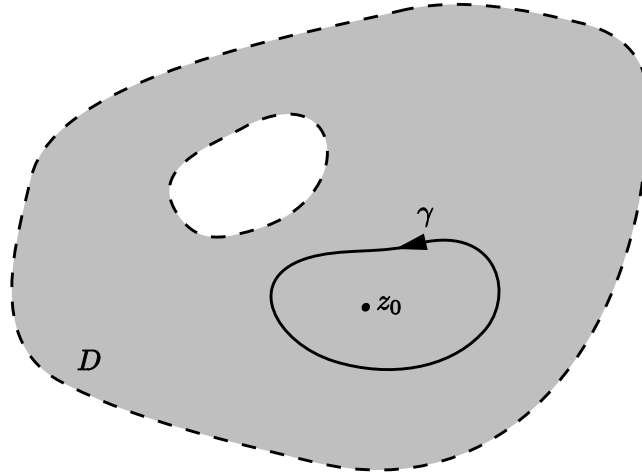
(beliebig oft) unter dem Integralzeichen nach  $z_0$  differenzieren. Diese bemerkenswerte Tatsache lässt sich auf folgende Weise präzise formulieren:

**Satz:** Ist  $f(z)$  holomorph in einem offenen Gebiet  $D$ , dann ist  $f$  in  $D$  **beliebig** oft differenzierbar, wobei

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad z_0 \in D, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Dabei ist  $\gamma$  eine einfach geschlossene, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kurve, die zusammen mit ihrem Inneren in  $D$  liegt.



Der **Beweis** dieses Satzes erfolgt durch **vollständige Induktion**. Für  $n = 0$  handelt es sich einfach um die Cauchysche Integralformel, von deren Gültigkeit wir uns ja schon überzeugt hatten. Wir nehmen also an, dass die obige Formel für die natürliche Zahl  $n$  richtig ist und versuchen aus dieser Annahme ihre Gültigkeit für  $n + 1$  zu folgern:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(z_0 + h) - f^{(n)}(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n!}{2\pi i h} \left[ \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^{n+1}} - \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Hier wurde im ersten Schritt die Definition der  $n+1$ -ten Ableitung und im zweiten die Induktionsannahme verwendet. Wir definieren nun eine Funktion  $g(z - z_0, h)$  durch

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(z - z_0 - h)^{n+1}} - \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \right] = \frac{n+1}{(z - z_0)^{n+2}} + g(z - z_0, h).$$

Oben eingesetzt ergibt dies

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} + \frac{n!}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\gamma} dz g(z - z_0, h).$$

Wenn wir also zeigen können, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\gamma} dz g(z - z_0, h)$$

verschwindet, dann haben wir den Satz bewiesen. Man rechnet leicht nach, dass

$$g(z - z_0 - h) = \frac{h}{(z - z_0 - h)^{n+1}} \left[ \frac{(n+1)^2}{(z - z_0)^2} - \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-h)^{k-2}}{(z - z_0)^{k+1}} [z - z_0 + (n+1)h] \right],$$

wobei letztlich nur wesentlich ist, dass

$$g(z - z_0, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Da

$$\int_{\gamma} dz g(z - z_0, h) = \int_{|z-z_0|=r} dz g(z - z_0, h),$$

wobei man  $|h| \leq r/2$  wählen kann, erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung und

$$\frac{1}{|z - z_0 - h|} \leq \frac{2}{d}$$

die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} dz g(z - z_0, h) \right| \leq |h| C(r) + \mathcal{O}(|h|^2) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

**Bemerkung:** Dieser Satz zeigt, wie **stark** die Forderung der Differenzierbarkeit einer Funktion im **Komplexen** ist. Ist sie **ein** Mal differenzierbar, so ist sie bereits **beliebig oft** differenzierbar. Dies gilt für Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  natürlich nicht. Die Abbildung

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist zwar für alle  $x \in \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, doch bereits  $f'(x)$  ist bei  $x = 0$  **nicht** differenzierbar.

Wir können jetzt die **Umkehrung** des Satzes von Cauchy zeigen:

**Satz von Morera:** Ist  $f$  stetig in einem einfach zusammenhängenden offenen Gebiet  $D$  und ist

$$\int_{\gamma} dz f(z) = 0$$

für jede geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $D$ , dann ist  $f$  holomorph in  $D$ .

**Beweis:** Wir hatten bereits früher gezeigt, dass unter der Voraussetzung des Satzes von Morera die Funktion

$$F(z) = \int_{z_0}^z dz' f(z')$$

in  $D$  holomorph ist mit  $F'(z) = f(z)$ . Aus dem vorigen Satz folgt nun darüberhinaus, dass  $F'(z) = f(z)$  ebenfalls holomorph ist.

**Ungleichung von Cauchy:** Sei  $f$  holomorph und  $K$  ein Kreis mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $z_0$ . Weiters sei  $M$  das Maximum von  $|f(z)|$  auf  $K$ . Dann gilt die Ungleichung

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

**Beweis:** Man verwendet den Satz über die  $n$ -te Ableitung einer holomorphen Funktion:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_K dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

Aus dieser Ungleichung folgt der **Satz von Liouville:** Eine in ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.

**Beweis:** Laut Voraussetzung ist  $|f(z)| < K \forall z \in \mathbb{C}$ . Aus der Ungleichung von Cauchy mit  $n = 1$  folgt, dass

$$|f'(z_0)| \leq \frac{K}{r}$$

für **beliebig** großes  $r$ . Somit ist  $|f'(z_0)| = 0$  und da  $z_0$  beliebig ist, ist  $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z)$  ist konstant.

**Bemerkung:** Auch das ist wieder ein Satz, der in der reellen Analysis **nicht** gilt. So ist z.B. die Funktion  $x \mapsto \cos x$  für reelle  $x$  differenzierbar und es gilt  $|\cos x| \leq 1$ . Aber die Funktion ist offensichtlich nicht konstant.

**Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes Polynom der Form

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0, \quad n \geq 1,$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_k$  besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

Der **Beweis** wird indirekt geführt: Angenommen  $p(z)$  hätte in der ganzen komplexen Ebene keine Nullstelle. Dann wäre die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph. Setzt man  $z = 1/\tilde{z}$ , so ist

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = g(\tilde{z}) = \frac{\tilde{z}^n}{1 + a_{n-1}\tilde{z} + \cdots + a_0\tilde{z}^n}$$

eine für  $\tilde{z} = 0$  stetige Funktion mit  $g(0) = 0$ . Wegen der Stetigkeit gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$ , sodass  $|g(\tilde{z})| < \varepsilon$ , sofern  $|\tilde{z}| < \delta(\varepsilon)$ . Das bedeutet aber, dass

$$|f(z)| < \varepsilon \text{ für } |z| > \frac{1}{\delta(\varepsilon)}.$$

Da  $f(z)$  im kompakten Gebiet  $|z| \leq 1/\delta(\varepsilon)$  stetig und damit beschränkt ist, ist  $f(z)$  in ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt und somit ist  $f(z)$  nach dem Satz von Liouville eine konstante Funktion. Daraus folgt, dass auch  $p(z)$  konstant ist, was für Polynome deren Grad mindestens gleich eins ist, sicher nicht zutrifft. Man erhält also einen Widerspruch.

**Bemerkung:** Auch dieser Satz gilt im Reellen nicht. So besitzt z.B. das reelle Polynom  $x^2 + 1$  **keine** reelle Nullstelle (sehr wohl aber komplexe Nullstellen  $\pm i$ ).

