M1, SS 2014, Übungen 3

1. Sei $(\ |\ )$ entweder ein Skalarprodukt oder ein komplexes Skalarprodukt. Beweise die *Bunyakovsky-Cauchy-Schwarz Ungleichung*

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

   Zeige, daß Gleichheit dann und nur dann gilt wenn die Vektoren x und y proportional (kollinear) sind.

   [Hinweis: siehe z.B. Skriptum.]

2. Betrachte die Vektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \quad , \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   im $\mathbb{C}^3$. Zeige, dass diese Vektoren ein Orthonormalsystem bilden. Ergänze die Vektoren durch Hinzunahme eine dritten Vektors b_3 zu einem VONS. Zerlege den Vektor

$$x = \sqrt{6} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   in die Basis $\{b_i\}_{i=1}^3$.

3. Eine Matrix $A = (A_{ij})$ mit komplexen Einträgen heißt

   symmetrisch, wenn $A = A^T$;

   antisymmetrisch, wenn $A = -A^T$;

   antihermitesch, when $A = -A^\dagger$;

   orthogonal, wenn $A^T = A^{-1}$;

   normal, when $AA^\dagger = A^\dagger A$.

   Hier bezeichnet A^T die Matrix deren ij -Eintrag durch A_{ji} gegeben ist, $A^\dagger$ die Matrix deren ij -Eintrag durch $\overline{A}_{ji}$ gegeben ist, und $\overline{z}$ das komplex konjugierte einer komplexen Zahl z.

   (a) Zeige: Eine Matrix A ist genau dann unitär, wenn alle Spalten die Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind; analog für die Zeilen.

   (b) Ist die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(4+2i) & \frac{1}{5}(-2-i) & 0 \\ \frac{1}{5}(2+i) & \frac{1}{5}(4+2i) & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

   (anti)symmetrisch? (anti)hermitesch? orthogonal? unitär? normal?

(c) Ist die Matrix

$$U = (b_1, b_2, b_3)$$

(anti)symmetrisch? (anti)hermitesch? orthogonal? unitär? normal? ((b_i) ist das Orthonormalsystem von Bsp. 2).

4. Sei A a quadratische Matrix. Zeige:

   (a) $(A^\dagger)^\dagger = A$;

   (b) AA^T und $A + A^T$ sind symmetrisch;

   (c) $A - A^T$ ist antisymmetrisch;

   (d) $AA^\dagger$, $A + A^\dagger$ und $\frac{1}{i}(A - A^\dagger)$ sind hermitesch;

   (e) $iAA^\dagger$, $A - A^\dagger$ und $\frac{1}{i}(A + A^\dagger)$ sind antihermitesch.

5. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & 0 & -\frac{1}{2}(1-i) \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) & 0 & \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

Ist A (anti)symmetrisch / (anti)hermitisch / orthogonal / unitär / normal?