M1, SS 2014, Übungen 4

1. Bestimme alle hermiteschen 2×2 Matrizen ($A = A^\dagger$).

2. Bestimme alle unitären 2×2 Matrizen ($U^\dagger = U^{-1}$).

3. Sei A eine $n \times n$ Matrix, und I die Einheitsmatrix. Das Polynom

$$W(\lambda) := \det(A - \lambda I) \ , \quad \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

wird *characteristisches Polynom von* A genannt.

   (a) Was ist die Ordnung von W? Was ist der höchste Koeffizient? Was ist der niedrigste?

   (b) Ein Vektor $x \neq 0$ mit der Eigenschaft

$$Ax = \lambda x \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0 \tag{1}$$

   wird *Eigenvektor* genannt, und das zugehörige λ *Eigenwert.* Zeige, daß (1) genau dann eine nichttriviale Lösung hat, wenn λ eine Wurzel von W ist.

   (c) Seien σ_i, $i = 1, 2, 3$, die Pauli Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

   Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren der σ_i für $i = 1, 2, 3$.

4. Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

   Konstruiere, wenn möglich, auch eine Basis von Eigenvektoren. Wie sieht die Matrix in dieser Basis aus?

   Der *Rang* einer linearen Abbildung ist definiert als Dimension des Bildes; der Rang einer Matrix ist definiert als Rang der entsprechenden linearen Abbildung. Berechne den Rang sowie die Dimension des Kerns dieser Matrizen.

5. Analoge Aufgabe wie in 4) für

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

   Hinweis: Es kann hilfreich sein, die komplexe Zahl $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ mit $j^3 = 1$ einzuführen.