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt natürlich sofort, dass  $p(z)$  in der Form

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

geschrieben werden kann, wobei die Zahlen  $z_k \in \mathbb{C}$  die Nullstellen des Polynoms sind, wobei natürlich auch  $z_k = z_l$  für  $k \neq l$  möglich ist. Bezeichnen wir nämlich jene nach dem Fundamentalsatz der Algebra sicher existierende Nullstelle mit  $z_1$ , so haben wir

$$\begin{aligned} p(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 \\ 0 &= z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1} + \cdots + a_1z_1 + a_0. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die beiden Zeilen und beachtet die Formel

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \cdots + z_1^{k-1}),$$

so erhält man

$$p(z) = (z - z_1)q(z)$$

mit einem Polynom  $q(z)$  vom Grad  $n-1$ . Auf dieses Polynom wendet man wieder den Fundamentalsatz der Algebra an und gelangt durch Iteration des Verfahrens schließlich zu der obigen Zerlegung von  $p(z)$  in Linearfaktoren.

## 6.10 Unendliche Reihen komplexer Zahlen

**Vergleichskriterium:** Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

eine unendliche Reihe, über deren Konvergenz zu entscheiden sei. **Hinreichend** für ihre Konvergenz ist, dass es nichtnegative Zahlen  $d_n$  gibt, sodass  $|c_n| \leq d_n$  und die Majoranten-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

konvergiert.

Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

konvergiert für  $|z| < 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Die Reihe divergiert für  $|z| \geq 1$ .

**Die geometrische Reihe als Vergleichsreihe:** Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

ist konvergent, falls ab einem gewissen Index  $N$   $|c_n| \leq Mq^n$  mit  $M > 0$  und  $0 < q < 1$ .

**Quotientenkriterium:** Man betrachtet die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Ist für alle  $n \geq N$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq q \quad (0 < q < 1),$$

dann ist die Reihe absolut konvergent.

Ist dagegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N,$$

dann divergiert die Reihe.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} |c_{N+1}| &\leq q|c_N|, \\ |c_{N+2}| &\leq q|c_{N+1}| \leq q^2|c_N|, \\ &\dots \quad \dots \\ |c_{N+\nu}| &\leq q^\nu|c_N|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{N-1} |c_n| + \sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{|c_{N+\nu}|}_{\leq q^\nu|c_N|} \leq \sum_{n=1}^{N-1} |c_n| + \frac{|c_N|}{1-q}.$$

Ist dagegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$$

$\Rightarrow |c_{n+1}| \geq |c_n|$ , d.h. die  $c_n$  bilden keine Nullfolge und die Reihe ist daher divergent.

Manchmal sieht man folgende Formulierung des Quotientenkriteriums: Angenommen  $|c_{n+1}/c_n|$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}/c_n| = L$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  ist dann absolut konvergent, falls  $L < 1$  und divergent, falls  $L > 1$ . Im Fall  $L = 1$  ist keine Aussage über die Konvergenz der Reihe möglich.

Diese Form des Quotientenkriteriums folgt unmittelbar aus der ursprünglichen Formulierung:

1. Es sei  $L < 1$ . Man wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass  $L + \varepsilon < 1$ . Da  $|c_{n+1}/c_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  gibt es einen Index  $N(\varepsilon)$ , sodass  $||c_{n+1}/c_n| - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < \underbrace{L + \varepsilon}_q \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ ist konvergent.}$$

2. Es sei  $L > 1$ . Dann ist  $|c_{n+1}/c_n| > 1$  für fast alle  $n$ .  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  ist divergent.

### Beispiele:

1. Für die Potenzreihe der Exponentialfunktion,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{c_n}, \quad z \in \mathbb{C},$$

gilt

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$ . Die Reihe konvergiert daher in ganz  $\mathbb{C}$ .

2. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent, aber

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

In diesem Fall gestattet das Quotientenkriterium keine Aussage.

3. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist konvergent, aber

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Wieder versagt das Quotientenkriterium.

4. Im Fall der Reihe

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{64} & +\frac{1}{128} & +\frac{1}{512} & +\dots = \\ 1 & & +\frac{1}{8} & & +\frac{1}{64} & & +\frac{1}{512} & \\ & +\frac{1}{2} & & +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} & & +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} & & +\dots \end{array}$$

ist

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

Das Quotientenkriterium in der zweiten Fassung ist in diesem Fall nicht anwendbar, wohl aber in der ersten Fassung, da

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n.$$

Die Reihe ist daher konvergent.

**Wurzelkriterium:** Man betrachtet die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Wenn für alle  $n \geq N$  gilt, dass  $\sqrt[n]{|c_n|} \leq q < 1$  ist, dann ist die Reihe absolut konvergent. Ist dagegen für unendlich viele  $n$   $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$ , dann divergiert die Reihe.

**Beweis:**

1.  $\sqrt[n]{|c_n|} \leq q < 1 \Rightarrow |c_n| \leq q^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  ist absolut konvergent durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.
2.  $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n \Rightarrow |c_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n \Rightarrow c_n$  bilden keine Nullfolge  $\Rightarrow$  die Reihe ist divergent.

Eine andere Formulierung des Wurzelkriteriums: Ist  $\sqrt[n]{|c_n|}$  konvergent mit dem Limes  $L$ , dann ist die Reihe absolut konvergent, falls  $L < 1$  ist und divergent für  $L > 1$ . Für  $L = 1$  ist keine Aussage möglich.

**Beweis:** Analog zum Beweis der zweiten Version des Quotientenkriteriums.

**Beispiele:**

1. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

ist konvergent, da

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{e^{2/n \ln n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Bemerkung:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ .

2. Für die divergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

gestattet das Wurzelkriterium keine Aussage, da

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{e^{1/n \ln n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

3. Auch für die konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist mit Hilfe des Wurzelkriteriums keine Entscheidung möglich:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} = \frac{1}{e^{2/n \ln n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$



Was macht man, wenn die Folge  $\sqrt[n]{|c_n|}$  **keinen** Grenzwert besitzt? Im Allgemeinen wird die Folge einfach mehrere Häufungspunkte besitzen. Den **größten** dieser Häufungspunkte bezeichnet man mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \equiv \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Man kann daher das Wurzelkriterium auch so formulieren:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ absolut konvergent,} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ divergent.} \end{aligned}$$

## 6.11 Potenzreihen

Wir stellen uns nun die Frage, für welche  $z \in \mathbb{C}$  eine **Potenzreihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

konvergiert. Wir wenden das Wurzelkriterium auf  $c_n = a_n z^n$  an und erhalten die Aussage, dass die Reihe absolut konvergiert, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z| < 1.$$

Anders ausgedrückt, die Potenzreihe ist absolut konvergent, für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit

$$|z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} =: \rho.$$

Dieser Ausdruck für den **Konvergenzradius**  $\rho$  der Reihe wird auch als **Formel von Cauchy-Hadamard** bezeichnet. Für  $|z| > \rho$  divergiert die Potenzreihe und für  $|z| = \rho$  kann sie konvergent oder divergent sein.

Ist die Folge  $|a_{n+1}/a_n|$  konvergent, dann kann das Quotientenkriterium zur Berechnung des Konvergenzradius benutzt werden. Die Potenzreihe ist konvergent, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}z}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| < 1,$$

das heißt die Reihe ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \rho$$

konvergent.

**Bemerkung:** Die hier angestellten Überlegungen gelten natürlich auch für Potenzreihen vom Typ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wenn man  $z$  durch  $z - z_0$  ersetzt.

