M1, SS 2014, Übungen 1

1. • Zeige dass

   $$(v|w) = v_1w_1 + 2v_2w_2 - v_2w_3 - v_3w_2 + 2v_3w_3 \ , \qquad \text{wo } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} , w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} ,$$

   ein Skalarprodukt auf dem R^3 definiert.

   • Zeige dass

   $$(v|w) = v_1w_1 - 2v_1w_2 - 2v_2w_1 + v_2w_2 \ , \qquad \text{wo } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} , w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} ,$$

   kein Skalarprodukt auf dem R^2 definiert.

2. A, A_1, A_2 seien lineare Abbildungen zwischen den Vektorräumen V und W. A^T, A_1^T, A_2^T bezeichne die adjungierten (transponierten) Abbildungen. Verwende die Definition der transponierten Abbildung und beweise so die folgenden Eigenschaften:

   i. $(a_1A_1 + a_2A_2)^T = a_1A_1^T + a_2A_2^T$ (für beliebige a_1, a_2 in R).

   ii. $A^{TT} = A$.

   iii. $(A_1A_2)^T = A_2^TA_1^T$.

   iv. Zusatzaufgabe: $kerA^T := \{v \mid A^Tv = 0\}$ und $imA := \{Aw \mid w \in V\}$ sind orthogonale Teilräume.

3. Betrachte die Menge der Polynome vom Grad ≤ 2 auf dem Intervall $[0, 1]$, die wir mit $P_2([0, 1])$ bezeichnen wollen. Zeige: $P_2([0, 1])$ ist ein Vektorraum. Definiere für $p, q \in P_2([0, 1])$

   $$(p|q) := \int_0^1 p(x)q(x)dx \ .$$

   Zeige dass so ein Skalarprodukt auf $P_2([0, 1])$ gegeben ist. Weiters ist durch $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$ eine Basis von $P_2([0, 1])$ gegeben. Konstruiere durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis.

4. **Parallelogrammregel und Polarisierungsformel**: Sei $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$ die zugehörige Norm. Zeige dass diese Norm die *Parallelogrammregel*

   $$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \ .$$

   erfüllt und dass sich das Skalarprodukt durch die Norm mit Hilfe der *Polarisierungsformel*

   $$\langle v|w\rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4}$$

   ausdrücken lässt.