**Beispiele:**

1. Die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  besitzt den Konvergenzradius  $\rho = 1$ . Sie ist für  $|z| = 1$  **divergent**, da die Zahlen  $e^{in\theta}$  keine Nullfolge bilden.
2. Für die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  ergibt das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1.$$

Abgesehen von  $z = 1$  ist diese Reihe für  $|z| = 1$  **konvergent**.

3. Das Quotientenkriterium liefert für die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1.$$

Diese Reihe ist für alle  $z$  mit  $|z| = 1$  konvergent.

4. Die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

ist nach dem Quotientenkriterium für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergent:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \infty.$$

## 6.12 Reihen von Funktionen

Die Potenzreihe ist ein Spezialfall einer **Funktionsreihe**,

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z),$$

wobei die Funktionen  $g_k$  auf einem gemeinsamen Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  definiert sind. Man sagt, dass eine solche Reihe in  $G$  **gleichmäßig** gegen die Funktion  $f(z)$  konvergiert, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen von  $z$  **unabhängigen** Index  $N(\varepsilon)$  gibt, sodass  $\left| f(z) - \sum_{k=0}^n g_k(z) \right| < \varepsilon$ , sofern  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Das **Konvergenzkriterium von Weierstrass** besagt, dass  $\sum_{k=0}^n g_k(z)$  in  $G$  gleichmäßig und absolut konvergiert, wenn für alle  $z \in G$

$$|g_k(z)| \leq c_k$$

und die Reihe  $\sum_{k=0}^n c_k$  konvergent ist.

**Beweis:** Laut Voraussetzung gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N(\varepsilon)$ , sodass

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} < \varepsilon$$

für alle  $p > 0$ , sofern  $n \geq N(\varepsilon)$  (Cauchysches Konvergenzkriterium für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ). Dann ist aber auch

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(z) + \cdots + g_{k+p}(z)| &\leq |g_{k+1}(z)| + \cdots + |g_{k+p}(z)| \\ &\leq c_{k+1} + \cdots + c_{k+p} < \varepsilon \end{aligned}$$

unabhängig von  $z \in G$ .

**Satz:** Ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$  in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  gleichmäßig konvergent und sind die einzelnen Funktionen  $g_k(z)$  stetig an einem Punkt  $z_0 \in G$ , dann ist auch die Funktion  $f$  am Punkt  $z_0$  stetig.

**Beweis:** Wir betrachten die  $n$ -te **Partialsumme**

$$s_n = \sum_{k=0}^n g_k$$

und den dazugehörigen **Reihenrest**

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k.$$

Es sei nun eine Zahl  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann kann man wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe einen (von  $z$  unabhängigen) Index  $N$  finden, sodass

$$|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall z \in G.$$

Da  $s_N$  die Summe von **endlich** vielen an der Stelle  $z_0$  stetigen Funktionen ist, ist  $s_N$  bei  $z_0$  stetig. Man kann daher ein  $\delta > 0$  finden, sodass

$$\begin{aligned} |s_N(z) - s_N(z_0)| &< \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall z \in G \text{ mit } |z - z_0| < \delta \\ \Rightarrow |F(z) - F(z_0)| &= |s_N(z) + R_N(z) - s_N(z_0) - R_N(z_0)| \\ &\leq |s_N(z) - s_N(z_0)| + |R_N(z)| + |R_N(z_0)| \\ &< \varepsilon \quad \forall z \text{ mit } |z - z_0| < \delta \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$  ist an der Stelle  $z_0$  stetig.

Falls die Funktionen  $g_k$  in allen Punkten einer in  $G$  liegenden Kurve  $\gamma$  der Länge  $l(\gamma) < \infty$  stetig sind, dann ist somit  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$  auf  $\gamma$  stetig und kann daher längs dieser Kurve integriert werden. Es gilt

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} dz g_k(z),$$

d.h. eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen kann gliedweise integriert werden. Der Beweis dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) - \int_{\gamma} dz s_n(z) \right| = \left| \int_{\gamma} dz [f(z) - s_n(z)] \right| \leq |f(z) - s_n(z)| l(\gamma).$$

Es seien nun die Funktionen  $g_k$  in einem einfach zusammenhängenden offenen Gebiet  $G$  holomorph und  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$  in jeder kompakten Teilmenge von  $G$  gleichmäßig konvergent. Dann folgt aus den eben bewiesenen Sätzen, dass  $f$  in  $G$  stetig ist und die Reihe längs jeder ganz in  $G$  verlaufenden Kurve gliedweise integriert werden kann. Insbesondere gilt für jede geschlossene, ganz in  $G$  verlaufende Kurve  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\gamma} dz g_k(z) = 0,$$

da wegen des Cauchyschen Integralsatzes

$$\oint_{\gamma} dz g_k(z) = 0$$

für die holomorphen Funktionen  $g_k$ . Nach dem Satz von Morera ist somit auch die Funktion  $f$  in  $G$  holomorph.

Es sei nun  $\gamma$  eine ganz in  $G$  liegende, einfach geschlossene und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kurve. Dann gilt für alle Punkte  $z_0$  im Inneren von  $\gamma$ , dass

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(z)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\gamma} dz \frac{g_k(z)}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Nur der letzte Schritt bedarf einer Erläuterung: Es sei

$$d = \inf_{z \in \gamma} |z - z_0|,$$

d.h.  $|z - z_0| > d \forall z \in \gamma$ . Da die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$  laut Voraussetzung auf der durch die Kurve gebildeten  $\gamma$  kompakten Menge gleichmäßig und absolut konvergent ist, ist wegen der für alle  $z \in \gamma$  erfüllten Ungleichung

$$\left| \frac{g_k(z)}{z - z_0} \right| < \frac{|g_k(z)|}{d}$$

auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(z)}{z - z_0}$$

auf  $\gamma$  gleichmäßig konvergent. Die Vertauschung von Summe und Integral ist somit gerechtfertigt. Völlig analog zeigt man, dass unter den obigen Voraussetzungen auch

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\gamma} dz \frac{g_k(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

erfüllt ist. Das heißt, die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$  kann beliebig oft gliedweise differenziert werden.

## 6.13 Sätze über Potenzreihen

Die im vorigen Abschnitt über Reihen von Funktionen erhaltenen Resultate können nun auf den Spezialfall von Potenzreihen angewendet werden.

**Satz:** Eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit Konvergenzradius  $\rho$  konvergiert in jedem kompakten Gebiet  $K_r = \{z \mid |z| \leq r, r < \rho\}$  gleichmäßig und absolut. Sie ist für  $|z| < \rho$  beliebig oft gliedweise differenzierbar. Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ist wieder  $\rho$ . Ebenso kann die Potenzreihe für  $|z| < \rho$  gliedweise integriert werden.

**Bemerkung:** Dass

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

den gleichen Konvergenzradius wie  $f(z)$  besitzt, folgt aus

$$\sqrt[k]{|k a_k|} = \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Ebenso hat die durch gliedweise Integration von  $f(z)$  erhaltene Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$$

den gleichen Konvergenzradius, da

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k+1]{\frac{|a_k|}{k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

**Definition:**  $f$  heißt **analytisch** in einem Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in D$  in eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  entwickelbar ist.

$$\boxed{f \text{ analytisch} \Rightarrow f \text{ holomorph}}$$

**Identitätssatz für Potenzreihen:** Wenn zwei Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  für  $|z| < \rho$  ( $\rho > 0$ ) konvergieren und wenn für  $|z| < \rho$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

dann ist  $a_k = b_k$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Beweis:** Setzt man  $z = 0$  ein, so folgt  $a_0 = b_0$ . Nach  $n$ -maligem Differenzieren und Einsetzen von  $z = 0$  erhält man  $a_n = b_n$ .

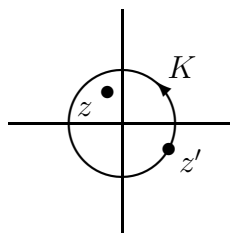
**Bemerkung:**

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &\Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n \\ \Rightarrow f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k. \end{aligned}$$

Jede Potenzreihe ist **Taylorische Reihe** der durch sie dargestellten Funktion.

## 6.14 Taylorreihen

Die Funktion  $f$  sei holomorph in einer Umgebung des Ursprungs. Sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt 0, der ganz in dieser Umgebung liegt. Wir wenden die Cauchysche Integralformel an ( $z$  im Inneren von  $K$ ):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K dz' f(z') / (z' - z)$$


$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z'(1 - \frac{z}{z'})}, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| < 1$$

$$\begin{aligned}
1 + q + q^2 + \dots + q^n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1 \\
\Rightarrow \frac{1}{1 - q} &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q} \\
\Rightarrow f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \sum_{k=0}^n \int_K dz' \frac{f(z')}{z'} \left(\frac{z}{z'}\right)^k + \int_K dz' \frac{f(z')}{z'} \frac{\left(\frac{z}{z'}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{z'}} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[ \sum_{k=0}^n z^k \underbrace{\int_K dz' \frac{f(z')}{(z')^{k+1}}}_{2\pi i f^{(k)}(0)} + z^{n+1} \int_K dz' \frac{f(z')}{(z' - z)(z')^{n+1}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \underbrace{\frac{z^{n+1}}{2\pi i} \int_K dz' \frac{f(z')}{(z' - z)(z')^{n+1}}}_{R_n(z)}
\end{aligned}$$

Noch zu zeigen:  $R_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $z$  innerhalb von  $K$ .

$z'$  liegt auf  $K$ ,  $z$  innerhalb von  $K \Rightarrow |z - z'| > 0$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z')}{z - z'} \right| < M \quad \forall z' \in K \quad (\text{für festes } z)$$

$r$  sei der Radius von  $K$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |R_n(z)| &\leq \frac{|z|^{n+1}}{2\pi} M \frac{2\pi r}{r^{n+1}} = \\
&= Mr \frac{|z|^{n+1}}{r^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{da } \frac{|z|}{r} < 1
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

$$\boxed{f \text{ holomorph} \Rightarrow f \text{ analytisch}}$$

Zusammen mit dem früheren Resultat:

$$\boxed{f \text{ holomorph} \Leftrightarrow f \text{ analytisch}}$$



**Bemerkung:** Das ist wieder ein Resultat, das in der reellen Analysis nicht gilt, denn dort folgt aus der Differenzierbarkeit einer Funktion keineswegs auch schon deren Analytizität. Man betrachte die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  ist am Punkt  $x = 0$  zwar beliebig oft differenzierbar, doch die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

stellt wegen  $f^{(k)}(0) = 0$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  die Funktion  $f$  in keiner noch so kleinen Umgebung des Punktes 0 dar.

**Beispiele** für Taylorreihen:

$$1. \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots$$

$$2. \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots$$

## 6.15 Laurentreihen

Wir betrachten eine unendliche Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{f_1(z)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^n}_{f_2(z)}.$$

$f_1(z)$  ist konvergent für

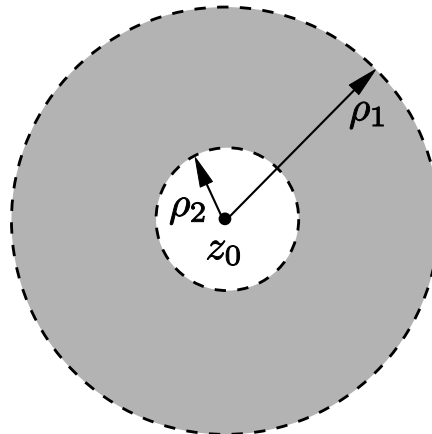
$$|z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n \geq 0} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho_1,$$

$f_2(z)$  ist konvergent für

$$\limsup_{n \geq 1} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \frac{1}{|z - z_0|} < 1,$$

das heißt für

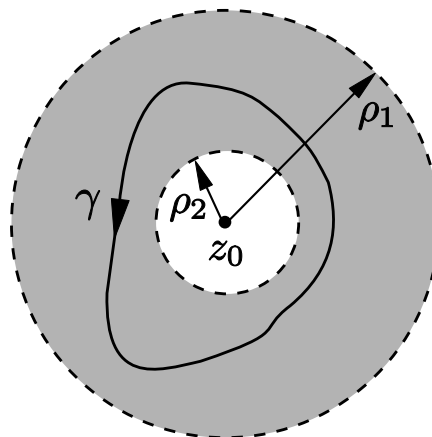
$$|z - z_0| > \limsup_{n \geq 1} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \rho_2$$



$\Rightarrow f$  ist konvergent für  $\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1$ .

**Satz:** Jede in einem Kreisring  $\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1$  holomorphe Funktion lässt sich in diesem Kreisring in eine Laurentreihe entwickeln. Für die Koeffizienten  $a_n, n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz' \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}$$



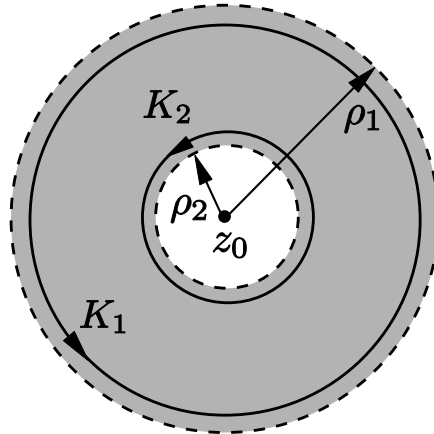
**Bemerkung:** Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass die Laurentreihe gliedweise integriert werden kann:

$$n = -1 : \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz' f(z')$$

**Beweis:** Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf den Fall  $z_0 = 0$ . Nach

der Cauchyschen Integralformel ist

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} dz' \frac{f(z')}{z' - z}}_{f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} dz' \frac{f(z')}{z' - z}}_{f_2(z)}$$



Bei der Integration über  $K_1$  ist  $|z/z'| < 1$ . Man entwickelt daher

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' \left(1 - \frac{z}{z'}\right)}$$

in eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z'} \left[ 1 + \frac{z}{z'} + \cdots + \left(\frac{z}{z'}\right)^n \right] + \frac{1}{z' - z} \left(\frac{z}{z'}\right)^{n+1}$$

und schätzt den sich ergebenden Reihenrest wie im Beweis für die Taylorreihe ab.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{K_1} dz' \frac{f(z')}{z'} \frac{z^n}{(z')^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} dz' \frac{f(z')}{(z')^{n+1}}}_{a_n, n \geq 0} \end{aligned}$$

Die Verschiebung  $K_1 \rightarrow \gamma$  ist möglich, da der Integrand  $f(z')/(z')^{n+1}$  im Gebiet zwischen  $K_1$  und  $\gamma$  holomorph ist.

Bei der Integration über  $K_2$  ist  $|z'/z| < 1$ , man setzt daher

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{z'}{z} + \cdots + \left(\frac{z'}{z}\right)^n \right] + \frac{1}{z - z'} \left(\frac{z'}{z}\right)^{n+1}$$

in das Integral ein. Wieder kann man sich überzeugen, dass der Reihenrest gegen Null konvergiert und man erhält

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{K_2} dz' \frac{f(z')}{z'^{k+1}} (z')^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} dz' f(z') (z')^{n-1}}_{a_{-n}}. \end{aligned}$$

Wieder ist die Verschiebung des Integrationsweges  $K_2 \rightarrow \gamma$  möglich.

**Bemerkung:** Die Laurentreihe einer gegebenen holomorphen Funktion ist innerhalb ihres Konvergenzkreises eindeutig.

**Beispiele:**

1. Die Laurententwicklung von  $z^2 e^{1/z}$  um  $z_0 = 0$ ,

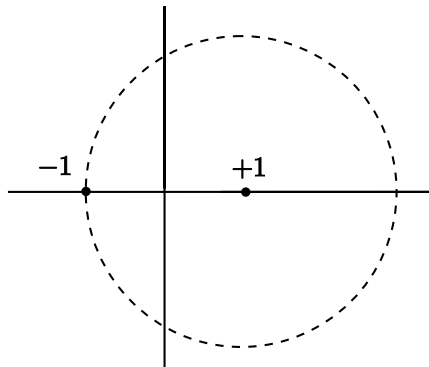
$$\begin{aligned} z^2 e^{1/z} &= z^2 \left( 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \right) \\ &= z^2 + \frac{z}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \end{aligned}$$

ist für  $|z| > 0$  konvergent.

2. Laurentreihen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

um  $z_0 = 1$ :



$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(1-z)(1+z)} = -\frac{1}{(z+1)(z-1)} \\
 \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n
 \end{aligned}$$

konvergiert für  $|z-1| < 2$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

für  $0 < |z-1| < 2$ .

Entwicklung für  $|z-1| > 2$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{2}{z-1}\right)} = \\
 &= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

konvergiert für  $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$ , d.h.  $|z-1| > 2$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} \\
 &= -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{(z-1)^4} + \dots
 \end{aligned}$$

für  $|z-1| > 2$ .

**Bemerkung:** Ist  $z_0$  der einzige singuläre Punkt von  $f(z)$  in einer gewissen Umgebung von  $z_0$ , dann konvergiert die Laurentreihe um  $z_0$  in einem Bereich von der Form  $0 < |z - z_0| < R$ . Die Singularität von  $f(z)$  bei  $z = z_0$  heißt **Pol**, wenn die Laurententwicklung **endlich** viele negative Potenzen besitzt. Sie heißt **wesentliche Singularität**, wenn die Laurententwicklung unendlich viele negative Potenzen besitzt. Entscheidend ist dabei, dass die Laurententwicklung in der **Umgebung von**  $z_0$  untersucht wird! Eine Funktion, die bis auf Pole holomorph ist, heißt **meromorph**.

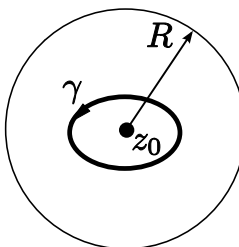
## 6.16 Residuen

Die Funktion  $f$  habe eine isolierte Singularität bei  $z = z_0$ . Dann kann  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  (mit Ausnahme von  $z_0$ ) durch eine Laurentreihe beschrieben werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergiert für  $0 < |z - z_0| < R$ .  $R$  ist der Abstand von  $z_0$  zur nächsten Singularität von  $f$ .

Wir wissen:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz f(z) =: \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$


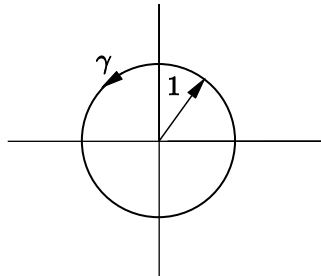
Diese Zahl bezeichnet man als **Residuum** von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

$$\Rightarrow \int_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

**Beispiel:**

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left[ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \right] = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - + \dots$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{3!}$$



$$\Rightarrow \int_{\gamma} dz \frac{\sin z}{z^4} = -\frac{2\pi i}{3!} = -\frac{\pi i}{3}$$

**Methoden zur Berechnung des Residuums:**

Angenommen  $f$  hat einen **einfachen Pol** an der Stelle  $z_0$ , d.h.

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

für **einfachen Pol**.

Anwendung auf Funktionen der Gestalt

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

$p, q$  holomorph bei  $z = z_0$ ,  $p(z_0) \neq 0$ ,  $q(z)$  habe eine einfache Nullstelle bei  $z = z_0$ ,  $q'(z_0) \neq 0$ .

$$q(z) = q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0) [q'(z_0)(z - z_0) + q''(z_0)(z - z_0)^2/2! + \dots]} \\ &= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

im Fall eines **einfachen Pols** bei  $z_0$ .

**Beispiel:** Die Funktion

$$f(z) = \frac{4 - 3z}{z^2 - z}$$

hat einfache Pole bei  $z = 0$  und  $z = 1$ .

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left. \frac{4 - 3z}{2z - 1} \right|_{z=0} = -4$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \left. \frac{4 - 3z}{2z - 1} \right|_{z=1} = 1$$

**Pole höherer Ordnung:**

$f$  habe einen Pol der Ordnung  $m > 1$  am Punkt  $z_0$ :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\underbrace{(z - z_0)^m f(z)}_{=:g(z)} = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{-1} &= \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right] \end{aligned}$$

für einen Pol  $m$ -ter Ordnung.

**Beispiel:** Die Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

hat einen Pol zweiter Ordnung an der Stelle  $z = 1$ .

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2} \right] = \left. \frac{(z+4)2 - 2z}{(z+4)^2} \right|_{z=1} = \frac{8}{25}$$

**Partialbruchzerlegung:**

$$\frac{1}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

$$1 = A(z-1)^2 + B(z+4)(z-1) + C(z+4)$$

$$z = 1 \quad 1 = 5C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{5}$$

$$z = -4 \quad A = \frac{1}{25}$$

$$z = 0 \quad 1 = A - 4B + 4C$$

$$\Rightarrow 4B = A + 4C - 1 = \frac{1}{25} + \frac{4}{5} - \frac{25}{25} = \frac{1 + 20 - 25}{25} = -\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{25}$$

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{2}{25} \left[ \frac{z}{z+4} + \frac{4z}{z-1} + \frac{5}{(z-1)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{8}{25}, \quad \operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = -\frac{8}{25}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = \left. \frac{2z}{(z-1)^2} \right|_{z=-4} = -\frac{8}{25}$$

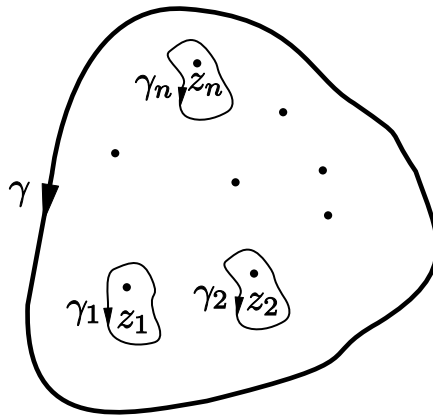


## 6.17 Residuensatz

Die Funktion  $f$  sei holomorph, bis auf endlich viele Singularitäten  $z_1, \dots, z_n$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} dz f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z),$$

wobei  $\gamma_k$  nur  $z_k$  umschließt, aber keine weitere Singularität von  $f$ .



**Beispiele:**

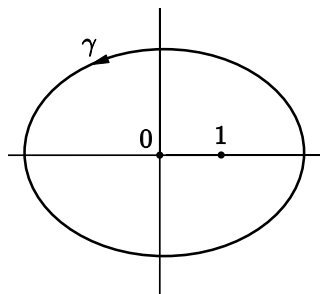
1. Die Funktion

$$\frac{4 - 3z}{z^2 - z}$$

hat einfache Pole bei  $z = 0$  und  $z = 1$  mit Residuen  $-4$  und  $1$ .

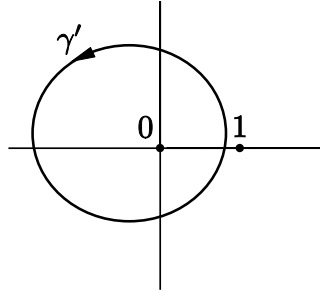
$$\Rightarrow \int_{\gamma} dz \frac{4 - 3z}{z^2 - z} = 2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i$$

für jede einfach geschlossene Kurve  $\gamma$ , die  $0$  und  $1$  umschließt.



Umschließt dagegen eine Kurve  $\gamma'$  nur den Nullpunkt, aber nicht den Punkt 1, so ist

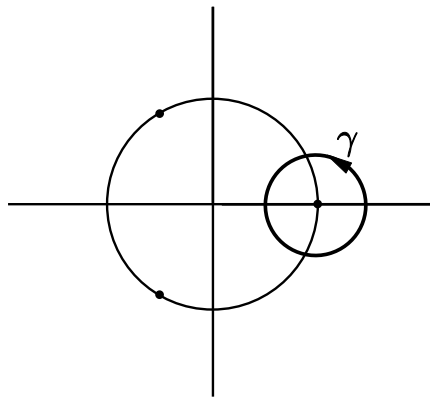
$$\int_{\gamma'} \frac{4-3z}{z^2-z} = 8\pi i.$$



2. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^3-1)^2}$$

hat Pole zweiter Ordnung bei  $z = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ .



Die Kurve  $\gamma$  umschließt nur den Pol bei  $z = 1$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{1}{(z^3-1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{z-1}{(z-1)(z^2+z+1)} \right)^2 \\ &= -2(z^2+z+1)^{-3} (2z+1) \Big|_{z=1} \\ &= -\frac{2}{3^3} 3 = -\frac{2}{9} \\ \Rightarrow \int_{\gamma} dz \frac{1}{(z^3-1)^2} &= -\frac{4\pi i}{9}. \end{aligned}$$

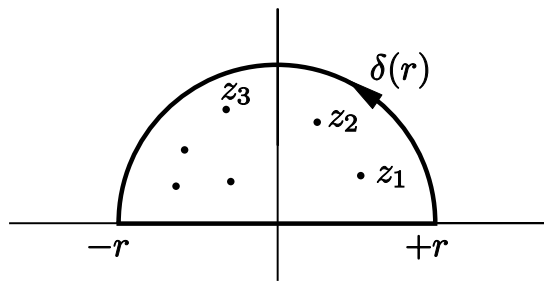
## 6.18 Berechnung von reellen Integralen

Die Berechnung von vielen Typen bestimmter und uneigentlicher Integrale reeller Funktionen kann mit Hilfe des Residuensatzes in wenigen Zeilen abgetan werden.

1. Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x).$$

$f$  sei eine rationale Funktion mit  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} k/z^m$ ,  $m \geq 2$ , **ohne** reelle Pole.



$$\int_{-r}^{+r} dz f(z) + \int_{\delta(r)} dz f(z) = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z)$$

$$\left| \int_{\delta(r)} dz f(z) \right| < \frac{|k|}{r^m} \pi r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \text{da } m \geq 2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z)$$

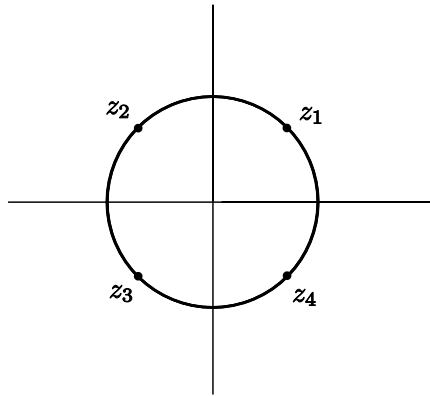
**Beispiel:** Berechnung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Der Integrand hat vier einfache Pole bei  $z_1 = e^{i\pi/4}$ ,  $z_2 = e^{3i\pi/4}$ ,  $z_3 = e^{5i\pi/4}$ ,  $z_4 = e^{7i\pi/4}$ .

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=z_1} = \left[ \frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_1} = \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-3i\pi/4}$$

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{-i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}$$



$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{2\pi i}{4} \left( \underbrace{e^{-3i\pi/4}}_{e^{-i\pi/4}} + e^{-i\pi/4} \right) \\ &= -\frac{\pi i}{2} \underbrace{(e^{-i\pi/4} + e^{-i\pi/4})}_{2i \sin \frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

## 2. Integrale vom Typ

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta f(\cos \theta, \sin \theta).$$

$f(\cos \theta, \sin \theta)$  sei dabei eine rationale Funktion in  $\cos \theta$  und  $\sin \theta$ , die für  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  endlich bleibt. Setzt man  $e^{i\theta} = z$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \\ dz &= i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \\ \Rightarrow I &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz} f \left( \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) \end{aligned}$$

**Beispiel:** Sei  $p \in \mathbb{R}, 0 < p < 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{1 - 2\frac{p}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i[z - pz^2 - p + p^2z]} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)}. \end{aligned}$$

Der Integrand hat Pole bei  $z = 1/p > 1$  und  $z = p < 1$ . Nur der letzte Pol liegt innerhalb des Einheitskreises.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=p} \frac{1}{i(1 - pz)(z - p)} &= \frac{1}{i(1 - pz)} \Big|_{z=p} = \frac{1}{i(1 - p^2)} \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} &= \frac{2\pi}{1 - p^2} \quad (0 < p < 1) \end{aligned}$$

3. Integrale von der Form

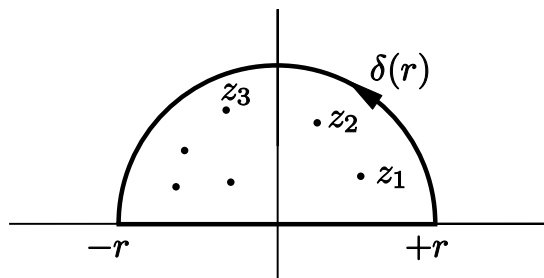
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cos sx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \sin sx$$

wobei

$$s > 0, \quad f(x) \text{ reell, } \lim_{|z| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z) = 0.$$

Man betrachtet

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \underbrace{e^{isx}}_{\cos sx + i \sin sx}$$



$$\int_{-r}^r dx f(x)e^{isx} + \int_{\delta(r)} dz f(z)e^{isz} = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res} f(z)e^{isz}$$

Abschätzung des Integrals über den Halbkreis  $\delta(r)$ :  $z(\theta) = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta(r)} dz f(z)e^{isz} \right| &= \left| \int_0^\pi d\theta re^{i\theta} i f(re^{i\theta}) e^{isr(\cos\theta + i\sin\theta)} \right| \\ &\leq \int_0^\pi d\theta r |f(re^{i\theta})| e^{-sr\sin\theta} \\ &\leq M(r)r \int_0^\pi d\theta e^{-sr\sin\theta} \end{aligned}$$

wobei  $M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |f(re^{i\theta})|$ .

Abschätzung von

$$r \int_0^\pi d\theta e^{-sr\sin\theta} = 2r \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-sr\sin\theta}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \Rightarrow \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$$

$$\begin{aligned} \stackrel{sr > 0}{\Rightarrow} 2r \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-sr\sin\theta} &\leq 2r \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-2sr\theta/\pi} \\ &\leq 2r \int_0^\infty d\theta e^{-2sr\theta/\pi} = \frac{2r}{\frac{-2sr}{\pi}} e^{-sr\theta} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\delta(r)} dz f(z)e^{isz} \right| \leq M(r) \frac{\pi}{s} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty dx f(x)e^{isx} &= 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z)e^{isz} \\ f(z) \Big|_{|z| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0} &\xrightarrow{\quad} 0, \quad s > 0 \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin sx}{k^2 + x^2}, \quad s > 0.$$

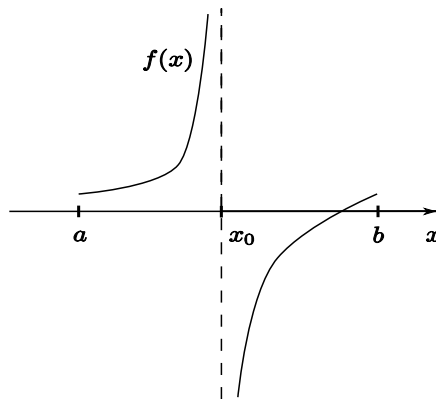
$$\frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \frac{e^{isz}}{(z - ik)(z + ik)}$$

hat in der oberen Halbebene einen einfachen Pol bei  $z = ik$  und das asymptotische Verhalten

$$\frac{1}{k^2 + z^2} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} &= \frac{e^{isik}}{2ik} = \frac{e^{-sk}}{2ik} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2} &= 2\pi i \frac{e^{-sk}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-sk} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} &= \frac{\pi}{k} e^{-sk} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin sx}{k^2 + x^2} &= 0 \end{aligned}$$

#### 4. Cauchyscher Hauptwert



Die reelle Funktion  $f$  habe einen Pol bei  $x = x_0$ . Unter dem Cauchyschen Hauptwert des Integrals  $\int_a^b dx f(x)$  versteht man dann

$$H \int_a^b dx f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} dx f(x) + \int_{x_0 + \varepsilon}^b dx f(x) \right]$$

(falls dieser Grenzwert existiert).

**Bemerkung:**

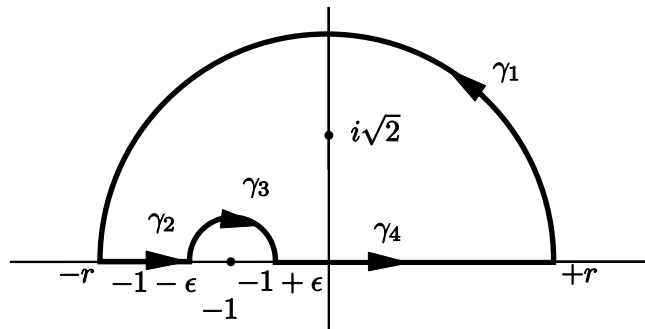
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \varepsilon} dx f(x) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0 + \eta}^b dx f(x)$$

muss nicht existieren!

**Beispiel:** Zu berechnen ist der Cauchysche Hauptwert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}.$$

Der Integrand hat Pole bei  $z = -1$  und  $z = \pm i\sqrt{2}$ . Man wählt den folgenden Integrationsweg:



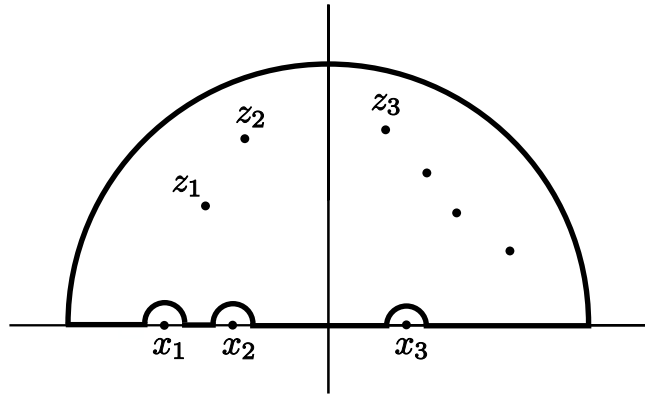
$$\begin{aligned} & \int_{-r}^{-1+\varepsilon} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)} + \int_{-1+\varepsilon}^r \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)} + \\ & + \int_{\gamma_3} \frac{dz}{(z+1)(z^2+2)} + \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z+1)(z^2+2)}}_{\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{0}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\sqrt{2}} \frac{1}{(z+1)(z^2+2)} \\ & = 2\pi i \frac{1}{(i\sqrt{2}+1)2i\sqrt{2}} \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{2}+2i} = \pi \frac{\sqrt{2}-2i}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} \frac{dz}{(z+1)(z^2+2)} &= -i\pi \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{dz}{(z+1)(z^2+2)} \\ &= -i\pi \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow H \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)} = \pi \frac{\sqrt{2}-2i}{6} + \frac{i\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}$$

Im **allgemeinen** Fall gilt



$$H \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum_{x_k} \operatorname{Res} f(z)$$

wobei die  $z_k$  Pole im Inneren der oberen Halbebene und  $x_k$  Pole auf der reellen Achse sind.

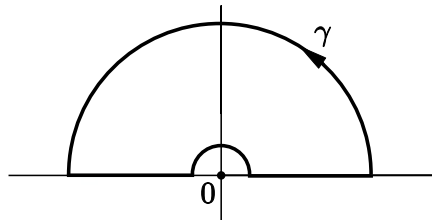
**Ein weiteres Beispiel:**

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$$

Wir betrachten dazu das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}$$

mit dem Integrationsweg



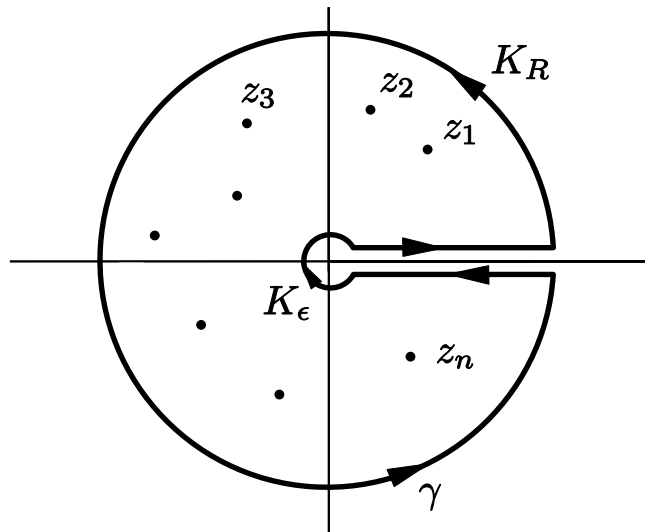
$$\Rightarrow \underbrace{H \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}}_0 + H \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin x}{x} = H \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{x} = \pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = \pi i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \pi \quad \text{Int. symm.} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

## 5. Integrale vom Typ

$$\int_0^{\infty} dx \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

$0 < \alpha < 1$ ,  $f$  rationale Funktion ohne Pol auf der reellen Halbachse  $x \geq 0$ ,  
 $f(x) \sim 1/x^m$ ,  $m \geq 1$  für  $x \rightarrow \infty$ .



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z^\alpha} &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{z^\alpha} \\ &= \int_{K_R+K_\epsilon} dz \frac{f(z)}{z^\alpha} + \int_{\epsilon}^R dx \frac{f(x)}{x^\alpha} - \int_{\epsilon}^R dx \frac{f(x)}{x^\alpha e^{2\pi i \alpha}} \\ z^\alpha &= e^{\alpha \ln z} \stackrel{z=re^{i\theta}}{=} e^{\alpha[\ln r + i\theta]} = r^\alpha e^{i\theta \alpha} \end{aligned}$$

$$\int_{K_R} dz \frac{f(z)}{z^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\theta i r e^{i\theta} \frac{f(r e^{i\theta})}{r^\alpha e^{i\theta \alpha}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{K_\epsilon} dz \frac{f(z)}{z^\alpha} = - \int_0^{2\pi} d\theta i \epsilon e^{i\theta} \frac{f(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon^\alpha e^{i\theta \alpha}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{wegen } \frac{\epsilon}{\epsilon^\alpha} = \epsilon^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{z^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{e^{2\pi i \alpha}}\right) \int_0^\infty dx \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{z^\alpha}$$

**Beispiel:**

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x+1)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{1}{z^\alpha(z+1)} = \frac{1}{e^{i\pi\alpha}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \frac{1}{e^{i\pi\alpha}} = \frac{2\pi i}{2i \sin \pi \alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

6. Beispiel eines anderen Typs:

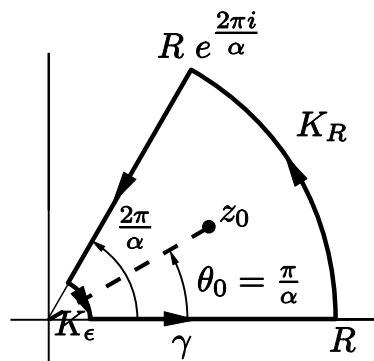
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1.$$

Man arbeitet am besten auf  $\mathcal{R}_{\ln}$ .  $\mathcal{R}_{\ln}$  wird parametrisiert durch  $(r, \theta)$ ,  $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ .

$$z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$$

$$r^\alpha e^{i\alpha\theta} = -1 = e^{i\pi} e^{i2k\pi}$$

$$\Rightarrow r = 1, \quad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{\alpha} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2}, \dots$$



$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^{\alpha}} &= \frac{2\pi i}{\alpha z_0^{\alpha-1}} \\
&= \int_{K_R+K_{\varepsilon}} \frac{dz}{1+z^{\alpha}} + \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{1+x^{\alpha}} - e^{2\pi i/\alpha} \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{1+x^{\alpha}} \\
\int_{K_{\varepsilon}} \frac{dz}{1+z^{\alpha}} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \int_{K_R} \frac{dz}{1+z^{\alpha}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{wegen } \alpha > 1 \\
(1 - e^{2\pi i/\alpha}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}} &= \frac{2\pi i}{\alpha e^{i\pi(\alpha-1)/\alpha}} \\
\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}} &= \frac{2\pi i}{\alpha (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2})} = \frac{2\pi i}{\alpha 2i \sin \frac{\pi}{\alpha}} \\
\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}} &= \frac{\pi/\alpha}{\sin \pi\alpha}
\end{aligned}$$

7. Allgemein können Integrale vom Typ

$$\int_0^{\infty} dx f(x)$$

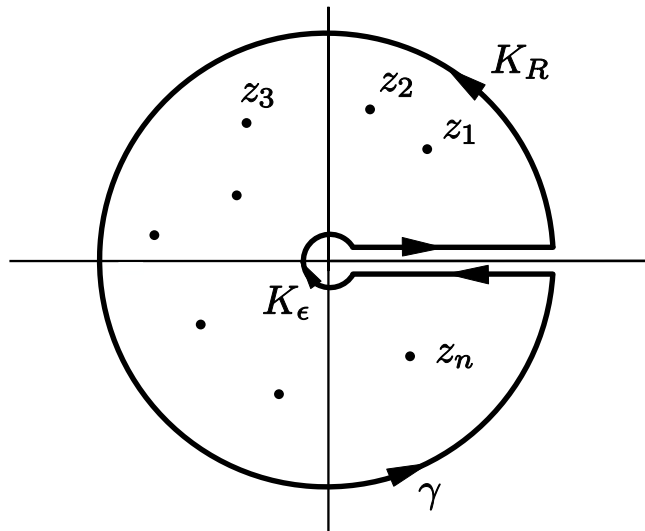
mit einer rationalen Funktion  $f$ , deren  $n$  Polstellen nicht zu  $\mathbb{R}^+$  gehören und mit  $f(z) \sim 1/z^m$ ,  $z \rightarrow \infty$ ,  $m \geq 2$  folgendermaßen berechnet werden:

Man betrachtet das Integral

$$\int_{\gamma} dz f(z) \ln z$$

mit dem Integrationsweg  $\gamma$ , der alle Pole von  $f$  umschließt.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} dz f(z) \ln z &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) \ln z] \\
&= \int_{K_R+K_{\varepsilon}} dz f(z) \ln z + \int_0^R dx f(x) \ln x - \\
&\quad - \int_0^R dx f(x) (\ln x + 2\pi i)
\end{aligned}$$



Die Integrale über  $K_\epsilon$  und  $K_R$  verschwinden für  $\epsilon \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$ .

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} dx f(x) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [f(z) \ln z]$$

**Beispiel:**

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Der Integrand hat einfache Pole bei  $z_k = e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{5i\pi/3}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= - \sum_k \frac{\ln z_k}{3z_k^3} \\ &= -\frac{1}{3} \left[ \frac{i\pi/3}{e^{2i\pi/3}} + \frac{i\pi}{e^{2i\pi}} + \frac{5i\pi/3}{e^{10i\pi/3}} \right] \\ &= -\frac{i\pi}{3} \left[ \frac{1}{3} e^{-2i\pi/3} + 1 + \frac{5}{3} e^{2i\pi/3} \right] \\ &= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

8. Integrale vom Typ

$$\int_0^{\infty} dx f(x) \ln x$$

mit einer rationalen Funktion  $f$ , die auf der reellen Halbachse  $\mathbb{R}^+$  keine Pole besitzt und für  $x \rightarrow \infty$  das asymptotische Verhalten

$$f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x^m}, \quad m \geq 2$$

aufweist.

Betrachte

$$\int_{\gamma} dz f(z)(\ln z)^2, \quad \gamma \text{ wie vorhin.}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx f(x)(\ln x)^2 - \int_0^{\infty} dx f(x)(\ln x + 2\pi i)^2 &= 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z)(\ln z)^2 \\ -4\pi i \int_0^{\infty} dx f(x) \ln x + 4\pi^2 \int_0^{\infty} dx f(x) &= 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f \ln z \\ \int_0^{\infty} dx f(x) \ln x &= -\frac{1}{2} \sum_k \operatorname{Res} f(z)(\ln z)^2 - \\ &\quad -i\pi \int_0^{\infty} dx f(x) \end{aligned}$$

$$f \text{ reell} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} dx f(x) \ln x = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_k \operatorname{Res} f(z)(\ln z)^2$$

**Beispiel:**

$$I = \int_0^{\infty} dx \frac{\ln x}{(1+x^3)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3} (1+z)^3 \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} 2 \ln z \frac{1}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{z \frac{1}{z} - \ln z}{z^2} \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{1}{z^2} (1 - \ln z) \Big|_{z=-1} = 1 - \ln e^{i\pi} = 1 - i\pi \\ I &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$